数学花絮

SHUXUE HUAXU

数 学 花 絮

丁耀仁 编著

安徽科学技术出版社

1979·合肥

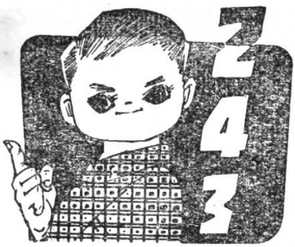
数 学 花 絮 丁辉仁

安徽科学技术出版社出版 安徽省新华书店发行
安徽新华印刷厂印刷
开本：787×1092 1/32 印张：5 印数：350,000
1979年10月第1版 1979年10月第1次印刷

统一书号：13200·5 定价：0.38元

目　录

仿佛做过的数学题



我的节目

晚会正在热烈地进行，同学们表演了很多精彩节目。经过一周紧张的学习，有这样一个轻松愉快的周末晚会确实使人高兴。当我正在独自遐想时，忽然有人喊起来："现在请我们未来的数学家表演一个！"教室里立刻响起了噼噼叭叭的掌声。被点名表演的正是我！由于我平日酷爱数学，所以同学们都友善地称誉我为"未来的数学家"。

糟了，能歌善舞是别人的事，我从来就没有长过艺术的细胞啊！这下可遇到了难题，我窘极了。我赶紧搜肠刮肚，除了 x、y 之类外，没有一点文艺的东西。于是，我站起来带有歉意地说："同学们，我实在没有什么节目好表演的。这样吧，我请大家猜一个数。不过事先声明，这个游戏我也是从别处刚刚学来的。"

想不到这样一来，大家又鼓起掌来，他们也许是对这一

新颖的节目感到好奇，也许是为我破天荒地表演节目这件事本身感到新鲜。

“请哪位同学先在纸上写一个三位数的数字，不论写什么数都可以，经过一番运算之后，我能猜出这是什么样的三位数。”我向大家说。

“我写好了。”离我座位较远的一位同学说。

“请你把这个数接下去再写一遍，现在该是六位数了。”我接着说。

“不错，是六位数。下面该做什么呢？”

“把这个六位数用7去除。”我又说，“一定刚好能除尽。”

“奇怪，真的能除尽！再下面做什么呢？”

“下面把商交给另一位同学，请他用11去除。”

“真巧，我也除尽了。”第二位同学说。

“你再把商交给第三位同学，请他用13去除。”

“哎，你今天打算要我们复习除法运算吗？”

“你等一会就知道了。除尽了吗？”我问。

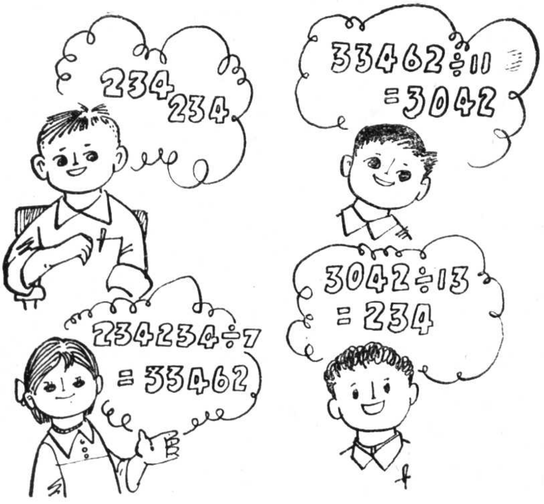
“不错！它被13也除尽了。”第三位同学高兴得叫了起来。

“请你向大家宣布答案。我也立即宣布最早写下的三位数是什么数字。”

“这，可能吗？我的答案是243。”

“那末，第一次写下的三位数就是243。”

散会后，几位同学围住我，要我讲一下“奥秘”所在。我说，一点奥秘也没有，任何一个三位数都有这种规律，就以刚才的243为例，再接着写一遍的话就是243243，而



$$243243 = 243000 + 243 = 243 \times 1000 + 243 \times 1$$
$$= 243 \times (1000 + 1) = 243 \times 1001。$$

1001恰好是$7 \times 11 \times 13$的积，因此，243243肯定能被7，11，13分别除尽；被连除三次相当于被1001除一次，其商必是243。

奇 怪 的 9

“你不是喜欢数学吗？你说说什么是‘数’。”一天，哥哥这样问我。

“笑话，谁不知道数呢，不就是0，1，2，3，4，……吗？可以一直数到你不耐烦的时候为止。”我不假思索地答道。

“会数‘数’和真正理解‘数’是两码事。”哥哥是机械厂的工人，他也挺爱数学。这时他列举了几个例子兴致勃勃地向我解释起来：

“说实在话，‘数’，我们每天都能碰到，可是真正了解‘数’的人还不多，我们这些人算是一知半解。‘数’有各种各样的特性，认识这些特性，对理论研究和实际应用都很有价值。就以9这个数来说，它就有很多特性，其中一个特性是：9乘以任何整数，其积不管是几位数，若将其每位上的数字加起来，它总是9的整数倍。反过来这个规律也成立：一个数若其每位上的数字加起来后能被9整除，那末原数一定能被9整除。譬如：

$9\times3=27 \quad \longleftrightarrow \quad 2+7=9$

$9\times7=63 \quad \longleftrightarrow \quad 6+3=9$

$9\times35=315 \quad \longleftrightarrow \quad 3+1+5=9$

$9\times678=6102 \quad \longleftrightarrow \quad 6+1+0+2=9$

$9\times3254=29286 \quad \longleftrightarrow \quad 2+9+2+8+6=27$

……等等。”

听了哥哥的叙述，使我想起上次曾因类似问题被弟弟“将”过一军。弟弟刚上初中，什么事都喜欢追根求源。记得有一次他带着神秘的眼色对我说：“你知道历史学家新近发现一份古代文献的事吗？听说文献里面有几个数字看不清楚，正在考证。”我是个急性子人，忙问：“什么文献？怎样的数字？在哪儿发现的？你怎样听来的？”可是我越急，他越是慢腾腾地说：“我只知道这么多。据说有一个数字是

2＊36＊…… 好象是关于封建统治者一次强征兵役的人数，编到各个兵营，正好使各兵营扩充 45 人。因为天长日久，有两个数字看不清楚了……”我恍然大悟，他压根儿就不是向我介绍什么历史文献，而是成心想考考我。要不，中国历史文献怎会用阿拉伯数字写呢？不过，这倒是一个有意思的问题。

能给他考倒吗?!于是，我聚精会神地推敲起来：2＊36＊，就叫它 $2x36y$ 吧，既然能被 45 整除，y 不是 0 就是 5，至于这个 x，x……我怎么也想不出 x 该是什么数字，为此我几乎闷了一天。

你问以后吗？以后是请教老师才弄清楚的。原来是个十分简单的问题。$2x36y$ 因为能被 45 整除，当然就能被 5 和 9 分别整除，根据哥哥前面讲到的 9 的特性，若将这个数的每位数字加起来，其和必能被 9 整除，也就是说，$2+x+3+6+y$ 所得和是 9 的整数倍。而已知 y 只能是 0 或 5，即原数可改写成：

$$2x360 \quad 或 \quad 2x365;$$

要使 $2x360$ 是 9 的整数倍，则 $2+x+3+6+0=11+x$ 也是 9 的整数倍，此时只有 $x=7$ 才能满足，故原数是 27360。

同理，要使 $2x365$ 是 9 的整数倍，则 $2+x+3+6+5=16+x$ 必能被 9 整除，此时只有取 $x=2$，故原数是 22365。

可见，答案有两个：27360 或 22365。

没有说完的故事

哥哥告诉我关于9的某些特性后，接着又介绍了9的邻居——11。所以现在讲的是上次“没有说完的故事”。

11有个有趣的特点：要判别一个整数能否被11整除，只要把这个数偶位（或奇位）上的数字之和与奇位（或偶位）上的数字之和相减，减得的数如果能被11整除，原数就一定能被11整除；减得的数如果不能被11整除，则原数也不能被11整除。究竟是用偶位数和作为被减数还是用奇位数和作为被减数呢？随便。通常是哪一个数大就以哪一个数作为被减数。例如：

$$8\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7$$

奇位数上数字之和是$8+3+5+7=23$

偶位数上数字之和是$2+4+6=12$。

两个和之差为$23-12=11$，因为11是11的整数倍，所以8234567能被11整除。再如：

$$4\ 3\ 4\ 3\ 5\ 7$$

由于$(3+3+7)-(4+4+5)=13-13=0$，0能被11整除，故可断定434357能被11整除。

哥哥说到这里的时候，我问道：“你举的这些例子或许是碰巧吧？”哥哥说：“不是碰巧，这是必然的，注意下面规律：

$$1=0\times 11+1 \qquad 10=1\times 11-1, \qquad 100=9\times 11+1$$
$$1000=91\times 11-1 \quad 10000=909\times 11+1 \quad \cdots\cdots$$

我们可以利用这个规律对任何整数进行分解。例如

$$\begin{aligned}23419&=10000\times 2+1000\times 3+100\times 4+10\times 1+9\\&=(909\times 11+1)\times 2+(91\times 11-1)\times 3\\&\quad+(9\times 11+1)\times 4+(11-1)\times 1+9\\&=(909\times 11\times 2+91\times 11\times 3+9\times 11\times 4+11\times 1)\\&\quad+(2-3+4-1+9)。\end{aligned}$$

最后等式右边第一个括号内的各数都是11的整数倍，所以要判别 23419 能否被 11 整除，只要检查右边第二个括号内的数能否被11整除就可以了。但后一括号内的数正是原数的奇位数和与偶位数和这两者之差……。”

在哥哥的启发下，一个长久没有解出的数学竞赛题，我现在顺利地找到了答案。这个题目是：已知七位数$62xy427$能被99整除，求x，y。

既然原数能被99整除，而$99=9\times 11$，故原数一定能被9和11分别整除。按9的整除特性有$6+2+x+y+4+2+7=x+y+21$应是9的整数倍。所以$x+y=6$或15。按11的整除特性有$(6+x+4+7)-(2+y+2)=x-y+13$，它应是11的整数倍，得到$x-y=-2$或9。

若$x-y=9$，只能$x=9$，$y=0$，此时$x+y=9$，这与$x+y=6$或$x+y=15$相矛盾，可见$x-y=9$不合理，故只能$x-y=-2$。这样，

$$(1)\begin{cases}x-y=-2\\x+y=15\end{cases} \quad 或 \quad (2)\begin{cases}x-y=-2\\x+y=6\end{cases}$$

但(1)式不合理，因为解得 $\begin{cases} x=\dfrac{13}{2} \\ y=\dfrac{17}{2} \end{cases}$ ，而x、y必须是正整数，所以不符题意。

由(2)式解得 $\begin{cases} x=2 \\ y=4 \end{cases}$

故原数是 6224427。

哥哥最后说，判别11的整除性，除此之外还有其他方法，以后再同我谈。

不能严格执行的计划

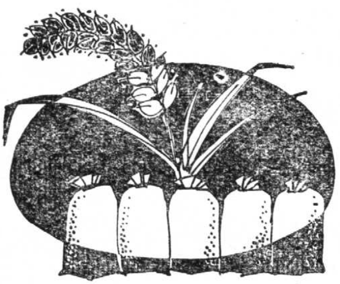
新学年开始的时候，孙一民给自己订了一个据他说要严格执行的计划。他在小组会上说："本学期我打算利用晚上八点半到九点的时间对各门功课分别进行复习，每隔2天安排一次数学复习，每隔3天安排一次物理复习，化学复习是每隔5天一次，语文是每隔……"

坐在我旁边的王立挨着我的耳朵悄悄地说："一民不会严格执行这个计划的。"我回过头来，略带批评语气地说："你怎么这样说，他是很认真的。"接着王立提醒我："你还记得那个红灯、绿灯的事吗？一民的计划糟就糟在这个'每隔'上。"关于红灯、绿灯的事我当然记得，那是今年夏

天晚上纳凉时猜的灯迷：某仪器上有三只闪光灯，红灯5分钟闪一次，绿灯7分钟闪一次，黄灯9分钟闪一次，问每隔多少时间三个灯同时闪光？

我猛地省悟过来，灯的闪光与孙一民的计划属于同一类的问题，王立是对的。三个灯同时闪光的间隔时间是5分、7分、9分的最小公倍数315分钟；孙一民的2天、3天、5天的最小公倍数是30天，每隔30天他必须在半个小时内又复习数学，又复习物理，又要复习化学，能办得到吗？更何况后面还有几个“每隔”要说呢！

事实上他在第六天晚上就会发现复习数学与复习物理在时间上的冲突，第十天是数学与化学，第十五天是物理与化学时间重叠……。



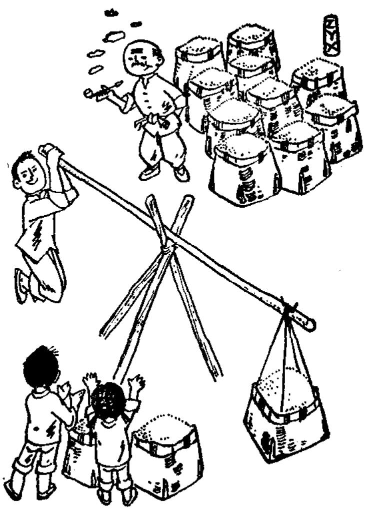
多了还是少了？

又是一个丰收年，场地上堆满了新谷，生产队决定先预分给每户二百斤。分粮必须有秤，可是大秤昨天给邻队借去了，这怎么办？

“估摸着分一下就可以了，不用秤吧！”性急的几个社员提出了建议。

“那不行，那样会出差错。”队长说。他是个一向办事认真的人。

到底是会计有办法。他找来一根长圆木和一个三角形支架：“开秤！我做秤砣。我前天刚磅过体重，不多不少整一百斤。谅必两天来没有长胖，也不会变瘦。”



大家听了会计这一席话，都觉得新鲜。会计前天的体重确实是一百斤，关于这一点，没有人怀疑。但是这与称粮分谷又有什么关系呢？

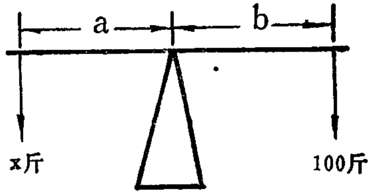
“问题很简单，”他解释说，“秤是应用杠杆原理造出来的，我们也能用这个原理造一个土秤。”

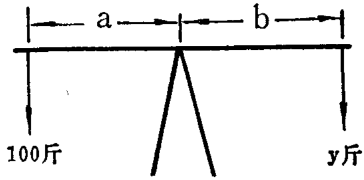
言之有理。大家在会计的指点下，七手八脚地架起了一个三角架，特邀会计权充法码。粮食装进箩筐里，与会计各据一端，由几个人负责装、卸、增、减。一切准备就绪后，会计喊道：“开始！圆木水平时，一筐就是一百斤，每户称两次。”

称了几次后，会计喊起来：“停，停。”干啥要停？是不是他累了？

会计没有累。原来他想到了一个新问题：支点不一定恰在杆中央，这样称可能有误差。因此他提议称第一次时，人右筐左；称第二次时，人左筐右，杆上做一个记号，两次称量时保持记号与支点重合。

这真是科学的见解。预分工作进行得很顺利，大家都满意。可是不久，会计又想到了一个问题。请问：他又想到了什么问题？





设杠杆二端离支点距离分别为a、b，第一次称得粮重为x斤，则$ax=100b$，

$$x=\frac{100b}{a}$$

第二次称得粮重为y斤，

$$100a=by,\qquad y=\frac{100a}{b}$$

故二次粮食总重为$x+y$斤，

$$x+y=\frac{100b}{a}+\frac{100a}{b}=100\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=100\frac{b^2+a^2}{ab}。$$

所分粮谷是多了还是少了？

由　$(a-b)^2\geqslant 0$　　有 . $a^2-2ab+b^2\geqslant 0$

$a^2+b\geqslant 2ab$，　　因a、b皆为正数，

故　$$\frac{a^2+b^2}{ab}\geqslant 2$$

即　$$x+y\geqslant 200$$

我们的会计由此得出结论：每户实分粮食毛重可能超过了200斤。但继而一想，假如$\frac{a}{b}=\frac{4}{5}$的话，则$x+y=205$，扣除二次筐重后，每户净分十分接近于200斤。