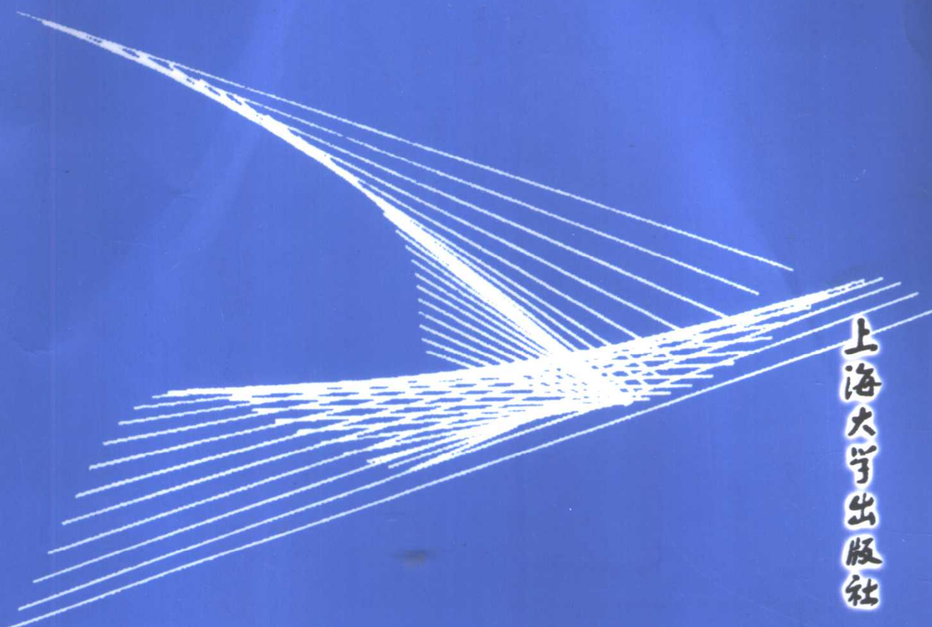
上海市研究生教育丛书

小波分析基础

XIAOBO FENXI JICHU

◎ 陈基明 编著



上海大学出版社

上海市研究生教育丛书
本教材得到上海市研究生教育专项经费资助

小波分析基础

陈基明 编著

上海大学出版社
·上海·

内 容 简 介

本书是一本小波分析的入门教材，主要内容包括：学习小波分析必须具备的预备知识；连续小波变换；离散小波变换；半离散小波变换；正交小波，半正交小波，双正交小波及其对偶；小波包的性质及应用；小波框架；最后还简单介绍了多维小波和向量小波。书中给出了较多的小波的构造实例和小波的应用实例。本书可作为非数学专业的大学高年级学生和研究生的教材，也可作为有关的工程技术人员学习小波分析的自学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

小波分析基础/陈基明编著. —上海：上海大学出版社，2002.12

ISBN 7-81058-558-4

Ⅰ.小... Ⅱ.陈... Ⅲ.小波分析-高等学校-教材 Ⅳ.O177

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 100750 号

上海大学出版社出版发行

(上海市延长路 149 号 邮政编码 200072)

上海广服电脑印刷厂印刷 各地新华书店经销

开本 880×1 230 1/32 印张 5 字数 140 千字

2002 年 12 月第 1 版 2002 年 12 月第 1 次印刷

定价：12.00 元

前　言

小波分析(Wavelet Analysis)是20世纪80年代开始发展起来的一个新兴的数学分支。小波分析是以泛函分析和调和分析为基础的一种新的信号分析的方法。小波分析从一开始发展就与很多学科的实际应用紧密联系在一起,小波理论的发展一直是伴随着实际应用。因此小波分析虽然发展历史不长,但已经在通信、地质、生物医学、自动化、湍流、分形、数值计算、微分方程求解等方面的应用中取得了引人注目的进展。小波分析的发展不仅受到数学工作者的极大关注,也引起了工程技术人员的极大关注。现在已有很多高等学校在应用数学和一些工科类专业中开设了小波分析及其应用的课程。

长期以来,傅里叶变换是信号处理的重要数学工具,但傅里叶变换只能反映信号的整体特征,而无法作信号的局部分析,小波变换在信号分析中具有独特的优势在于它可以有灵活可变的时频窗口,以适应不同频率的分辨率的需要,在时域和频域上都具有表征信号局部特性的能力,形象地说,小波变换具有“变焦”的功能,因此常常被称为“数学显微镜”。

编者在工作中了解到很多非数学专业的研究生希望能有一本不需要太多数学基础就能读懂的小波分析教材,帮助他们能在较短的时间内学习小波分析的基本理论和基本内容。出于这样的考虑,编者根据近几年在通信、材料、自动化和应用数学等专业的研究生中讲授小波分析课程的讲义,经修改整理而写成本教材。

本书力求用工科研究生容易接受的概念和语言来描述小波分析的基本理论和基本内容,尽可能用形象的语言和直观的背景来描述一些抽象的问题,尽量避免涉及较多的数学基础知识,避免使用较多的数学

术语。本书在不影响基本内容体系,不影响对基本理论的理解的前提下省略了一些繁锁的证明。因此只要具有高等数学和工程数学的基础,就能基本上读懂本书。

本书第一章作为预备知识,介绍了学习小波分析必须具有的数学知识,主要内容包括泛函分析中最基本的知识和傅里叶变换的基础,已有这方面知识的读者可以跳过第一章,直接从第二章开始阅读。第二章介绍小波变换的基本概念和连续小波变换,并给出了连续小波变换在地质方面的一个应用实例。第三章介绍多分辨分析和离散小波,正交小波基的构造,以及离散小波在取样定理中的应用。第四章介绍了小波包及其构造方法。小波包是正交小波基的一种推广,它是提高频域分辨率的一种很有效的方法。第五章介绍二进小波,半正交小波,双正交小波以及它们的对偶及特性,介绍了 Hilbert 空间中的框架概念和小波框架,并对各种小波进行了综合的分析和比较,还给出了二进小波的构造实例。最后第六章简要介绍了多维小波和向量小波。多维小波和向量小波的研究尚处于初级阶段,一些理论和方法还不成熟,还有大量的研究工作尚待深入。

本书可作为大学高年级学生和研究生的有关课程的教材,也可作为工程技术人员的自学参考书。

本书得到上海市教委研究生教材建设专项经费的资助。本书在写作和出版过程中得到上海大学研究生部、上海大学出版社、上海大学数学系的大力支持。特别要感谢上海大学彭瑞仁教授,许梦杰教授,安徽大学李世雄教授,他们对作者提供了极大的帮助,在此深表谢意。

限于作者的水平,本书难免存在缺点和不妥之处,恳请读者提出宝贵的意见。

编者　2002.8

目　　录

第一章　预备知识

§1.1　线性赋范空间

首先介绍一下泛函分析的有关概念。

从一个数集 X 到一个数集 Y 的一个映射 $f: X \to Y$，我们称 f 是一个函数。如果 X 不是一个数集，而是一个抽象集合（最常见的一个函数的集合），从 X 到数集 Y 的映射 $J: X \to Y$，这样的 J 我们称为一个泛函。比如 X 是区间 $[a, b]$ 上可积函数的全体，$f(x) \in X$，定义 $J[f] = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，这样 J 就是一个函数 $f(x)$ 到一个数 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的映射，即 J 是一个泛函。又如 $g(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上一个取定的函数，X 是 $(-\infty, +\infty)$ 上满足某种条件的函数的集合，$f(x) \in X$，$J[f] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$（当然假定这个积分收敛），这样的 J 也是一个函数 $f(x)$ 到一个数 $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)g(x)\mathrm{d}x$ 的映射，所以 J 也是一个泛函。这种泛函是一种很常用的泛函。

如果 X, Y 都是抽象集合，A 是 X 到 Y 的一个映射，称 A 是一个算子。

如 X 是 n 维列向量全体，Y 是 m 维列向量全体，$\boldsymbol{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in X$，$\boldsymbol{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} \in Y$，$A$ 是一个 $m \times n$ 矩阵，线性变换 $\boldsymbol{y} = A\boldsymbol{x}$，这个 A 是

$X \to Y$的一个算子。

用 $C^k[a, b]$表示定义在$[a, b]$上的具有 k 阶连续导数的函数全体，$f(x) \in C^k[a, b]$，定义 $D[f] = \dfrac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = g(x)$，则 $g(x) \in C^{k-1}[a, b]$，D 是 $C^k[a, b]$到 $C^{k-1}[a, b]$的一个算子。

在具有两阶连续偏导数的二元函数上定义 $L = \dfrac{\partial^2}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$，则微分方程 $\dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 u(x, y)}{\partial y^2} = f(x, y)$ 就可以记为 $Lu = f$，这个 L 就是 u 到 f 的一个算子。

本书中用到大量的积分表达式，这些积分通常是指勒贝格(Lebesgue)积分。勒贝格积分是“高等数学”课程中讲到的黎曼(Riemann)积分的一个推广。这里不打算详细介绍勒贝格积分，我们仅指出这样一个结论，一个函数如果在黎曼积分的意义下是可积的，那么在勒贝格积分的意义下也一定是可积的，且两者的积分值相等，凡对黎曼积分成立的性质，对勒贝格积分也成立。但勒贝格可积的函数不一定是黎曼可积，所以勒贝格可积函数比黎曼可积函数包括的范围更广。

在微积分中，我们知道，如果 $f(x) = g(x)$，则可推出 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$，但如果 $f(x)$和 $g(x)$在一些点 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$上不等时，只要这些点是离散点，不构成一个区间，就不影响其积分值，这时尽管 $f(x) \neq g(x)$，但 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$。

记 $X = \{x \mid f(x) \neq g(x), x \in [a, b]\}$，如果 X 的“长度”(严格地说应该是某种测度)为零，那么我们称 $f(x)$和 $g(x)$在$[a, b]$上几乎处处相等，或称 $f(x) = g(x)$ 在$[a, b]$上几乎处处成立。记为 $f(x) \doteq g(x)$，几乎处处相等的函数其积分值一定相等。

定义 1.1 设 X 是一个非空集合，K 是一个数域，以$\boldsymbol{x}$表示 X 中的元素，在 X 中定义了加法运算和数乘运算，这些运算满足以下规律：

$$\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y} + \boldsymbol{x};$$

$$(\boldsymbol{x} + \boldsymbol{y}) + \boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + (\boldsymbol{y} + \boldsymbol{z});$$

存在零元素 $\boldsymbol{\theta}$，$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\theta}=\boldsymbol{x}$；

存在 $\boldsymbol{x}$ 的负元素 $-\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{x}+(-\boldsymbol{x})=\boldsymbol{\theta}$；

$1\cdot\boldsymbol{x}=\boldsymbol{x}$；

$(\lambda\mu)\boldsymbol{x}=\lambda(\mu\boldsymbol{x})$，$\lambda,\ \mu\in K$；

$\lambda(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=\lambda\boldsymbol{x}+\lambda\boldsymbol{y}$，$(\lambda+\mu)\boldsymbol{x}=\lambda\boldsymbol{x}+\mu\boldsymbol{x}$，　　$\lambda,\ \mu\in K$。

这样的集合 X 称数域 K 上的线性空间，又称向量空间，其中的元素也可以称为向量或点。

如 X 是 $m\times n$ 实矩阵全体，按通常的矩阵加法和数乘运算，X 是一个线性空间。

X 是 $[a,\ b]$ 上连续函数全体，按通常的函数加法和数乘运算，X 也是一个线性空间。

$\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ 是线性空间 X 中的元素，由 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ 的线性组合的全体所成的集合 $\left\{\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\boldsymbol{x}_i\,\middle|\,\lambda_i\in K\right\}$，称为 $\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n$ 的生成空间，记为 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \cdots,\ \boldsymbol{x}_n\}$。如 X 是三维空间中的向量全体，$X=\{(x,\ y,\ z)\mid x,\ y,\ z\in\mathbf{R}\}$，$\boldsymbol{i}=(1,\ 0,\ 0)$，$\boldsymbol{j}=(0,\ 1,\ 0)$，$\boldsymbol{k}=(0,\ 0,\ 1)$，则 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j},\ \boldsymbol{k}\}$ 就是 X，而 $\mathrm{span}\{\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{j}\}$ 就是 xoy 平面上的向量全体。

设 X，Y 是同一数域上的两个线性空间，则 $X\times Y=\{(x,\ y)\mid x\in X,\ y\in Y\}$ 称为 X，Y 的乘积空间。特别当 $X=Y$ 时，$X\times Y=X^2=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in X\}$。

记 $\mathbf{R}=\mathbf{R}^1$ 为实数全体，则 $\mathbf{R}^2=\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,\ y)\mid x,\ y\in\mathbf{R}\}$ 就是二维实向量全体。

n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n个}$

定义 1.2　X 是一个线性空间，F 是 X 上的一个泛函，记为 $F(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|$，如果 $\|\cdot\|$ 满足下列三个条件：

(1) $\|\boldsymbol{x}\|\geqslant 0$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$，且 $\|\boldsymbol{x}\|=0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{\theta}$。

(2) $\|\lambda\boldsymbol{x}\|=|\lambda|\,\|\boldsymbol{x}\|$，$\forall\,\boldsymbol{x}\in X$，$\lambda$ 为常数。

(3) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, $\forall x, y \in X$。

则称这个泛函 $F = \|\cdot\|$ 为 X 上的一个范数。上述三个条件又称范数公理。

定义了范数的线性空间称为线性赋范空间。

范数是数的绝对值概念的一种推广。数的绝对值显然满足范数公理,所以绝对值也可以看做是一种范数。

例 1.1 对于 n 维实向量全体 $\mathbf{R}^n$, $x \in \mathbf{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 定义 $\|x\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2\right)^{1/2}$, $\mathbf{R}^n$ 按这个范数 $\|\cdot\|_2$ 构成一个线性赋范空间。

例 1.2 $C[a, b]$表示$[a, b]$上连续函数全体所组成的线性空间, $f(x) \in C[a, b]$, 定义 $\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$, 则 $C[a, b]$按这个范数 $\|\cdot\|_1$ 构成一个线性赋范空间。

如果在 $C[a, b]$上定义另外一种范数 $\|f\| = \max\limits_{a \leqslant x \leqslant b} |f(x)|$, 那么 $C[a, b]$按这样的范数 $\|\cdot\|$ 构成另外一个线性赋范空间。

例 1.3 $[a, b]$ 上 p 次勒贝格可积函数全体$\left\{f(x) \middle| \int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty\right\}$把几乎处处相等的函数作为同一函数。记为 $L^p[a, b]$,在 $L^p[a, b]$上定义范数 $\|f\|_{L^p[a,b]} = \left(\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$, 则 $L^p[a, b]$构成一个线性赋范空间。

在$(-\infty, +\infty)$上的 p 次勒贝格可积函数全体 $L^p(-\infty, +\infty)$,在其上定义范数 $\|f\|_{L^p(-\infty,+\infty)} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p}$, 则 $L^p(-\infty, +\infty)$ 成为一个线性赋范空间,通常记为 $L^p(\mathbf{R})$或简记为 L^p。L^p 空间是一种很重要的线性赋范空间,特别是 $p = 2$ 时,L^2 空间是小波分析中使用最多的一种线性赋范空间。

L^p 空间中的两个重要的不等式:

1. 赫尔德(Hölder)不等式

设 $p > 1$, $q > 1$, 且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f \in L^p$, $g \in L^q$, 则 $f \cdot g \in L^1$,

且有 $\|f\cdot g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^p}\cdot\|g\|_{L^q}$。

特别当 $p=q=2$ 时，称为许瓦尔兹(Schwarz)不等式：$\|f\cdot g\|_{L^1}\leqslant\|f\|_{L^2}\cdot\|g\|_{L^2}$。

2. 闵可夫斯基(Minkowski)不等式

对于 $p>1$，$\|f+g\|_{L^p}\leqslant\|f\|_{L^p}+\|g\|_{L^p}$。

例 1.4 记 $\boldsymbol{x}=\{x_k\}$ 是一个数列，对于 $p\geqslant 1$，记 $l^p=\left\{\boldsymbol{x}\,\middle|\,\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty\right\}$，在 l^p 上定义范数 $\|\boldsymbol{x}\|_{l^p}=\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$，$l^p$ 成为一个线性赋范空间。上述两个不等式对 l^p 空间也同样成立。

定义 1.3 $\{\boldsymbol{x}_n\}$是线性赋范空间 X 中的序列，如果存在一个 $\boldsymbol{x}$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}\|\boldsymbol{x}_n-\boldsymbol{x}\|=0$，则称序列$\{\boldsymbol{x}_n\}$按范数 $\|\cdot\|$ 收敛于 $\boldsymbol{x}$。

以后非特别说明，对于线性赋范空间中的收敛都是指按范数收敛。

定义 1.4 $\{\boldsymbol{x}_n\}$是线性赋范空间中的序列，如果对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n>N$ 时，$\|\boldsymbol{x}_m-\boldsymbol{x}_n\|<\varepsilon$，则称$\{\boldsymbol{x}_n\}$是一个基本序列，又称柯西序列。

如果 X 中的每一个基本序列都收敛于 X 中的元素，则称 X 是完备的，完备的线性赋范空间称为巴拿赫(Banach)空间。

L^p，l^p 都是 Banach 空间。

$C[a,b]$关于范数 $\|f\|=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}|f(x)|$ 是 Banach 空间，但关于范数 $\|f\|_1=\int_a^b|f(x)|\,\mathrm{d}x$ 不是 Banach 空间。

由线性代数的知识知道，对于 n 维向量空间 $\mathbf{R}^n$，存在 n 个线性无关的向量 $\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{x}_2$，…，$\boldsymbol{x}_n$，使得 $\mathbf{R}^n$ 中的任一向量 $\boldsymbol{x}$，可以唯一地表示为这 n 个向量的线性组合，即这 n 个线性无关的向量构成 $\mathbf{R}^n$ 的一个基，$\mathbf{R}^n$ 可以作为基的生成空间，$\mathbf{R}^n=\mathrm{span}\{\boldsymbol{x}_1,\boldsymbol{x}_2,\cdots,\boldsymbol{x}_n\}$，$\mathbf{R}^n$ 中的基不是唯一的，任何 n 个线性无关的向量都可以作为基。现把基的概念推广到无限维空间。

定义 1.5 设 B 是一个 Banach 空间，$\{\varphi_k,k=1,2,\cdots\}$ 是 B 中的一个序列，如果对于任意的 $f\in B$，存在唯一的数列$\{c_k\}$，使得 $f=$

$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \varphi_k$，且级数无条件收敛（即与项的排列次序无关），则称序列$\{\varphi_k\}$是 B 的一个无条件基。

与有限维空间不同，无限维的 Banach 空间不一定存在无条件基。即使存在无条件基$\{\varphi_k\}$，$\{\varphi_k\}$的生成空间 $\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}$也不一定就是这个 Banach 空间本身，因为在无限维空间中还涉及收敛序列的极限点，一个集合 A 加上它的所有的极限点后得到的集合，称为 A 的闭包，记为 $\overline{A}$。$\{\varphi_k\}$ 的所有的线性组合所成的集合的闭包 $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n, \cdots\}}$就是这个 Banach 空间 B。

§1.2 内 积 空 间

定义 1.6 X 是数域 K 上的一个线性空间，F 是乘积空间 $X \times X$ 上的一个泛函，记为 $F(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$，如果$(\cdot, \cdot)$满足下列条件：

(1) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) \geqslant 0$，对任意的 $\boldsymbol{x} \in X$ 成立，且 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}) = 0$ 当且仅当 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta}$；

(2) $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$，这里$\overline{(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})}$表示$(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$的共轭复数；

(3) 对常数 λ_1, λ_2 有 $(\lambda_1 \boldsymbol{x}_1 + \lambda_2 \boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y}) = \lambda_1(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{y}) + \lambda_2(\boldsymbol{x}_2, \boldsymbol{y})$。

则称$(\cdot, \cdot)$为 X 中的内积。这三个条件又称为内积公理。定义了内积的线性空间称为内积空间。

例 1.5 在 n 维实向量空间 $\mathbf{R}^n$ 中，定义内积 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$，$\mathbf{R}^n$ 就成为一个内积空间。

在 n 维复向量空间 $\mathbf{C}^n$ 中，定义内积 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y}_i$，$\mathbf{C}^n$ 也成为一个内积空间。

例 1.6 在 L^2 中定义 $(\boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{y}(t)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \boldsymbol{x}(t)\, \overline{\boldsymbol{y}(t)}\, \mathrm{d}t$，$L^2$ 就成为一个内积空间。

在 l^2 中定义内积 $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \overline{y}_k$，$l^2$ 也成为一个内积空间。这

里 $\boldsymbol{x}=\{x_k\}$，$\boldsymbol{y}=\{y_k\}$。

内积满足柯西-许瓦尔兹不等式：

$|(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})|\leqslant\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})}$ 对任意的内积空间中的元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 成立。

我们可以在内积空间中定义一个与内积有关的范数，$\|\boldsymbol{x}\|=\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}$，容易验证，这样定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数公理。所以内积空间中按内积导出范数后又成为一个线性赋范空间。如果内积空间按这样的范数又是完备的，则此内积空间称为希尔伯特(Hilbert)空间。

L^2，l^2 都是希尔伯特空间。

L^p，l^p 当 $p\neq 2$ 时不能成为内积空间。

定义 1.7 H 是一个希尔伯特空间，$\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 H 中的一族元素，且 $H=\overline{\mathrm{span}\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}}$（这里 $\mathbf{Z}$ 表示整数集合），如果对于 H 中的任一元素 f，存在唯一的数列 $C=\{c_k\}$，使得 $f=\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi_k$，且存在常数 A，B，$B>A>0$，使对任意的 l^2 中的数列 $C=\{c_k\}$ 有

$A\|C\|_{l^2}\leqslant\|\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi_k\|\leqslant B\|C\|_{l^2}$，则称 $\{\varphi_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$ 是 H 的一个黎茨(Riesz)基。

这个条件 $A\|C\|_{l^2}\leqslant\|\sum\limits_{k\in\mathbf{Z}}c_k\varphi_k\|\leqslant B\|C\|_{l^2}$ 称为 Riesz 条件。

Riesz 基是 Hilbert 空间中的无条件基。有时就把 Hilbert 空间中的无条件基称为 Riesz 基。

定义了内积后，就可以把 n 维欧氏空间中的一些几何概念推广到内积空间中去。

定义 1.8 X 是一个内积空间，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}\in X$，$\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}$ 称为元素 $\boldsymbol{x}$ 的长度，$\arccos\dfrac{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})}{\sqrt{(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})}\sqrt{(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})}}$ 称为元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 之间的夹角。如果 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 正交。

设 Y 是内积空间 X 的子集，如果 Y 中的元素都相互正交，则称 Y 是一个正交系，进一步如果 Y 中的所有元素还满足 $\|\boldsymbol{y}\|=1$，则称 Y 是一个标准正交系。

设$\{e_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$是内积空间 X 的一个无条件基，同时$\{e_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$还是一个标准正交系，即 $(e_i,\ e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$，则称$\{e_k,\ k\in\mathbf{Z}\}$是 X 的一个标准正交基。δ_{ij} 称为克朗内克符号，其定义就是 $\delta_{ij}=\begin{cases}1 & i=j\\0 & i\neq j\end{cases}$。对于 X 中的每一个元素 $\boldsymbol{x}$，都可以唯一地表示为一个级数 $\boldsymbol{x}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}c_k\boldsymbol{e}_k$，对这个级数两边与 e_i 作内积后，由于 $(\boldsymbol{e}_k,\ \boldsymbol{e}_i)=\delta_{ki}$，所以 $c_k=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{e}_k)$，这就是 X 中的元素 $\boldsymbol{x}$ 在这组基下的“坐标”。

与 n 维欧氏空间中的基比较，n 维欧氏空间中任何 n 个线性无关的向量都可以成为一组基，$\mathbf{R}^n$ 中的任一向量可以由这组基线性表示，且表示式惟一。Hilbert 空间中的 Riesz 基就相当于这样的基。而 $\mathbf{R}^n$ 中特别有用的是标准正交基，$\mathbf{R}^n$ 中的任意一组基都与标准正交基等价，通过正交规范化方法，可以把任何一组基化为标准正交基。在 Hilbert 空间中 Riesz 基也与标准正交基等价，一个 Riesz 基也可以通过正交规范化的方法成为标准正交基。

定义 1.9 X 是一个内积空间，M 是 X 的真子集，$\boldsymbol{x}\in X$，但 $\boldsymbol{x}\overline{\in} M$，如果对于任意的 $\boldsymbol{y}\in M$，都有 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0$，则称 $\boldsymbol{x}$ 与 M 正交，记为 $\boldsymbol{x}\perp M$。

又设 M，N 都是 X 的真子集，如果对任意的 $\boldsymbol{x}\in M$，任意的 $\boldsymbol{y}\in N$，都有 $(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=0$，则称 M 与 N 正交，记为 $M\perp N$。

M 是 X 的真子集，X 中所有与 M 正交的元素的集合 $\{\boldsymbol{x}\mid \boldsymbol{x}\in X,\ \boldsymbol{x}\perp M\}$ 称为 M 在 X 中的正交补，记为 $M^{\perp}$。

显然，$M\perp M^{\perp}$，且 $M\cap M^{\perp}=\{\boldsymbol{\theta}\}$，$M\cup M^{\perp}=X$。

内积空间中的元素 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 正交的充分必要条件是“勾股定理”成立，即 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=\|\boldsymbol{x}\|^2+\|\boldsymbol{y}\|^2$。

因为 $\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|^2=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x}+\boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{x})+(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{y})\Longleftrightarrow(\boldsymbol{x},\ \boldsymbol{y})=(\boldsymbol{y},\ \boldsymbol{x})=0$。

一个内积空间 X，可以分解为它的一些子空间的并：

$X=X_1\cup X_2\cup\cdots\cup X_N$，$X_i\subset X$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ N$。有时也记为

$X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$。如果子空间之间还满足 $X_i \cap X_j = \{\boldsymbol{\theta}\}$，当 $i \neq j$ 时，这时 $X = X_1 \cup X_2 \cup \cdots \cup X_N$ 称 X 分解为子空间的直和，记为 $X = X_1 \dotplus X_2 \dotplus \cdots \dotplus X_N$。如果这些子空间之间还是两两正交的：$X_i \perp X_j$，当 $i \neq j$ 时，这样的和称为正交和，记为 $X = X_1 \oplus X_2 \oplus \cdots \oplus X_N$。

把一个内积空间分解为若干个子空间的正交和，就相当于在这个空间中建立了一个“直角坐标系”，这样内积空间中的任何一个元素 $\boldsymbol{x}$，都可以“投影”到这些子空间上去，$\boldsymbol{x}$ 就可以有“分量表示式”，$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 + \cdots + \boldsymbol{x}_N$，$\boldsymbol{x}_i \in X_i$，$i = 1, 2, \cdots, N$。这就如同三维向量空间中的任一向量 $\boldsymbol{x}$ 可以投影到 x，y，z 三条坐标轴上，$\boldsymbol{x} = (x, 0, 0) + (0, y, 0) + (0, 0, z)$。如果 $Y_i = \{y_1^{(i)}, y_2^{(i)}, \cdots, y_{k_i}^{(i)}\}$ 是子空间 X_i 的标准正交基，$i = 1, 2, \cdots, N$，则把这些标准正交基并起来 $\{y_1^{(1)}, y_2^{(1)}, \cdots, y_{k_1}^{(1)}, y_1^{(2)}, y_2^{(2)}, \cdots, y_{k_2}^{(2)}, \cdots, y_1^{(N)}, y_2^{(N)}, \cdots, y_{k_N}^{(N)}\}$ 就成为 X 的标准正交基。

无限维的 Hilbert 空间与 n 维欧氏空间有很多类似之处，n 维欧氏空间中的很多性质可以推广到无限维的 Hilbert 空间上去。

§1.3 傅里叶变换

小波变换是在傅里叶变换的基础上发展起来的。

定义 1.10 设 $f(t) \in L^1$，则 $\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-i\omega t}dt$ 称为 $f(t)$ 的傅里叶(Fourier)变换。有时也用记号 $F[f(t)] = \hat{f}(\omega)$，为了突出变量是 ω，有时也记为 $(Ff)(\omega) = \hat{f}(\omega)$。

一个信号 $f(t)$ 的自变量 t 是时间(或空间)的变化范围，常常称为时(空)域，而其傅里叶变换 $\hat{f}(\omega)$ 的自变量 ω 是频率的变化范围，常常称为频域。

傅里叶变换把一个时域上的信号 $f(t)$ 映射到频域上。那么频域上的信号表示 $\hat{f}(\omega)$ 能否“回复”到时域信号呢。

定义 1.11 设 $\hat{f}(\omega) \in L^1$，$\hat{f}(\omega)$ 是某个函数 $f(t) \in L^1$ 的傅里叶

变换，则 $g(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$ 称为 $\hat{f}(\omega)$ 的傅里叶逆变换，记为 $F^{-1}[\hat{f}(\omega)]$ 或 $(F^{-1}\hat{f})(t)$。

但要注意 $F^{-1}[\hat{f}(\omega)]$ 不一定等于 $f(t)$。只有当 $f(t)\in L^1$ 时，$\hat{f}(\omega)\in L^1$，则在 $f(t)$ 的连续点上，才有 $f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\hat{f}(\omega)e^{i\omega t}d\omega$，以后非特别说明 $f(t)=(F^{-1}\hat{f})(t)$ 都是指这种意义。

当 $f(t)\in L^1$ 时，$\hat{f}(\omega)$ 不一定属于 L^1，所以对每一个 $\hat{f}(\omega)$ 不一定能通过逆变换回复到 $f(t)$，只有那些属于 L^1 的 $\hat{f}(\omega)$ 才能作逆变换。而且 L^1 不是希尔伯特空间。小波变换中用到的是 L^2 中的傅里叶变换。但若 $f(t)\in L^2$，积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt$ 不一定有意义。

记 $\operatorname{supp} f(t)=\{t\mid f(t)\neq 0\}$，$\operatorname{supp} f(t)$ 称为 $f(t)$ 的支集。如果 $f(t)$ 的支集是紧集（有界闭集），则称 $f(t)$ 有紧支集。对于有紧支集的函数 $f(t)$，显然有 $f(t)\in L^1\cap L^2$。

设 $f(t)\in L^2$，令 $X_N(t)=\begin{cases}1 & |t|\leqslant N\\ 0 & |t|>N\end{cases}$，$X_N(t)$ 称为截断函数，记 $f_N(t)=f(t)\cdot X_N(t)$，显然 $\operatorname{supp} f_N(t)\subset[-N,N]$，由于 $f_N(t)\in L^1$，所以 $\hat{f}_N(\omega)$ 在 L^1 上有意义，又由于 $f_N(t)\in L^2$，$\hat{f}_N(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f_N(t)e^{-i\omega t}dt$ 当然也有意义，而且可以证明 $\hat{f}_N(\omega)\in L^2$。对于这样定义的 $f_N(t)$，当然有 $\lim\limits_{N\to\infty}\|f_N-f\|_{L^2}=0$。以后非特别说明，在 L^2 中，$\lim\limits_{n\to\infty}f_n(t)=f(t)$ 都是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|f_n-f\|_{L^2}=0$。对上述定义的 $\hat{f}_N(\omega)$，如果 $\lim\limits_{N\to\infty}\hat{f}_N(\omega)=\hat{f}(\omega)$，则称 $\hat{f}(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换，这就是 L^2 中的傅里叶变换。由于 L^2 是一个完备的空间，所以 $\hat{f}(\omega)\in L^2$。因此傅里叶变换是 L^2 到 L^2 的一个映射，即对于 $\forall f\in L^2$，必存在唯一的一个 $g\in L^2$，使 $F[f]=g$。换句话说，对于 L^2 中的任意一个函数的傅里叶变换，都可以通过逆变换“回复”到原象函数。