

WEIFENFANGCHENG DE
SHUZHIFANGFA

微分方程的数值方法

吴旭光 编著


$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y)$$

南京出版社

微分方程的数值方法

1.. 吴旭光 编著

南京出版社

(苏)新登字第 009 号

微分方程的数值方法

吴旭光 编著

南京出版社出版发行

江宁彩色印刷厂印刷

开本:787×1092毫米 1/32 印张:9 字数:19万

1993年5月第1版 1993年5月第1次印刷

印数1—2000册

ISBN 7-80560-752-4/G·241

定价:4.95元

责任编辑:杨青 刘嵩

前 言

微分方程的数值解法在数值分析中占有重要的地位,很多科学技术问题都涉及到微分方程的计算。近 30 年来,它的理论和方法都有了很大的发展。目前微分方程数值解主要包含差分方法和有限元方法。不过在应用的广泛性上差分方法仍占主导地位,有限元主要在处理椭圆型方程的问题上有明显的优越性。本书原计划分为两个部分,前半部分主要讨论常微分方程,抛物型,椭圆型,双曲型偏微分方程的有限差分法,后半部分讨论椭圆型、抛物型偏微分方程的有限元法。因为时间的原因,后半部分暂不能与读者见面。微分方程数值解在国内一些主要的理工院校已作为一门课程,特别在研究生中已广泛开设了这门课。本书的目的就是为有关院校提供一本教材,同时也为从事这方面工作的科研、工程技术人员提供一本参考书。这类书籍在国内并不太多,我深信这本书的出版定会为这门学科的发展起到“抛砖引玉”的作用。

本书的各章节都是以由浅入深的次序安排的,凡打 * 号的章节是为研究生或需要深入学习的大学生新增写的。

本书注意基本概念的完整,但力图避免繁琐抽象的概念。本书还特别强调算法的构造和实用性。

本书共 20 万字,对本科生授课时间约为 40 学时,研究生约为 50 学时。为了便于自学本书各章节均有大量的数值例子,附录中的习题及解答内容也比较丰富。

本书由河海大学姚敬之教授审查,在此深表谢意。

作者 吴旭光

1992. 9

目 录

第一章 常微分方程数值解	(1)
§ 1.1 Euler 折线法与改进的折线法	(1)
§ 1.2 Euler 折线法及改进折线法的误差分析	(7)
§ 1.3 Runge—Kutta 方法	(11)
§ 1.4 绝对稳定性概念	(20)
§ 1.5 * 外推法	(24)
§ 1.6 线性多步法	(32)
§ 1.7 * 线性多步法收敛性、稳定性分析	(40)
§ 1.8 * 多步法计算中的若干问题	(48)
§ 1.9 * 高阶微分方程(组)与一阶微分方程组初值问题的数值解法	(50)
§ 1.10 * 一阶常微分方程组数值法的稳定性分析	...
	(54)
§ 1.11 * 刚性方程组的解法	(56)
§ 1.12 常微分方程的边值问题	(60)
§ 1.13 * 常微分方程边值问题的外推方法	(66)
第二章 抛物型方程的有限差分法	(74)
§ 2.1 差分方程的建立与解法	(74)
§ 2.2 Crank—Nicolson 隐式格式	(79)
§ 2.3 三对角方程的解法(追赶法)	(82)
§ 2.4 加权隐式格式	(84)
§ 2.5 导数边界条件	(85)

§ 2.6	局部截断误差和相容性	(92)
§ 2.7	差分方程的相容性	(94)
§ 2.8	差分格式的收敛性	(96)
§ 2.9	差分方程的稳定性的一般概念	(99)
§ 2.10	* 向量范数和矩阵范数	(100)
§ 2.11	* 稳定性定义	(102)
§ 2.12	* 研究稳定性的直接方法	(107)
§ 2.13	* 研究稳定性的 Von Neumann 法	(111)
§ 2.14	* Lax 等价定理	(116)
§ 2.15	* 特征值估计及在稳定性分析中的应用	
		(120)
§ 2.16	二维的热传方程	(124)
§ 2.17	* 抛物型方程的分裂方法(Splitting Up)	
		(126)
§ 2.18	* 二维抛物型方程的预估——校正格式	
		(130)
§ 2.19	* $\partial U / \partial t = \nabla^2 U$ 在柱面坐标或球极坐标下的差分方程	
		(132)
§ 2.20	* 求解抛物型方程的 Pade 方法	(135)
§ 2.21	* 抛物型方程的三层格式	(146)
第三章	椭圆型方程的差分方法	(150)
§ 3.1	基本方法	(150)
§ 3.2	靠近曲线边界的内点上的差分格式	
		(156)
§ 3.3	边界节点上的差分格式	
		(162)
§ 3.4	三角形网的差分格式	
		(163)
§ 3.5	高精度的差分格式	
		(168)

§ 3.6	* 差分方程解的唯一性	(171)
§ 3.7	* 不规则网格的差分法	(176)
第四章	双曲型方程的差分方法	(187)
§ 4.1	一阶双曲型方程及特征线	(187)
§ 4.2	双曲型方程的特征线法	(190)
§ 4.3	一阶方程在矩形网格上差分方法	(193)
§ 4.4	一阶双曲型方程的 Courant—Friedrichs—Lewy (C. F. L) 条件	(196)
§ 4.5	一阶双曲型方程的 Wendroff 隐式格式	(197)
§ 4.6	利用特征线构造差分格式	(198)
§ 4.7	一阶双曲型方程的迎风格式	(200)
§ 4.8	* 在一阶双曲型方程中的间断传播	(201)
§ 4.9	* 一阶双曲型方程的 Pade 近似方法	(204)
§ 4.10	二阶拟线性双曲型方程	(207)
§ 4.11	二阶双曲型方程的显式差分格式和 Courant— Friedrichs—Lewy (C. F. L) 条件	(210)
§ 4.12	二阶双曲型方程的隐式格式	(213)
§ 4.13	* 梁的振动	(215)
§ 4.14	* 等价方程组的差分格式	(217)
附录习题及习题解答		(222)
习题一		(222)
习题二		(228)
习题三		(248)
习题四		(260)

第一章 常微分方程数值解

在自然科学的很多领域中,都会遇到常微分方程初值问题和边值问题,然而,只有少数十分简单的微分方程能够用初等方法求解,生产实际问题中所遇到的常微分方程往往具有相当复杂的形式有很多不能把它的解用解析表达式表示出来,或者即使能表示出来,它的表达式也往往非常复杂而不切实用,况且生产实际中提出的问题往往也只要在一定的精度范围内求出微分方程的解在某些点上的数值,并不一定要求出它的解析表达式。因此,就有研究常微分方程数值解的必要。

§ 1.1 Euler 折线法与改进的折线法

一阶常微分方程初值问题的一般提法是:求函数 $y=y(t)$, 使满足微分方程

$$\frac{dy}{dt}=f(t,y), \quad (1,1)$$

和初始条件 $y(t_0)=y_0$. (1,2)

数值解法就是求(1,1)(1,2)的解 $y=y(t)$ 在一系列点 $t_1=t_0+h, t_2=t_0+2h, \dots, t_n=t_0+nh$ 上的值 $y(t_1), y(t_2), \dots, y(t_n)$ 的近似值 $y_1, y_2, \dots, y_n$, 其中 h 叫做步长,一般取为常数,但在需要时也可以在计算过程中改变它的大小。

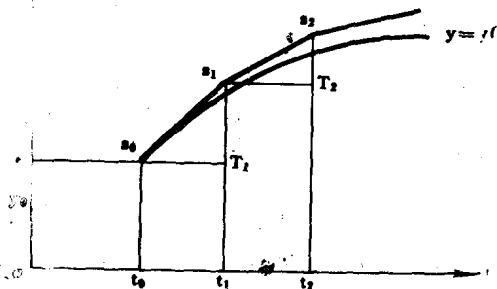


图 1.1

折线法又称 Euler 折线法是常微分方程数值解法中最简单的一个方法。这里我们先用图形来说明。图 1.1 中 S_0 表示点 (t_0, y_0) ，我们要求的是方程 (1.1) 的经过 S_0 点的解 $y = y(t)$ (由图中的曲线表示) 在 $t_1, t_2, \dots, t_n$ 各点上近似值。为了这个目的，我们作这个解在点 $S_0(t_0, y_0)$ 的切线 S_0S_1 (其斜率由 (1.1) 知为 $f(t_0, y_0)$)，它和直线 $t = t_1$ 交于点 S_1 ，把 S_1 的纵坐标

$$\overline{t_1 T_1} + \overline{T_1 S_1} = y_0 + hf(t_0, y_0)$$

作为 $y(t)$ 在 $t = t_1$ 点的值 $y(t_1)$ 的近似值 y_1 。这实际上就是在 $[t_0, t_0 + h]$ 这一小区间内近似地把曲线 $y = y(t)$ 视为通过点 S_0 ，斜率为 $f(t_0, y_0)$ 的直线 (即解 $y = y(t)$ 在 S_0 的切线)，于是 $y(t)$ 在 $t_1 = t_0 + h$ 点的近似值为

$$y_1 = y_0 + hf(t_0, y_0),$$

这样作出的点 $S_1(t_1, y_1)$ 一般不落在曲线 $y = y(t)$ 上，再由 $S_1(t_1,$

y_1) 出发, 作斜率为 $f(t_1, y_1)$ 出发, 作斜率为 $f(t_1, y_1)$ 的直线 S_1S_2 (这个斜率是通过 S_1 点的解在 S_1 点所必须具有的斜率), 它和直线 $t=t_2$ 交于 S_2 , 并以 S_2 的纵坐标

$$\overline{t_2 T_2} + \overline{T_2 S_2} = y_1 + hf(t_1, y_1)$$

作为 $y(t)$ 在 $t_2=t_1+h$ 点的近似值,

$$y_2 = y_1 + hf(t_1, y_1),$$

如此继续进行下去, 也就是说, 知道了 $y(t)$ 在 $t=t_1$ 的近似值 y_1 后, 可由

$$y_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i) \quad \dots (1, 3)$$

决定 $y(t)$ 在 t_{i+1} 点的近似值。

从图 1.1 上可以看出, 这样作的结果得出了一条折线 $S_0S_1S_2\dots$, 其顶点 $S_1, S_2, \dots$ 的纵坐标 $y_1, y_2, \dots$ 就取作解 $y(t)$ 在 $t_1, t_2, \dots$ 点上的近似值。也就是说, 我们以折线 $S_0S_1S_2\dots$ 来近似地代替初值问题 $(1, 1), (1, 2)$ 的解 $y=y(t)$ 所表示的曲线 (称为积分曲线)。同此, 这个方法被称为折线法。

另外, 从图上又可看出, 如果 $y(t)$ 的二阶导数值较大, 即曲线 $y=y(t)$ 的曲率较大或其斜率的变化较快, 则上述折线法的效果较差。因为此时在 $[t_i, t_i+h]$ 这一小段区间上折线的斜率 $f(t_i, y_i)$ 和此区间上曲线 $y=y(t)$ 的平均斜率

$$\frac{1}{h} \int_{t_i}^{t_i+h} f(t, y(t)) dt$$

之间的误差较大。为了克服这一缺点, 便产生了改进的折线法, 它是在此区间上用

$$\frac{1}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]$$

来代替曲线 $y=y(t)$ 的平均斜率。这样, 对于改进的折线法, 由 $y(t)$ 在 $t=t_i$ 点的近似值 y_i 来计算 $y(t)$ 在 $t_{i+1}=t_i+h$ 点的近似

值的公式为

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})]. \quad \cdots(1,4)$$

由此得到一系列近似点 (t_i, y_i) , $i=0, 1, 2, \dots$, 仍然构成一条折线, 不过其中平均斜率的近似值改进了, 因此称为改进的折线法。

格式(1,3)和(1,4)有一个很大的区别, 即格式(1,3)在知道了 y_i 后, 经过一次计算法可得到 y_{i+1} , 称这类格式为显式的; 而格式(1,4)由于右端的 $f(t_{i+1}, y_{i+1})$ 中含有未知值 y_{i+1} , 不可能由一次计算得到 y_{i+1} , 这类格式称为隐式的, 隐式格式(1,4)实质上是一个函数方程, 可用迭代法来求解, 即

$$y_{i+1}^{(k+1)} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(k)})], \quad k=0, 1, 2, \dots, \quad \cdots(1,5)$$

其中所需要的迭代初值, 可由显式格式(1,3)给出,

$$y_{i+1}^{(0)} = y_i + hf(t_i, y_i). \quad \cdots(1,6)$$

这个迭代当步长 h 选取足够小时通常是收敛的。

事实上, 设二元函数 $f(t, y)$, 对 y 满足 Lipschitz 条件: 存在常数 L , 使

$$|f(t, \bar{y}) - f(t, y)| \leq L |\bar{y} - y|$$

对所有的 $0 \leq t \leq T$ 及任何 $\bar{y}, y$ 均成立。于是有

$$\begin{aligned} |y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| &= \frac{h}{2} |f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(k)}) - f(t_{i+1}, y_{i+1}^{(k-1)})| \\ &\leq \frac{h}{2} L |y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}|, \end{aligned}$$

因此, 当选取 h 足够小, 使满足 $a = \frac{h}{2} L < 1$ 时, 从上述知, 当 $k \rightarrow \infty$ 时, 就有

$$|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| \leq a |y_{i+1}^{(k)} - y_{i+1}^{(k-1)}| \leq a^2 |y_{i+1}^{(k-1)} - y_{i+1}^{(k-2)}| \\ \leq \dots \leq a^k |y_{i+1}^{(1)} - y_{i+1}^{(0)}| \rightarrow 0,$$

于是迭代收敛。(注: $f(t, y)$ 具有连续偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$, 式中的 L 即是 $|\frac{\partial f}{\partial y}|$ 在所考察区域内的上界)

一般来讲, 选取的步长 h 总是足够小的, 使得经过不多的迭代次数后, 就使相邻两次的迭代值在所要求的精确度范围内相符, 即对事先规定的控制误差 ε , 满足

$$|y_{i+1}^{(k+1)} - y_{i+1}^{(k)}| \leq \varepsilon,$$

这时就可取 $y_{i+1} = y_{i+1}^{(k+1)}$, 然后改进折线法便可转入下一步的计算。

上面我们从几何直观导出了折线法, 下面我们再从分析的观点来考察, 从而可进一步理解常微分方程数值解法的概念, 并对进一步考察更有效的数值法得到启发。

为了求解常微分方程的初值问题

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y), \quad \dots (1, 1)$$

$$y(t_0) = y_0, \quad \dots (1, 2)$$

将方程(1, 1)的两端对 t 从 t_i 到 t_{i+1} 进行积分

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt, \quad \dots (1, 7)$$

其中 $y = y(t)$ 是以初值问题的解。所以在知道了 $y(t)$ 在 t_i 点上的值 $y(t_i)$ 后, 可得 $y(t)$ 在 $t_{i+1} = t_i + h$ 点上的值为

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + \int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt. \quad \dots (1, 8)$$

关键的问题就在于如何去计算上右端的积分, 微分方程数值解法的基本思想就是对上式右端的积分给出一种近似计算的

方法,用不同的近似公式去代替这个积分,就会对微分方程得到不同的数值解法。

例如,用矩形公式

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y(t_i)),$$

代替(1,8)式右端的积分,并且 $y(t_i)$ 的近似值 y_i 代替 $y(t_i)$, 所以得到 $y(t_{i+1})$ 的近似值为

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) f(t_i, y_i),$$

即

$$y_{i+1} = y_i + h f(t_i, y_i),$$

这就是上面所介绍的折线法的公式(1,3)。

又如用梯形公式

$$\int_{t_i}^{t_{i+1}} f(t, y(t)) dt \approx \frac{1}{2} (t_{i+1} - t_i) [f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))]$$

代替(1,8)式右端的积分,并将 $y(t_i), y(t_{i+1})$ 分别用它们的近似值 y_i, y_{i+1} 代替,我们就得到 $y(t_{i+1})$ 的近似值为

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, y_{i+1})],$$

这就是改进的折线法公式(1,4)。

由于用梯形公式计算积分,比用矩形公式要精确,因此,改进的折线法要来得精确。

但是,用改进的折线法进行计算,必须要用(1,5)式进行迭代,由于每迭代一次都要重新计算函数值,而迭代又要反复进行若干次,因此在 $f(t, y)$ 的计算较复杂时,往往费时较多。实用上较常用的方法是,在利用普通折线公式(1,6)算出预测值的基础上,用(1,5)式迭代一次进行校正后就转入下一步的计算,这就是所谓预估—校正法。这样,利用预估—校正法由

y_i 计算 y_{i+1} 的公式可写为

$$\text{预估: } \tilde{y}_{i+1} = y_i + hf(t_i, y_i),$$

$$\text{校正: } y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} [f(t_i, y_i) + f(t_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \quad \dots (1,9)$$

这时每一步只要计算两次 $f(t, y)$ 的数值, 而精度比折线法却有显著的提高。

若记

$$k_1 = hf(t_i, y_i),$$

$$k_2 = hf(t_i + h, y_i + k_1), \quad \dots (1,10)$$

预估—校正法的计算公式又可写为

$$y_{i+1} = y_i + \frac{1}{2}(k_1 + k_2). \quad \dots (1,11)$$

§ 1.2 Euler 折线法及改进折线法的误差分析

为了验证 Euler 折线法是否可以实际应用, 首先必须回答, 当步长 h 取得充分小时, 所求得的近似解 y_n 是否能够足够精确地逼近真解, 换言之, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 是否有 $y_n \rightarrow y(t_n)$, 这个问题称为收敛性问题, 除此之外, 还必须估计近似解与精确解之间的误差, 以便在实际计算中根据对精度的要求确定计算方案。

近似解的误差主要来源于两个方面, 首先是由于在原方程中的导数, 积分用数值公式替代而引起的, 这种近似代替所产生的误差, 称为局部截断误差(又称方程的截断误差), 由这个原因而导致的微分方程精确解与近似解之间的误差(即 $e_n = y(t_n) - y_n$)称整体截断误差(又称解的误差)。与此同时, 还必须注意在计算过程中产生的另一种误差——舍入误差, 这

种误差是由于在利用公式进行计算时,数值的舍入引起的,只有当最初产生的误差在以后计算中不会无限制的扩大时,这种方法才是适用的,或称对初始值有连续的依赖性。概括起来,前面的问题称为收敛性问题,后面的问题又称稳定性问题。这两者是密切相关的,只有当计算公式既收敛又稳定才可以用于实际计算。

现在转而讨论 Euler 法及改进 Euler 法的收敛性。

将(1,3)式中的 y_i 用 $y(t_i)$ 代替,即是 Euler 法的局部截断误差,

$$T_1 = y(t_{i+1}) - y(t_i) - hf(t_i, y(t_i)), \quad \cdots (1,12)$$

利用 Taylor 展开式

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hy'(t_i) + \frac{h^2}{2} y''(t_i) + O(h^3), \quad \cdots (1,13)$$

比较(1,12), (1,13)可得

$$T_1 = O(h^2) \quad \text{或} \quad |T_1| \leq Dh^2,$$

其中 D 为正常数。

类似(1,13)有

$$y(t_i) = y(t_{i+1}) - hy'(t_{i+1}) + \frac{h^2}{2} y''(t_{i+1}) + O(h^3), \quad \cdots (1,14)$$

把(1,13)式和(1,14)式相减并利用等式

$$y''(t_{i+1}) = y''(t_i) + O(h), \text{得到}$$

$$2y(t_{i+1}) - 2y(t_i) - h(y'(t_i) + y'(t_{i+1})) = O(h^3)。$$

由此,可得改进 Euler 折线法的截断误差:

$$\begin{aligned} T_2 &= y(t_{i+1}) - y(t_i) - \frac{h}{2}(f(t_i, y(t_i)) + f(t_{i+1}, y(t_{i+1}))) \\ &= O(h^3)。 \end{aligned} \quad \cdots (1,15)$$

所以 Euler 法的局部截断误差比改进 Euler 法要高一阶。

在局部截断误差分析的基础上,讨论 Euler 法的整体截断

误差,由(1,12)

$$y(t_{i+1}) = y(t_i) + hf(t_i, y(t_i)) + T_1,$$

减去(1,3)式,有

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_i + h[f(t_i, y(t_i)) - f(t_i, y_i)] + T_1$$

其中 $\varepsilon_i = y(t_i) - y_i$(1,16)

设 $f(t, y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件

$$|f(t, y_2) - f(t, y_1)| \leq L |y_2 - y_1|, \quad \dots(1,17)$$

且存在正常数 R 使 $|T_1| \leq R$, 从(1,16)推出

$$|\varepsilon_{i+1}| \leq (1 + hL) |\varepsilon_i| + R, \quad \dots(1,18)$$

对 $n = i+1, i, i-1, \dots$ 反复利用(1,18)导出

$$\begin{aligned} |\varepsilon_n| &\leq (1 + hL) |\varepsilon_{n-1}| + R \\ &\leq (1 + hL)^2 |\varepsilon_{n-2}| + R + (1 + hL)R \\ &\leq \dots \\ &\leq (1 + hL)^n |\varepsilon_0| + R \sum_{i=0}^{n-1} (1 + hL)^i \\ &\leq (1 + hL)^n |\varepsilon_0| + \frac{R}{hL} [(1 + hL)^n - 1], \\ n &= 1, 2, \dots \end{aligned}$$

如果 $t \leq T$, 从而 $t_n = t_0 + nh \leq T$, 于是, 由上式推出

$$(\text{利用 } (1 + hL)^{\frac{1}{hL}} < e)$$

$$|\varepsilon_n| \leq e^{L(t-t_0)} |\varepsilon_0| + \frac{R}{hL} (e^{L(t-t_0)} - 1), \quad \dots(1,19)$$
$$n = 1, 2, \dots$$

综上所述得到

定理 1.1 如果 $f(t, y)$ 关于 y 满足 Lipschitz 条件(1,17), 则 Euler 方法的整体截误差 ε_n 满足估计式(1,19), 式中 R 为局部截误差的上界。

(1,19)式表明 Euler 方法的整体截断误差是由初始值的误差 ε_0 与局部截断误差界 R 决定。对 Euler 法 $|T_1| \leq Dh^2$, 故 $R = Dh^2$ 。利用(1,19)式立即推出。

定理 1.2 设 $f(t, y)$, 在 $0 \leq t \leq T, -\infty < y < +\infty$ 上是连续的, 并且在区域上关于 y 满足 Lipschitz 条件, 且当 $h \rightarrow 0$ 时 $\varepsilon_0 \rightarrow 0$, 则 Euler 法(1,3)的解 y_i 一致收敛于(1,1)(1,2)的解 $y(t_i)$, 并有估计式(L 为 Lipschitz 常数)

$$|\varepsilon_n| \leq e^{L(\tau-t_0)} |\varepsilon_0| + \frac{Dh}{L} (e^{L(\tau-t_0)} - 1), \quad \dots (1,20)$$

如果 $\varepsilon_0 = 0$, 则由(1,20)式推出

$$|\varepsilon_n| = O(h).$$

即 Euler 方法的截断误差与 h 同阶。

注意, Euler 法的局部截断误差是 $O(h^2)$, 可是整体截断误差比局部截断误差低一阶。局部截断误差仅仅考虑了在一步内的误差, 而整体截断误差考虑到在所有计算步内误差的积累。

最后研究 Euler 法的稳定性。称 Euler 法(1,3)是稳定的, 如果存在常数 C 及 h_0 , 使对任意初始值 U_0, V_0 , (1,3)的相应解 U_n, V_n 满足估计式

$$|U_n - V_n| \leq C |U_0 - V_0|, \quad 0 < h < h_0 \quad t_n \leq T.$$

这里 U_n, V_n 分别是以 U_0, V_0 为初值的精确解, 即不考虑(1,3)式在计算中的舍入误差。因此上述稳定的意义是, 对于任何 $0 < h < h_0$, (1,3)的精确解连续地依赖于初值。

定理 1.3 在定理 1.1 的条件下, Euler 方法是稳定的。

证明:

$$U_{n+1} = U_n + hf(t_n, U_n),$$