数学培优竞赛
新帮手
SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

黄东坡 著

数学培优竞赛新帮手

SHUXUE
PEIYOUJINGSAI
XINBANGSHOU

初一年级

- 培养创造精神
- 培养创革意识
- 培养创新能力
- 反映新的大纲精神
- 探索新的解题方法
- 追求新的写作形式

湖北辞书出版社

数学培优竞赛

新帮手

SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

黄东坡　著

数学培优竞赛

SHUXUE PEIYOUJINGSAI XINBANGSHOU

新帮手

初一年级

湖北辞书出版社

（鄂）新登字 07 号

数学培优竞赛新帮手(初一年级)

编　　著：©黄东坡
责任编辑：丁　渝
封面设计：刘福珊
出版发行：湖北辞书出版社(武汉市黄鹂路 75 号　430077)
印　　刷：湖北科学技术出版社黄冈印刷厂
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16
插　　页：1
印　　张：12.625
版　　次：2001 年 1 月第 1 版
印　　次：2003 年 9 月第 10 次印刷
字　　数：150 千字
印　　数：88 001—93 000 册
定　　价：14.00 元
ISBN 7-5403-0373-5/G·140

序

黄东坡，这是一个我们大家都非常熟悉的名字．我们熟悉他，并不是他的“特殊职位”，也不是他的“荣誉称号”，这些身外之物，他都没有．但他有另外两样东西，一是培优经验，二是他写的书．也许，这也是身外之物，但足以证明了他的价值．在水果湖——这个我省政治、文化中心，人们都争相把孩子送到他的门下，他所任的班通常被称为“实验班”或者“杯班”，这种班的学生都有一种在数学竞赛中展现才能的愿望，也只有高素质的教师才能满足这批学生的需要．正因为如此，他写的书才有一种真实性——培优过程的真实，材料运用的真实，训练方法的真实和学生发展的真实．1995 年，他的第一本书《初中数学一题多解》（湖北教育出版社）出版，以后又相继出版了《初中数学解题讲座》（湖北辞书出版社）和《数学中考综合题解题讲座》（湖北辞书出版社）等，这些，都真实地反映了一个耕耘者为启迪学生心智、探索培优方案所作出的努力．在我的书架上，就有上述三本书．这，既是我女儿初中学习的纪念，也是我从事教学活动的参考，今天，又成了我乐意为新作写序的原因．

还有一个原因，就是我对作者治学精神的钦佩．一般说来，当一个人写了几本有影响的书，赢得了众多读者，往往就会被一群人拥为“主编”，当“主编”的好处是不能向外人道的．黄东坡的书足以奠定了他享有“主编”之尊的地位，但他没有这样做，甘愿在艰辛的道路上跋涉．这样，才有了今天的力作《数学培优竞赛新帮手》．这套书在保持真实性风格的同时集中表现了创新的特色，其中包括内容的创新，解题方法的创新和写作方式的创新．全书的每一课，都提供了阅读材料，每一道例题都提供了解题思路．作者希望学生思考的地方，都留下了空白，作者对数学的体验、见解和感悟，都可见诸于旁批．这种作者与读者通过对话达到心灵沟通的形式，也许是作者的首创．近年来的课堂教学中，我们特别强调学生参与的原则，今天，这一原则终于被作者迁移到了著书立说领域．看来，一个教书，一个写书，原来是一回事．

诚然，任何一本书，都很难适合每一个人的口味．比如，对数学爱好者而言，只要适当点拨就够了，他们需要一个思考的空间，但对另一些读者，可能会要求作者同时提供一个详尽解答．对作者的方案，我是赞成的，因为这一方案可以用建构主义的观点来解释．至于效果，我们现在只能说它在水果湖中学这一实验基地是成功的．推广后的情况如何？那就得等待读者诸君用实践来回答了．

裴光亚

2000 年 12 月于汉口杨汉湖

新世纪　新思考　新探索

——写在前面

当本套书出版的时候，我们已跨入新的21世纪，新世纪充满着新的机遇与挑战，也孕育着新的思想与新的观念.

在世纪之交的关键时期，数学教育思想与观念、教育方法与手段已发生巨大而深刻的变化.培养学生创造精神、创新意识，注重学生探索能力、实践能力的提高，成为新世纪数学教育的主题.

本套书的编著宗旨为“立足培优，面向竞赛”，为此，将初中数学剖分组织为84个专题讲座形式，配合教学进度，顺应学习过程，为教师提供一种崭新的指导思路，为学生提供一种科学的训练方法，在编著过程中，力求突出以下几点：

1. 反映新的大纲精神

本套书以义务教育阶段《国家数学课程标准》为背景，以最新修订后的《初中数学教学大纲》、《初中数学竞赛大纲》为指南，力图反映新的大纲精神，即：培养学生的科学精神和创新思维习惯，激发学生独立思考和创新意识.

2. 探索新的解题方法

本套书以近年全国各地中考试题、全国各级数学竞赛试题为编选范围，以启发性、新颖性和导向性为原则，收集了从1997~2000年全国各地中考、各级竞赛中的典型问题，集中反映新中考新竞赛的新特点，如：由知识立意转向能力立意，在知识的交会点上命题，强调应用意识的培养，倡导问题的开放性、探索性，等等.

3. 追求新的写作形式

本套书运用“开窗式”写作方法，例题只给出提示性的解题思路，留给学生充分的思维空间、思考时间和解答空隙，疑难之处或需升华之处均以旁批的形式提醒读者，其内容包含“数学历史、数学最新进展、解题技巧、数学思想方法、问题推广与引申”等丰富知识，旨在营造一种数学文化氛围，让读者在有限的篇幅内获得数学文化的熏陶和创造机智的启蒙.

愿本套书成为你学习中的“好帮手”.

多年来，武汉市教研室裴光亚先生给予我悉心的关怀、鼓励与帮助，又在百忙中为本书作序，在此表示诚挚的谢意；感谢本书重印时，陈迪春、龙艳、朱洁华、黄泽群、孙银枝给予的帮助.

黄东坡

二〇〇二年二月

于湖北省水果湖第二中学

目　　录

知识篇

1. 质数与合数……(1)
2. 数的整除性……(5)
3. 话说字母表示数……(10)
4. 绝对值……(15)
5. 数形结合谈数轴……(20)
6. 有理数的计算……(25)
7. 整式的加减……(31)
8. 方程的解与解方程……(36)
9. 含绝对值符号的一次方程……(41)
10. 多变的行程问题……(46)
11. 设元的技巧……(51)
12. 一次方程组……(56)
13. 一次方程组的应用……(62)
14. 不等式（组）……(68)
15. 不等式（组）的应用……(73)
16. 乘法公式……(79)
17. 简单的不定方程、方程组……(84)
18. 最大与最小……(89)
19. 市场经济问题……(94)
20. 新概念命题……(99)
21. 直线、射线与线段……(104)
22. 与角相关的问题……(109)
23. 相交线与平行线……(114)

24. 图形面积的计算 …………………………………………………… (120)

方法篇

25. 奇偶分析 …………………………………………………… (126)
26. 借助图形思考 …………………………………………………… (130)
27. 整体思想 …………………………………………………… (135)
28. 归纳与猜想 …………………………………………………… (139)

1 质数与合数

阅读与思考

一个大于1的自然数如果只能被1和本身整除，就叫做质数（也叫素数）如果能被1和本身以外的自然数整除，就叫做合数，自然数1既不是质数也不是合数，叫做单位数，于是自然数可以分为三类：质数、合数和单位数.

关于质数、合数有下列重要性质：

1. 质数有无穷多个，最小的质数是2，但不存在最大的质数，最小的合数是4；

2. 在所有质数中，只有2这个偶数，其余均为奇数；

3. 算术基本定理：任意一个大于1的整数N能唯一地分解成K个质因数的乘积（不考虑质因数之间的顺序关系）：

$N=P_1^{\alpha_1}P_2^{\alpha_2}\cdots P_k^{\alpha_k}$，这里 P_1、$P_2\cdots$，P_K 为不同的质数，α_1、α_2，$\cdots\alpha_k$ 为自然数.

定理说明，如果不计质因数的次序，只有一种方法可以把一个合数分解成质因数的连乘积.

自然数的奥秘源于素数，如同化学中的元素是构成一切物质的基本单元一样，"单细胞"的素数是生产一切数的原料，几千年来，历代数学家都有一个梦想，期盼找到一个数学公式，把全部素数都表示出来.

十七世纪费马希望 $2^{2^n}+1$，$n=0, 1, 2, 3, \cdots$ 都是素数，但当 $n=5$ 时，$2^{32}+1$ 就不是素数；

十八世纪，欧拉发现了当时最大的素数 $2^{31}-1$；

二十世纪末，人类借助超级计算机，发现了最大的素数 $2^{859433}-1$.

例题与求解

例1 已知p、q均为质数，并且存在两个正整数m，n使得 $p=m+n$，$q=m\times n$，则 $\dfrac{p^p+q^q}{m^n+n^m}$ 的值为________.

（"希望杯"邀请赛试题）

解题思路 运用质数定义，推出m、n、p、q的值.

例2 若p为质数，p^3+5 仍为质数，则 p^5+7 为（　　）.

（1998年湖北省黄冈市竞赛题）

（A）质数　　（B）可为质数也可为合数

（C）合数　　（D）既不是质数也不是合数

解题思路 从简单情形入手，实验、归纳与猜想.

例 3 求这样的质数，当它加上 10 和 14 时，仍为质数.

（上海市竞赛题）

解题思路 由于质数的分布不规则，不妨从最小的质数开始进行实验.

实验只是探索解题思路的一种手段，不能代替证明，要证明一个正整数是不是质数，其基本原则就是设法指出它的一个异于 1 及自身的正约数，因数分解是最基本的方法.

例 4 有人说："任何七个连续整数中一定有质数"请你举一个例子，说明这句话是错的.

（"华罗庚金杯赛"邀请赛试题）

解题思路 直接试验，加以反驳，或考虑更一般的结论，予以论证.

可以找到任意多个连续的合数.

本例表明相邻的两个质数，它们之间的距离可以任意地大.

例 5 41 名运动员所穿运动衣号码是 1，2，…40，41 这 41 个自然数，问：

(1) 能否使这 41 名运动员站成一排，使得任意两个相邻运动员的号码之和是质数？

(2) 能否让这 41 名运动员站成一圈，使得任意两个相邻运动员的号码之和都是质数？

若能办到，请举一例；若不能办到，请说明理由.

（北京市竞赛题）

解题思路 要使相邻两数的和都是质数，显然它们只能都是奇数，运用奇偶数性质分析.

两数互质是指两数无 1 以外的公约数，不可与质数混淆.

能力训练

A　级

1. 某个质数，当它分别加上 6，8，12，14 后还是质数，那么这个质数是________.

2. 在1，2，3，…n 这 n 个自然数中，已知共有 p 个质数，q 个合数，k 个奇数，m 个偶数，则$(q-m)+(p-k)=$________.

3. 设 a，b 为自然数，满足 $1176a=b^3$，则 a 的最小值为________.

（"希望杯"邀请赛试题）

4. 已知 p 是质数，并且 p^6+3 也是质数，则 $p^{11}-48$ 的值为________.

（北京市竞赛题）

5. 任意调换12345各数位上数字的位置，所得的五位数中质数的个数是（　　）.

(A) 4　　(B) 8　　(C) 12　　(D) 0

6. 所有形如$\overline{abcabc}$的六位数（a，b，c 分别是 0~9 这 10 个数之一，可以相同且 $a\neq0$）的最大公约数是（　　）.

(A) 1001　　(B) 101　　(C) 13　　(D) 11

7. 当整数 $n>1$ 时，形如 n^4+4 的数是（　　）.

(A) 质数　　(B) 合数

(C) 合数且为偶数　　(D) 完全平方数

8. 不超过100的所有质数的乘积减去不超过 60 且个位数字为 7 的所有质数的乘积所得之差的个位数字是（　　）.

（第十届"希望杯"邀请赛试题）

(A) 3　　(B) 1　　(C) 7　　(D) 9

9. 是否存在两个质数，它们的和等于数$\underbrace{11\cdots11}_{20个1}$？若存在，请举一例；若不存在，说明理由.

10. 写出十个连续的自然数，使得个个都是合数.

（上海市竞赛题）

11. 在黑板上写出下面的数2，3，4，…1994，甲先擦去其中的一个数，然后乙再擦去一个数，如此轮流下去，若最后剩下的两个数互质，则甲胜；若最后剩下的两个数不互质，则乙胜，你如果想胜，应当选甲还是选乙？说明理由.

（五城市联赛题）

B　级

1. 若质数 m，n 满足 $5m+7n=129$，则 $m+n$ 的值为________.

2. n不是质数，n可以分解为2个或多于2个质因数的积，每个质因数都大于10，n最小值等于________.

（"五羊杯"竞赛题）

3. 若a、b、c是1998的三个不同的质因数，且$a<b<c$，则$(b+c)^a=$________.

（第十届"希望杯"邀请赛试题）

4. 由超级计算机运算得到的结果$2^{859433}-1$是一个质数，则$2^{859433}+1$是________数.（填"质"或"合"）

5. 已知自然数m、n满足$1^2+9^2+9^2+2^2+m^2=n^2$，则$n=$____.

（上海市竞赛题）

6. 机器人对自然数从1开始由小到大按如下的规则进行染色：凡能表示为两个合数之和的自然数都染成红色，不合上述要求的自然数都染成黄色，若被染成红色的数由小到大数下去，则第1992个数是________.

（北京市"迎春杯"竞赛题）

7. 若三个不同的质数a，b，c满足$ab^bc+a=2000$，则$a+b+c=$________.

8. 三个质数a、b、c的乘积等于这三个质数之和的5倍，求$a^2+b^2+c^2$值.

9. 请同时取六个互异的自然数，使它们同时满足：

(1) 6个数中任意两个都互质；

(2) 6个数任取2个、3个、4个、5个、6个数之和都是合数，并简述选择的数合乎条件的理由.

10. 已知正整数p、q都是质数，并且$7p+q$与$pq+11$也都是质数，试求p^q+q^p的值.

（1997年湖北省荆州市竞赛题）

2 数的整除性

阅读与思考

设 a、b 是整数，$b\neq 0$，如果一个整数 q，使得 $a=bq$，那么称 a 能被 b 整除，或称 b 整除 a，记作 $b|a$，又称 b 为 a 的约数，而 a 称为 b 的倍数，解与整数的整除相关问题常用到以下知识：

1. 数的整除性常见特征

对于具有某个条件的整数都能被整数 b 整除，而不具备这个条件的整数就不能被整数 b 整除，这种条件就叫做能被整数 b 整除的特征.

①若整数 a 的个位数是偶数，则 $2|a$；

②若整数 a 的个位数是 0 或 5，则 $5|a$；

③若整数 a 的各位数字之和是 3（或 9）的倍数，则 $3|a$（或 $9|a$）；

④若整数 a 的末二位数是 4（或 25）的倍数，则 $4|a$（或 $25|a$）；

⑤若整数 a 的末三位数是 8（或 125）的倍数，则 $8|a$（或 $125|a$）；

⑥若整数 a 的奇数位数字和与偶数位数字和的差是 11 的倍数，则 $11|a$.

2. 整除的常用性质

设 a、b、c、d 都是整数，有

①若 $b|a$，$c|b$，则 $c|a$；

②若 $c|a$，$c|b$，则 $c|(a\pm b)$；

③若 $b|a$，$c|a$，则 $[b,c]|a$；

④若 $b|a$，$c|a$，且 b 与 c 互质，则 $bc|a$.

对于整数 a 和 b（$b\neq 0$），存在唯一的整数 q 和 r，使得等式 $a=bq+r$（$0\leq r<b$）成立，这个等式叫余数公式.

(1) 若 $r=0$，则称 $b|a$；

(2) 若 $r\neq 0$，则称 $b\nmid a$.

在余数公式中，r 可取 0，1，2…q－1 这 q 个值，这样我们可以把整数按余数来分类. 特别地，奇数和偶数实际上就是将所有整数按被 2 除时的余数为 1 或是为 0 这个标准分成的两类.

例题与求解

例 1 从 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这十个数中选出五个组成五位数，使得这五位数能被 3，5，7，13 整除，这样的五位数中最大的是________.

（“五羊杯”竞赛题）

解题思路 从整除的性质入手，经过估算调整确定符合条件的最大五位数.

例 2 盒中原有 7 个球，一位魔术师从中任取几个球，把每一个小球都变成 7 个小球，将其放回盒中，他又从盒中任取一些小球，把每一个小球又都变成 7 个小球后放回盒中，如此进行，到某一时刻魔术师停止取球变魔术时，盒中球的总数可能是下面的（ ）.

（“祖冲之杯”邀请赛试题）

（A）1990 个　（B）1991 个　（C）1992 个　（D）1993 个

解题思路 先从简单情形实验，探寻盒中球的总数变化的规律，这是解本例的突破口.

从简单情形入手，从特殊情况着手，从中观察、归纳，猜想出一般结论，是探寻解题思路的重要策略.

例 3 已知一个七位自然数 $\overline{62xy427}$ 是 99 的倍数，试求 $950x+24y+1$ 的值.

（第九届“希望杯”邀请赛试题）

解题思路 自然数 $\overline{62xy427}$ 能被 9、11 整除，运用整数能被 9、11 整除的特性推出 x，y 的值.

运用与整除相关知识，建立关于数字谜中字母的方程、方程组，是解数字谜问题的常用技巧.

例 4 已知两个三位数 $\overline{abc}$ 与 $\overline{def}$ 的和 $\overline{abc}+\overline{def}$ 能被 37 整除，证明：六位数 $\overline{abcdef}$ 也能被 37 整除.

（“缙云杯”邀请赛试题）

解题思路 因已知条件的数是三位数，而 $\overline{abcdef}$ 是六位数，故设法把 $\overline{abcdef}$ 用三位数的形式表示，以沟通已知与未知的联系.

例 5 能同时表示成连续 9 个整数之和、连续 10 个整数之和以及连续 11 个整数之和的最小正整数是哪一个?

（第十一届美国数学邀请赛（AIME））

解题思路 引入字母，用字母表示数，由已知条件得到多个等式，通过对等式的比较，发现隐含条件，这是解本例的关键.

根据已知条件来确定自然数，是数学竞赛中常见的一种题型，解这类问题常用到以下知识方法：
(1) 先定首位数字；
(2) 借助末位数字；
(3) 利用整除性质特征；
(4) 设数求解；
(5) 分析讨论检验；
(6) 简单不等式估计等.

能力训练

A 级

1. 五位数$\overline{abcde}$是 9 的倍数，其中$\overline{abcd}$是 4 的倍数，那么$\overline{abcde}$的最小值是________.

（“希望杯”邀请赛试题）

2. 从1到 10000 这 1 万个自然数中，有________个数被 5 或能被 7 整除.

（上海市竞赛题）

3. 一个五位数$\overline{3ab98}$能被 11 与 9 整除，这个五位数是________.

4. 在小于1997的自然数中，是 3 的倍数而不是 5 的倍数的数的个数是（ ）.

(A) 532 (B) 665 (C) 133 (D) 798

5. 设六位数 $N=\overline{x1527y}$是 4 的倍数，且 N 被 11 除余 5，那么 $x+y=$（ ）.

(A) 8 (B) 9 (C) 10 (D) 11

6. 除以8和 9 都是余 1 的所有三位数的和是（ ）.

（1998 年“五羊杯”竞赛题）

(A) 6492 (B) 6565 (C) 7501 (D) 7514

7. 已知存在整数 n，能使数$\underbrace{11\cdots11}_{n个}$被 1987 整除，求证：

$P=\underbrace{11\cdots11}_{n个}\underbrace{99\cdots99}_{n个}\underbrace{88\cdots88}_{n个}\underbrace{77\cdots77}_{n个}$也能被 1987 整除.

（全国初中数学联赛题）

8. 将一个三位数的数字重新排列所得的最大三位数减去最小的三位数正好等于原数，求这个三位数.

（江苏省竞赛题）

9. 1，2，3，4，5，6 每个使用一次组成一个六位数字$\overline{abcdef}$，使得

三位数$\overline{abc}$，$\overline{bcd}$，$\overline{cde}$，$\overline{def}$能依次被4，5，3，11整除，求这个六位数.

（上海市竞赛题）

10. 173□是个四位数字，数学老师说："我在这个□先后填入3个数字，所得到的3个四位数，依次可被9、11、6整除". 问：数学老师先后填入的3个数字的和是多少？

（"华罗庚金杯"赛邀请赛试题）

B　级

1. 在十进制中，各位数码是0或1，并且能被225整除的最小自然数是________.

（全国初中数学联赛试题）

2. 一个101位的自然数 $A=\underbrace{88\cdots88}_{50个}\square\underbrace{99\cdots99}_{50个}$能被7整除，则□盖住的数字是________.

（北京市竞赛题）

3. 一个六位数$\overline{x1989y}$能被33整除，这样的六位数中最大的是________.

4. 有以下两个数串

1，3，5，7…1991，1993，1995，1997，1999

1，4，7，10…1987，1990，1993，1996，1999

同时出现在这两个数串中的数的个数共有（　　）个

(A) 333　　(B) 334　　(C) 335　　(D) 336

5. 已知 $N=\underbrace{22\cdots22}_{K个}$，若N是1998的倍数，那么符合条件的最小的K值为（　　）.

（第十届"希望杯"邀请赛试题）

(A) 15　　(B) 18　　(C) 24　　(D) 27

6. 某中学初一年级有13个课外学习小组，各组人数如下表

组别	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
人数	2	3	5	7	9	10	11	14	13	17	21	22	24

一天下午，学校同时举办语文、数学两个讲座. 已知有12个小组去听讲座，其中，听语文讲座是听数学讲座人数的6倍，还剩下1个小组在教室讨论问题，这一组是（　　）.

（江苏省竞赛题）

(A) 第4组　(B) 第7组　(C) 第9组　(D) 第12组

7. 试找出由0，1，2，3，4，5，6这7个数字组成的没有重复的七位数中，能被165整除的最大数和最小数.

（湖北省黄冈市竞赛题）

8. 某商场向顾客发放9999张购物券，每张购物券上印有一个四位数的号码，从0001到9999号，如果号码的前两位数字和等于后两位数字

的和，则称这张购物券为“幸运券”，试证明：这个商场所发的购物券中，所有幸运券的号码之和能被 101 整除.

（“祖冲之杯”邀请赛试题）

9. 已知质数 p、q 使得表达式 $\frac{2p+1}{q}$ 及 $\frac{2q-3}{p}$ 都是自然数，试确定 p^2q 的值.

（1997 年北京市竞赛题）

10. 一个四位数，这个四位数与它的各位数字之和为 1999，求这个四位数，并说明理由.

（1999 年重庆市竞赛题）

3 话说字母表示数

阅读与思考

算术与代数是数学中两门不同的分科，它们之间联系紧密，代数是在算术中“数”和“运算”的基础上发展起来的.

用字母表示数是代数的一个重要特征，也是代数与算术的最显著的区别. 在数学发展史上，从确定的数过渡到用字母表示数经历了一个漫长的过程，是数学发展史上的一个飞跃，用字母表示数有以下几个特点：

1. 任意性

即字母可以表示任意的数.

2. 限制性

即虽然字母表示任意的数，但字母的取值必须使代数式或实际问题有意义.

3. 确定性

即在用字母表示的数中，如果字母取定某值，那么代数式的值也随之确定.

4. 抽象性

即与具体的数值相比，用字母表示数有更抽象的意义.

在文明和科学的发展过程中，人类创造了用符号代替语言、文字的方法，这是因为符号比语言、文字更简练、更直观、更具一般性.

读者思考下列问题：

(1) 你能举出生活中用符号代替语言、文字的例子吗？

(2) 书写代数式应注意什么？

例题与求解

例 1 研究下列算式，你会发现有什么规律？

$$1\times3+1=4=2^2$$
$$2\times4+1=9=3^2$$
$$3\times5+1=16=4^2$$
$$4\times6+1=25=5^2$$
$$\cdots\quad\cdots\quad\cdots$$

请将你找出的规律用代数式表示出来：________.

(1999 年山东省菏泽地区中考题)

解题思路 观察给定的几个简单的、特殊的算式，寻找数字间联系，发现一般规律，然后用代数式表示.