

$(x) \leq 1$,

(a) 試證存在一函數 f 及序列 $\{f_n\}$, 使得對所有 $x \in R^1$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x).$$

[這樣一個逐點收斂部份列之存在, 通常稱為 Helly 選擇定理(Helly's selection theorem.)]

(b) 此外, 若 f 是連續, 試證在 R^1 上 $f_{n_k} \rightarrow f$ 均勻地。

提示: (i) 某個部份列 $\{f_{n_k}\}$ 在所有有理點 r 上收斂到, 譬如說, $f(r)$ 。(ii) 對任意 $x \in R^1$, 定義 $f(x)$ 為 $\sup f(r)$, 這 $\sup$ 是對所有 $x \leq r$ 來取的。(iii) 證明在所有 f 的連續點 x 上, $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ (這就是充分用到單調性的地方。)(iv) 有一 $\{f_{n_i}\}$ 的部份列在每個 f 不連續的點上, 都收斂, 蓋這類點最多是可數。這就證明了 (a)。要證明 (b), 將你對 (iii) 的證明適當地修飾一下。

令 f 為 R^1 上的連續實值函數, 具有下列性質: 對每個 $t, 0 \leq f(t) \leq 1, f(t+2) = f(t)$ 且

$$f(t) = \begin{cases} 0 & (0 \leq t \leq \frac{1}{3}) \\ 1 & (\frac{2}{3} \leq t \leq 1) \end{cases}$$

取 $\Phi(t) = (x(t), y(t))$, 其中

$$x(t) = \sum 2^{-n} f(3^{2n-1}t), \quad y(t) = \sum 2^{-n} f(3^{2n}t).$$

試證 Φ 是連續, 且 Φ 將 $I = [0, 1]$ 映成單位正方形 $I^2 \subset R^2$ 。事實上, 證明 Φ 將 Cantor 集合映成 I^2 。

提示: 每個 $(x_0, y_0) \in I^2$ 都具有這種型式。

$$x_0 = \sum 2^{-n} a_{2n-1}, \quad y_0 = \sum 2^{-n} a_{2n}.$$

其中的每個 a_i 都是 0 或 1。若

$$t_0 = \sum_{i=1}^{\infty} 3^{-i-1} (2a_i)$$

試證 $f(3^k t) = a_k$, 而因此得出 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$ 。

(這個簡單的例是所謂的「填滿空間的曲線」(Space-filling curve), 歸功於 I. J. Schoenberg, Bull. A. M. S., Vol. 44, 1938, pp. 519.)

• 假設 f 是 R^1 上的實值連續函數, 當 $n=1, 2, 3, \dots, f_n(t) = f(nt)$, 且 $\{f_n\}$ 在 $[0, 1]$ 上是等連續。你能推出有關 f 的什麼結論來呢?

• 假設 $\{f_n\}$ 是緊緻集合 K 上函數的等連續序列, 且 $\{f_n\}$ 在 K 上是點態收斂。試證 $\{f_n\}$ 在 K 上是均勻收斂。

• 試對映至任意度量空間的映射, 定義均勻收斂及等連續的觀念。並證明定理 7.9 及 7.12 對映至任意度量空間的映射皆成立, 定理 7.8 及 7.11 對映至任意完備度量空間的映射皆成立, 定理 7.10, 7.16, 7.17, 7.24 及 7.25 對向量值函數, 即映至任意 R^k 的映射, 皆成立。

• 令 $\{f_n\}$ 是均勻有界函數序列。在 $[a, b]$ 上, 它們都是 Riemann 可積,

分析學探原

施克剛 · 譯

分析學探原

68. 12. 0382

中華民國六十八年十二月初版

定價：新臺幣三〇〇元

保有版權・翻印必究

著 者 Walter Rudin

譯 者 施 克 剛

發行人 王 必 成

出版者 聯經出版事業公司

臺北市忠孝東路四段 555 號

電 話：7683708・7074151

郵政劃撥帳戶第 100559 號

行政院新聞局出版事業登記證局版臺業字第 0130 號

• 31003 •

作者序言

本書是打算作為研習數學的優秀大學生，或一年級研究生選修分析學課程的教科書。

新版基本上仍包含與第二版相同的論題，有些增加，也略有減少，另有相當程度的次序變動。我希望這些變動，會使得這些材料對修習這類課程的學生來說，更容易接受，也引人入勝。

經驗告訴我，由從有理數建極實數來開始，（儘管邏輯上是正確的，）在教學上却並不好。在剛開始，大多數學生簡直不知道為什麼要這麼做。因此，我將實數系當作一個具有最小上界性質的有序體來介紹，並立即說明一些有趣的應用。

不過，Dedekind 的建構方法並沒有略去。它現在是第一章的附錄，在時機成熟時可加以研究及咀嚼。

討論多變數函數的材料，幾乎全部改寫，加入了許多細節，更多的例題，以及引導動機的介紹。反函數定理——第九章的關鍵論題——的證明，利用有關收縮映射（Contraction Mapping）的定點定理，已予以簡化。微分型式也討論得更詳盡。還包含了一些 Stokes 定理的應用。

至於其它的變動有，討論 Riemann-Stieljes 積分的一章，有點裁剪，第八章加入了短短的 Gamma 函數論自修式的一節，另外還有大量新的習題，大多數都有相當詳細的提示。

我也加入了一些出現在美國數學月刊 (American Mathematical Monthly) 及數學雜誌 (Mathematics Magazine) 中的參考論文，意欲養成學生查閱雜誌文獻的習慣。這大多數文獻都是由 B. Burckel 好心提供的。

幾年來，承許多人，有學生也有老師，寄給我一些改正，批評，以及有關本書前版的其它意見。我衷心感激，並藉此機會對所有寫信給我的人，表達我誠摯的謝意。

Walter Rudin

譯者序言

這是一本分析學的名著，自 1964 年第二版發行以來，就廣為數學界所推崇。1976 年改訂新版，譯者斗膽逐譯，期為科學中文化盡一分力耳。

全書共費時一年餘，施思明博士的啓發，鼓勵及協助，使譯者獲益良多，謹將此書譯獻給他，聊表敬意。

書中譯名，專有名詞參考正中書局部頒「數學名詞」一書（民國六十年九月），兼採楊維哲先生及賴漢卿先生兩位前輩的譯名，行文儘量口語化，但仍有力不從心之處，這是譯者功力太淺之故，望各方賢達不吝指正。

個人以為，科學中文化是提高國內科技水平必行之道，實不容再做意氣之爭。學有專長的學者，請儘量以中文著述，（楊維哲先生及賴漢卿先生最應受到崇敬！）學問稍淺無力著述如我等，則請擇世界各國名著，費心逐譯，盡一分科學知識份子的責任，庶幾中華民國之科學水平可逐漸趕上先進國家。

玲於照顧小多多的之餘，替我整理索引，實非一個「愛」字可以表達，小多多的嬌憨，也為翻譯時的愁悶，平添一分歡笑，且記下留念。

施克剛 六十八年十二月一日

目錄

作者序言

譯者序言

第一章 實數系與複數系

導論	1
有序集合	3
體	6
實數體	10
擴充了的實數系	13
複數體	14
歐氏空間	18
附錄	19
習題	25

第二章 基本拓撲學

有限，可數，及不可數集合	29
度量空間	37
緊緻集合	44
完集	49
連結集合	51
習題	52

第三章 數列及級數

收斂序列·····	57
部份序列·····	61
Cauchy 序列·····	63
上極限與下極限·····	66
一些特殊序列·····	68
級數·····	70
非負項級數·····	72
e 這個數·····	75
根式及比值試斂法·····	78
冪級數·····	81
部份作和·····	82
絕對收斂·····	84
級數的加法和乘法·····	85
重組·····	89
習題·····	92

第四章 連續性

函數的極限·····	99
連續函數·····	102

連續性與緊緻性	105
連續性與連結性	110
不連續點	111
單調函數	113
無窮極限及在無窮遠的極限	115
習題	116

第五章 微分學

實質函數的導數	121
均值定理	125
導數的連續性	127
L'Hospital 法則	127
高階導數	129
Taylor's 定理	129
向量值函數的微分	130
習題	133

第六章 Riemann-Stieltjes 積分

積分定義及存在性	141
積分的性質	150
積分與微分	156

向量值函數的積分·····	158
可度量曲線·····	160
習題·····	162
第七章 函數序列及級數	
主要問題的研討·····	167
均勻收斂·····	171
均勻收斂與連續性·····	173
均勻收斂與積分·····	176
均勻收斂與微分·····	177
函數的等連續族·····	180
Stone-Weierstrass 定理·····	185
習題·····	192
第八章 一些特殊函數	
冪級數·····	199
指數與對數函數·····	206
三角函數·····	210
複數域的代數完備性·····	213
富氏級數·····	214
Gamma 函數·····	222

習題.....	227
第九章 多變數函數論	
線性變換.....	235
微分學.....	244
收縮原理.....	254
反函數定理.....	255
隱函數定理.....	258
秩階定理.....	263
行列式.....	268
高階導數.....	272
積分的微分.....	273
習題.....	276
第十章 微分型式之積分	
積分學.....	283
素朴映射.....	286
單位分割.....	289
變數變換.....	290
微分型式.....	292
單體與鏈.....	307

Stokes 定理.....	315
封閉型式與正合型式.....	318
向量分析.....	324
習題.....	333

第十一章 Lebesgue 理論

集合函數.....	345
Lebesgue 測度的建構	348
測度空間.....	356
可測函數.....	357
單葉函數.....	360
積分學.....	361
與 Riemann 積分之比較	370
複值函數的積分.....	373
$\mathcal{L}^2$ 類的函數.....	374
習題.....	381
參考書目.....	385
特殊符號一覽表.....	387
索引.....	389

第一章

實數系與複數系

導論

要對分析學中的主要觀念（如：收斂、連續、微分和積分），有個令人滿意的討論，就必須奠基於精確定義的數的概念上。不過，我們將不深入討論那些支配整數運算的公設，而假設對有理數（即，具有 m/n 這種型式的數，其中 m 和 n 是整數，且 $n \neq 0$ ）很熟悉。

做為一個體（field）或是有序集合（ordered set）兩者，有理數系在許多應用上都是不適足的。（這兩個名詞會定義在 1.6 節及 1.12 節中。）例如，就沒有一個有理數會使 $p^2 = 2$ （我們馬上就要證明這件事）。這就導致了所謂「無理數」的引入，它們通常是寫成無窮小數的展開式，而想成是被對應的有限小數所「逼近」（approximate）。因此，序列

$$1, 1.4, 1.414, 1.4142, \dots$$

「趨於 $\sqrt{2}$ 」，但除非這無理數已有明確的定義，否則一定會引起這個問題：我們上面這個序列到底是「趨向」什麼？

一旦所謂「實數系」建構完了，這一類的問題就有答案了。

1.1 例子 我們先證明方程式

$$(1) \quad p^2 = 2$$

不能被任何有理數 p 滿足。因為，若 (1) 滿足了，則我們可以令 $p = m/n$ ，其中 m 及 n 都是整數，同時我們還可以選擇 m 及 n 使它們不全是偶數。我們假設這已經做好了。則 (1) 蘊涵了

$$(2) \quad m^2 = 2n^2.$$

這顯示了 m^2 是個偶數。所以 m 是偶數（如果 m 為奇數， m^2 就會是奇數），因而 m^2 可以被 4 整除。於是 (2) 的右邊可以被 4 整除，所以 n^2 為偶數，這又蘊涵了 n 為偶數。

因此 (1) 成立的假設，導致 m 及 n 皆為偶數的結論，與我們對 m 及 n 的選擇相違反。所以 (1) 對有理數 p 是不可能的。

我們現在把這情況研究得更仔細一點。令 A 為所有正有理數 p 而 $p^2 < 2$ 的集合，令 B 包含所有正有理數 p 而 $p^2 > 2$ 。我們將證明 A 不包含最大數，而 B 不包含最小數。

更明白點說，對每個 A 中的 p ，我們可以在 A 中找到一個有理數 q ，使得 $p < q$ ；而對每個 B 中的 p ，我們可以在 B 中找到一個有理數 q ，使得 $q < p$ 。

要證這個，我們對每個有理數 $p > 0$ ，給它一個數

$$(3) \quad q = p - \frac{p^2 - 2}{p + 2} = \frac{2p + 2}{p + 2}$$

則

$$(4) \quad q^2 - 2 = \frac{2(p^2 - 2)}{(p + 2)^2}.$$

若 p 在 A 中，則 $p^2 - 2 < 0$ (3) 顯示 $q > p$ ，而 (4) 顯示 $q^2 > 2$ 。因此 q 在 A 中。

↓ 若 p 在 B 中，則 $p^2 - 2 > 0$ ，(3) 顯示 $0 < q < p$ ，而 (4)

$q^2 < 2$.

顯示 $q^2 > 2$ ，因此 q 在 B 中。

1.2 備註 以上討論的目的，就是要證明有理數系中，有某種缺口，儘管每兩個有理數之間必有另一有理數：若 $r < s$ ，則 $r < (r+s)/2 < s$ 。實數系就填補了這些缺口。這就是它在分析學中扮演基本角色的最主要的理由。

爲了要說明其結構，以及複數系的結構，我們先對有序集 (ordered set) 和體 (field) 的一般概念作簡短的討論。

這裏是我們整本書中，都會用到的一些標準的集合論的術語。

1.3 定義 如果 A 是任何集合(它的元素可能是數或任何其它事物)，我們用 $x \in A$ 表示 x 是 A 的一個成員(或元素)。

若 x 不是 A 的成員，我們寫作： $x \notin A$

不包含任何元素的集合是叫做空集合 (empty set)。如果一集合至少包含一個元素，則叫做非空 (non-empty)。

如果 A 和 B 是集合，且若 A 的每個元素都是 B 的元素，則我們說 A 是 B 的子集合，並寫成 $A \subset B$ ，或 $B \supset A$ 。此外，如果 B 中有一元素不在 A 中，則稱 A 是 B 的真子集 (proper subset)。注意，對每個集合 A ， $A \subset A$

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，我們寫做 $A = B$ 。否則就是 $A \neq B$

1.4 定義 整個第一章中，所有有理數的集合是記做 Q 。

有序集合

1.5 定義 令 S 爲一集合， S 上的次序 (order) 是一種關係，記做 $<$ ，具有下列兩種性質：

(i) 如果 $x \in S$ 且 $y \in S$ ，則

$$x < y, \quad x = y, \quad y < x$$

三敘述中，有且僅有一個爲真。

(ii) 若 $x, y, z \in S$ ， $x < y$ 且 $y < z$ ，則 $x < z$

“ $x < y$ ”這敘述，可以唸成「 x 小於 y 」或「 x 比 y 小」或是「 x 在 y 之前。」

常常，以 $y > x$ 代替 $x < y$ 會方便點。

$x \leq y$ 這符號是表示 $x < y$ 或 $x = y$ ，不特別指明是兩種之一何者成立。換言之， $x \leq y$ 是 $x > y$ 的否定。

1.6 定義 有序集合是說，一集合 S ，其中定義了有一種次序。

例如，如果 $r < s$ 是定義說 $s - r$ 是個正有理數的話，則 Q 就是有序集。

1.7 定義 假設 S 是個有序集，且 $E \subset S$ 。如果存在 $\beta \in S$ ，而對所有 $x \in E$ ， $x \leq \beta$ ，則我們說 E 是在上有界（bounded above），並稱 β 是 E 的一個上界（upper bound）。

下界也可以同法定義（以 $\geq$ 取代 $\leq$ ）。

1.8 定義 假設 S 是個有序集，而 $E \subset S$ ， E 是在上有界。假設存在 $\alpha \in S$ ，具有以下性質：

(i) α 是 E 的一個上界。

(ii) 如果 $r < \alpha$ ，則 r 不是 E 的上界。

則 α 叫做 E 的最小上界（least upper bound）〔由(ii)很明顯知道，最多只有一個這樣的 α 〕，或 E 的 supremum，我們寫成

$$\alpha = \sup E.$$

一個在下有界的集合 E ，其最大下界（greatest lower bound），或 infimum，是以同樣方式來定義：所謂

$$\alpha = \inf E$$

意思是， α 是 E 的一個下界，而沒有任何 β ， $\beta > \alpha$ ，會是 E 的下界。

1.9 例子

(a) 將例 1.1 的集合 A 和 B ，想成是有序集合 Q 的子集。集

合 A 是在上有界。事實上， A 的上界正好是 B 中的元素。由於 B 沒有最小元素，故 A 在 Q 中沒有最小上界。

同樣的， B 在下有界： B 的所有下界的集合，包含了 A 及所有 $r \in Q$ 而 $r \leq 0$ 者。由於 A 沒有最大元素，故 B 在 Q 中沒有最大下界。

(b) 若 $\alpha = \sup E$ 存在，則 α 可以是也可以不是 E 中的元素。例如，令 E_1 為所有 $r \in Q$ 而 $r < 0$ 的集合。 E_2 為所有 $r \in Q$ 而 $r \leq 0$ 的集合。則

$$\sup E_1 = \sup E_2 = 0$$

而 $0 \notin E_1, 0 \in E_2$

(c) 令 E 包含所有 $1/n, n=1, 2, 3, \dots$ ，這些數。則 $\sup E = 1$ ，它屬於 E ，而 $\inf E = 0$ ，它不屬於 E 。

1.10 定義 一有序集合 S ，我們說它具有最小上界性質，如果下述為真的話：

若 $E \subset S$ ， E 是非空，而 E 是在上有界，則 $\sup E$ 存在於

S 中。

例 1.9 (a) 顯示， Q 並不具有最小上界性質。

我們現在要證明最大下界與最小上界之間，有密切的關係，而每個具有最小上界性質的有序集合，也具有最大下界性質。

1.11 定理 假設 S 是有序集，具有最小上界性質， $B \subset S$ ， B 為非空，且 B 在下有界。令 L 為所有 B 之下界所成的集合。則

$$\alpha = \sup L$$

存在於 S 中，且 $\alpha = \inf B$

特別是， $\inf B$ 存在於 S 中。

證明： 由於 B 在下有界，故 L 為非空。又因為 L 恰包含那些 $y \in S$ ，並對所有 $x \in B$ ，滿足 $y \leq x$ 這不等式，故我們知道，每個 $x \in B$ ，都是 L 的上界。因此 L 在上有界。我們對 S 的假

設，因而蘊涵了 L 在 S 中有最小上界；叫它做 α 。

若 $r < \alpha$ ，則（見定義 1.8） r 不是 L 的上界，因此 $r \notin B$ ，於是對每個 $x \in B$ ， $\alpha \leq x$ 。所以 $\alpha \in L$ 。

若 $\alpha < \beta$ ，則 $\beta \notin L$ ，蓋因 α 是 L 的上界。

我們已證明了，若 $\beta > \alpha$ ，則 $\alpha \in L$ 但 $\beta \notin L$ 。換言之， α 是 B 的下界，而若 $\beta > \alpha$ ， β 就不是了。這意思就是說 $\alpha = \inf B$ 。

體

1.12 定義 一個體（field）是個集合 F ，具有兩個運算，稱做加法和乘法，它們滿足以下所謂的「體的公設」(A)，(M) 及 (D)

(A) 加法公設

(A1) 若 $x \in F$ 且 $y \in F$ ，則其和 $x + y$ 亦屬於 F 。

(A2) 加法是可交換的： $x + y = y + x$ ，當所有 $x, y \in F$ 。

(A3) 加法是可結合的：對所有 $x, y, z \in F$ ， $(x + y) + z = x + (y + z)$

(A4) F 包含元素 0，使得對所有 $x \in F$ ， $0 + x = x$ 。

(A5) 對每個 $x \in F$ ，必對應一元素 $-x \in F$ ，使得

$$x + (-x) = 0$$

(M) 乘法公設

(M1) 若 $x \in F$ 且 $y \in F$ ，則其乘積 $xy \in F$

(M2) 乘法是可交換的：對所有 $x, y \in F$ ， $xy = yx$ 。

(M3) 乘法是可結合的：對所有 $x, y, z \in F$ ， $(xy)z = x(yz)$

(M4) F 包含元素 $1 \neq 0$ ，使得對每個 $x \in F$ ， $1x = x$

(M5) 若 $x \in F$ 且 $x \neq 0$ ，則存在一元素 $1/x$ ，使得

$$x \cdot (1/x) = 1.$$

(D) 分配律