实数理论及其在中学数学中的应用

吴振廷编

人民教育出版社

实数理论及其在中学数学中的应用

吴 振 廷 编

人 民 教 育 出 版 社

内 容 提 要

本书内容包括：实数理论、实数理论在中学数学中的应用。该书可供中学数学教师和师范院校数学系学生参考，部分章节也可供青年朋友与中学高年级学生提高数学基础理论水平阅读。

实数理论及其在
中学数学中的应用
吴 振 廷 编
*
人民教育出版社出版
新华书店北京发行所发行
北京市房山县印刷厂印装
*
开本 787×1092 1/32　印张 4.5　字数 91,000
1981 年 2 月第 1 版　1981 年 7 月　第 1 次印刷
印数　1—18,000
书号 7012·0429　　定价 0.35 元

前　　言

这本书主要介绍实数理论及其在中学数学中的应用，是为中学数学教师以及师范院校的学生写的. 本书的部分章节，也可供青年朋友与中学高年级学生提高数学基础理论水平之用.

中学数学的各科(包括几何、代数、三角、解析几何与微积分初步）大部分内容都是在实数范围内研究的. 许多基本理论问题都与实数理论有关. 例如：无限非循环小数的本质是什么；为什么任意的一条线段在有理数范围内不一定有长度，而在实数范围内一定有；为什么数直线上的点与全体实数集之间存在一一对应；为什么正数都有平方根；为什么对数函数 $y=\lg x$ 的定义域是全体正实数；一个矩形的面积为什么等于长乘宽，当长与宽取无理数时怎样理解面积概念？如果实数理论不讲，或只讲实数理论不涉及其应用，那末对于这些问题，就无法认识清楚. 因而想从本质上把握有关中学教材，使教学达到必要的科学水平，是会有一定困难的. 为有利于研究、探讨、解决这些问题，便成为我编写这本小书的一个最初的动机.

而编写这本小书的直接推动力，则是教育部制订的《全日制十年制学校中学数学教学大纲》的颁布. 这个大纲规定要在中学讲授集合与微积分初步等新内容，而“实数理论及其应用”有利于对集合与作为微积分基础的极限方法的深入理解.

它来自中学教材，又比中学教材更深入一步. 所以从材料上看，特别是从方法上看，对中学教师更好地把握有关教材可能有所裨益.

基于上述想法，在本书中，我试图以相对严格但又以尽可能接近于中学教材的方式叙述实数理论，并力求以统一的观点、方法，论述实数理论在中学数学中的一些基本应用. 这是根据当前加强基础理论教学的精神，并且结合我多年来探讨师院教学如何联系中学实际的经验教训而编拟的.

书后所列参考书，都是对我编写本书时有较大影响的，特推荐给读者. 此外，还参考了许多兄弟院校的公开刊物与内部交流资料以及一些外文书刊. 在这里就不一一列举了，我也向这些书刊的著译者表示谢意.

由于时间仓促，又加上个人学识浅陋，不妥之处乃至错误在所难免，希望同志们批评指教.

编　　者

于沈阳师范学院数学系

1979年10月1日

目　录

第一章　实数理论

我们知道，中学数学的大部分内容都是在实数范围内研究的，因此引入无理数后把数集扩大到实数集，是在中学数学中，数的概念的最重要的一次扩充．但是由于这个问题复杂，在那里未能作详细的讨论．

作为中学这部分教材的自然延伸，在这一章我们将介绍无理数的定义，研究实数的基本运算以及它的基本性质．

如大家在中学数学教材中已经知道的，进行简单的几何测量，开方运算和解代数方程时，有理数就已经不能满足需要，而必须引入无理数了，古代人们就已经知道，以边长为单位的正方形的对角线的长度已不能用有理数来表达，而必须用无理数．但是，关于无理数的理论知识只是到了上个世纪七〇年代前后，随着微积分学的蓬勃发展，作为微积分理论基础的实数理论才建立起来．在这个时期，几乎同时出现有好几种建立实数理论的方法，它们形式上虽然各不相同，但实质是一样的．本书介绍的方法，主要是属于康托与梅莱*1的．这种方法是以有理数的性质与数列的极限概念为基础的，它与通常采用的戴德金*2引入实数的方法相比较，更接近于在中

---

*1．1872年，梅莱在其著作《无穷小分析新提纲》中阐述了它的不依赖于实数极限概念来表达的无理数的定义，几乎是同时，格奥尔格、康托也发表了类似的理论．

*2．理查德·戴德金于1872年在其著作《连续性与无理数》中论述了他的实数理论；关于建立实数的这种方法，可见附录参考书(13)．

学讲授实数的方法.

§1 有理数集

为了以后的应用，首先我们介绍有理数集R的一些主要性质.

1 定义 整数与分数统称为有理数

如果我们把整数看成分母为1的特殊分数，那么任何一个有理数总可以表示成一个分数$\frac{p}{q}$的形式(其中p, q为整数，$q\neq 0$). 分数总可以化成既约分数，即分子分母除1以外没有其他公因子.

2 四则运算

在有理数集R中规定有加法运算、乘法运算及其减法与除法(除法中除数不能为0). 集R的加法运算与乘法运算适合交换律与结合律，即对集R中的任意三个数r_1, r_2, r_3都有:

$r_1+r_2=r_2+r_1$; (加法的交换律)

$r_1\cdot r_2=r_2\cdot r_1$; (乘法的交换律)

$(r_1+r_2)+r_3=r_1+(r_2+r_3)$; (加法的结合律)

$(r_1\cdot r_2)\cdot r_2=r_1\cdot(r_2\cdot r_3)$; (乘法的结合律)

$(r_1+r_2)\cdot r_3=r_1\cdot r_3+r_2\cdot r_3$. (乘法对于加法的分配律)

集R关于上述四则运算的结果是唯一的，也是封闭的，即对于任何两个有理数经四则运算之后仍得到唯一的有理数. 一般地，一个数集若至少含有两个数，这个数集中的任何两个数的和、差、积、商仍在这个数集中(除数不能为0)，则称这种

数集为数体. 故有理数集构成数体.

3 有序性,阿基米德性质与稠密性

按着有理数之间的大小关系为法则,集 R 构成有序集,即在 R 中满足:

(1) 若 r_1, r_2 为 R 中的任意二个数,则或者 $r_1<r_2$,或者 $r_2<r_1$,或者 $r_1=r_2$,这三者必有一个成立,且只有一个成立;

(2) 若 r_1, r_2, r_3 为 R 中的任意三个数, 且若 $r_1<r_2$, $r_2<r_3$,则必有 $r_1<r_3$;

(3) 若 $r_1<r_2$,对任意 r_3 总有:

$$r_1+r_3<r_2+r_3; \quad (\text{加法单调性})$$

(4) 若 $r_1<r_2$,对任意正数 r_3总有:

$$r_1\cdot r_3<r_2\cdot r_3. \quad (\text{乘法单调性})$$

性质(3)、(4)对于需进行四则运算的数体来讲,是十分重要的. 它指出,顺序关系在四则运算之下的不变性,这是数体上的有序性与一般集合上的有序性很重要的不同之处.

有理数体 R,还满足所谓阿基米德性质,即对于任意两个正有理数 r_1 与 r_2,总存在自然数 p 使

$$pr_1>r_2.$$

这样,有理数集 R 是具有阿基米德性质的有序体.

集 R 的任意两个不同的元素之间总还存在集 R 的元素,例如: 若 $r_1<r_2$,则 $r_3=\dfrac{r_1+r_2}{2}$, 使 $r_1<r_3<r_2$. 有序集 R 的这种性质称为稠密性.

有理数绝对值的概念.

有理数 r 的绝对值记作 $|r|$,由下式定义:

$$|r|=\begin{cases} r & 若\ r\geqslant 0, \\ -r & 若\ r<0. \end{cases}$$

由绝对值定义可以推得:

(1) 对任意有理数 A、B 有:

$$|A|-|B|\leqslant|A+B|\leqslant|A|+|B|;$$

(2) 对于正数 B: 则不等式$|A|<B$, 同不等式$-B<A<B$等价; 而不等式$|A|>B$,同不等式 $A>B$ 或 $A<-B$等价.

4 几何表示

我们知道有理数集 R 中的数, 都可以用数轴(或称为数直线)上的点表示. 即对于每一个有理数, 在数轴上都存在唯一的对应点. 但反之, 不是直线上的所有点都有有理数与之对应. 例如, 与原点的距离等于单位正方形的对角线长的点, 就不对应任何有理数, 它实际对应无理数 $\sqrt{2}$.

绝对值$|a|$的几何意义是: 在数直线上数 a 所对应的点, 到原点的距离; 二数差的绝对值$|a_1-a_2|$的几何意义是: 在数直线上表示由两个数所对应的点之间的距离(图 1.1).

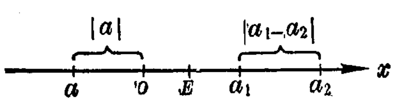

图 1.1

5 数的进位制

我们在日常生活与科学实践中经常使用数. 而且随着科学与社会的进步, 涉及到的数越来越多, 越来越复杂. 把人类所使用的每一个数都配上独立的名称或符号是不可能的, 也是不科学的. 所以在历史上就逐渐形成了科学的进位制记数

法．其特点是只用少数几个符号（数码）和一定的进位规则，就可以记出一切可能遇到的数．现在最常用的是十进制记数法．此外由于人们各种不同的需要，还使用着一些其它的记数法．如在电子计算机中就使用二进制与八进制记数法．

又因为任何一个负数 $-r<0$ 去掉负号以后就变成正数 $r>0$，所以研究数的进位制，我们只就着正数研究就可以了．

（1）自然数的记数法：

首先我们说明 r（r 为大于 1 的自然数）进制记数法的一般规则．先看两种具体的情形，当 $r=10$ 时称为十进制记数法，数 10 叫做这个进位制的基数，这是使用 10 个数码 0, 1, 2, …9 来表示任何一个数，例如：自然数 $2\times10^3+0\times10^2+9\times10^1+4\times10^0$ 在十进制中记作 2094；自然数 $1\times10^2+2\times10^1+3\times10^0$ 在十进制中记为 123．一般地，在十进制中自然数的表示法是根据每个自然数 n 可以唯一地表示如下：

$$a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\cdots+a_1\cdot10^1+a_0\cdot10^0.$$

此处 k 为某一个正整数，每一个 a_k 都是十个数码 0, 1, 2, …, 9 中的一个．这个数 n 在十进制中借助于在上述等式中出现的那 $k+1$ 个数码，记作

$$a_ka_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0.$$

在这个记数法中：右数第一位（叫做个位）上的数码 a_0 表示 10 的 0 次幂的个数；右数第二位（叫做十位）上的数码 a_1 表示 10 的 1 次幂的个数；右数第三位（叫做百位）上的数码 a_2 表示 10 的 2 次幂的个数；等等．在这个进位制中，进位的原则是"逢十进一"，即个位上的十个单位，相当于十位上的一个单位，十位上的十个单位，相当于百位上的一个单位，等等，依

此类推.

当 $r=2$ 时, 为二进制记数法. 这里使用二个数码 0, 1 来表示任意一个数. 数 2 叫做这个进位制的基数. 例如, 自然数 $1\times2^2+1\times2+1\times2^0$ 在二进制中记作 $111_{(2)}$, 自然数 $1\times2^3+0\times2^2+1\times2^1+1\times2^0$ 在二进制中记作 $1011_{(2)}$. 一般地, 在二进制中自然数的表示法是根据每一个自然数 n 可以唯一地表示如下:

$$\alpha_l\cdot2^l+\alpha_{l-1}\cdot2^{l-1}+\cdots+\alpha_1\cdot2+\alpha_0\cdot2^0.$$

其中 l 是某一个自然数, 每个 $\alpha_i(i=0, 1, 2, \cdots, l)$ 是二个数码 0, 1 中的一个, 这个数 n 在二进制中, 借助于在上述等式中出现 $l+1$ 个数码记为:

$$\alpha_l\alpha_{l-1}\alpha_{l-2}\cdots\alpha_1\alpha_{0(2)}$$

(这里小括号(2), 表示这个数是 2 进制中的数, 一般 r 进制中的数, 用(r)表示, 通常十进制中的数, 都略去(10))在这个记数法中: 右数第一位上的数码 α_0 表示 2 的 0 次幂的个数; 右数第二位上的数码 α_1 表示 2 的 1 次幂的个数; 右数第三位上的数码表示 2 的 2 次幂的个数; 等等. 在这个进位制中, 进位的原则是"逢二进一", 即在右数第一位上的二个单位, 相当于右数第二位上的一个单位, 右数第二位上的二个单位, 相当于右数第三位上的一个单位, 等等, 依此类推.

一般地, 在 r 进制中, 数 r 叫进位制的基数, 这里用 r 个数码 $0, 1, \cdots, r-1$ 表示任意一个数. 根据每一个自然数 n 可以唯一表示成以下形状:

$$\alpha_mr^m+\alpha_{m-1}r^{m-1}+\alpha_{m-2}r^{m-2}+\cdots+\alpha_1r+\alpha_0r^0.$$

其中 m 为某个自然数, 每一个 $\alpha_i(i=0, 1, 2, \cdots, m)$ 是 r 个数

码 0, 1, 2, …, $r-1$ 中的某一个，这个数 n 在 r 进制中记为:

$$\alpha_m\alpha_{m-1}\alpha_{m-2}\cdots\alpha_1\alpha_{0(r)}.$$

这里进位规则是"逢 r 进一". 即在上述记法中，左右相邻两位上数值关系是，右边位上的 r 个单位，相当于左边位上的一个单位.

其次，我们来说明 r 进制中，数的四则运算法则，若 $r=10$，即十进制，这是大家所熟知的，若 $r\neq 10$，数的四则运算法则可以按着十进制中的同样法则进行，只是在进位时，代替"逢十进一"的是"逢 r 进一".

例如，加法

$$\begin{array}{r} 1\ 0\ 4\ 3_{(5)} \\ +)\ 1\ \dot{3}\ \dot{2}\ 4_{(5)} \\ \hline 2\ 4\ 2\ 2_{(5)} \end{array}$$

$\therefore\quad 1043_{(5)}+1324_{(5)}=2422_{(5)}.$

减法

$$\begin{array}{r} 2\ 0\ 7\ 4_{(8)} \\ -)\ 1\ 6\ 2\ 5_{(8)} \\ \hline 2\ 4\ 7_{(8)} \end{array}$$

$\therefore\quad 2074_{(8)}-1625_{(8)}=247_{(8)}.$

乘法

$$\begin{array}{r} 1\ 1\ 0\ 1_{(2)} \\ \times 1\ 0\ 0\ 1_{(2)} \\ \hline 1\ 1\ 0\ 1 \\ +)\ 1\ 1\ 0\ 1 \\ \hline 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 0\ 1_{(2)} \end{array}$$

$\therefore\quad 1101_{(2)}\times 1001_{(2)}=1110101_{(2)}.$

除法

$$\begin{array}{r}
101_{(2)} \\
101_{(2)}\overline{)\,11001_{(2)}} \\
-)\ 101\phantom{01_{(2)}} \\
\hline
101\phantom{_{(2)}} \\
-)\ 101\phantom{_{(2)}} \\
\hline
0\phantom{_{(2)}}
\end{array}$$

$\therefore\quad 11001_{(2)} \div 101_{(2)} = 101_{(2)}$.

最后，我们来说明各种进位制中数的相互转换方法.

将一个数，由 $r(\neq 10)$ 进制转换到十进制，可直接计算该数在每一位上所含有的单位数目来实现，例如：

$1101_{(2)} = 1\cdot 2^3 + 1\cdot 2^2 + 0\cdot 2^1 + 1 = 8+4+0+1 = 13_{(10)}$,

$321_{(8)} = 3\cdot 8^2 + 2\cdot 8^1 + 1 = 192+16+1 = 209_{(10)}$,

反之，将一个十进制中的数，化为任意$(r\neq 10)$进制的数，可以根据现行中学数学课本中介绍过的"r 除取余法"来完成. 这是利用在十进制中进行用基数 r 作除数的一系列除法运算，从中取出各个余数来实现的.

例1 将 249 化为 8 进数.

$$\begin{array}{r|l}
8 & 249 \\
\hline
8 & 31 \quad \cdots\cdots 余\ 1 \\
\hline
8 & 3 \quad \cdots\cdots 余\ 7 \\
\hline
 & 0 \quad \cdots\cdots 余\ 3 \uparrow
\end{array}$$

$\therefore\quad 249_{(10)} = 371_{(8)}$.

例2 将 13 化为二进数.

$$\begin{array}{r|l}
2 & 13 \\
\hline
2 & 6 \quad \cdots\cdots 余\ 1 \\
\hline
2 & 3 \quad \cdots\cdots 余\ 0 \\
\hline
2 & 1 \quad \cdots\cdots 余\ 1 \\
\hline
 & 0 \quad \cdots\cdots 余\ 1 \uparrow
\end{array}$$

$\therefore\quad 13_{(10)} = 1101_{(2)}$.

这种转换法的根据，现介绍如下：

例如，把 10 进制的 724 化为 8 进制的数，可以这样计算：用 8 除 724 得商 90 余 4，即 $724=90\times8+4$.

由此可见，这里第一次相除所得的余数 4，恰是 8 的 0 次幂的个数，是该数在 8 进制中的右数第一位上的数码.

再用 8 除 90 得商 11 余 2，即

$$\begin{aligned}724&=(11\times8+2)\times8+4\\&=11\times8^2+2\times8+4.\end{aligned}$$

由此可见，这里第二次相除所得的余数 2，恰是 8 的 1 次幂的个数，是该数在 8 进制中的右数第二位上的数码.

再用 8 除 11 得商为 1 余 3，即

$$\begin{aligned}724&=(1\times8+3)8^2+2\times8+4\\&=1\times8^3+3\times8^2+2\times8+4.\end{aligned}$$

由此可见，第三次相除所得余数为 3，恰是该数在 8 进制中右数第三位上的数码.

为了使这一算法更为协调起见，我们把除法过程再进行一次，用 8 去除 1 得商为 0，余数为 1，

$$\begin{aligned}724&=(0\times8+1)\times8^3+3\times8^2+2\times8+4\\&=0\times8^4+1\times8^3+3\times8^2+2\times8+4\\&=1324_{(8)}.\end{aligned}$$

由此可见，这里第四次所得余数 1，恰是该数在 8 进制中右数第四位上的数码. 到此便得到了十进数 724 在 8 进制中的表示 $1324_{(8)}$.

所以，这种把一个十进制转换为 $r(r\neq10)$ 进制的方法，是用 10 进制中的除法进行的，除数永远是 r，被除数则依

次是：原十进数，第一次相除所得的商，第二次相除所得的商，等等，一直到所得商数是 0 为止，而各次所得到的余数，则依次是该数在 r 进制中的右数第一位、第二位…上的数码.

可以把上述各次除法写成一个竖式，便得将一数化为 r 进数的简单方法如下：

$$\begin{array}{r|l l}
8 & 724 & \\ \hline
8 & 90 & \cdots\cdots \text{余} 4 \\ \hline
8 & 11 & \cdots\cdots \text{余} 2 \\ \hline
8 & 1 & \cdots\cdots \text{余} 3 \\ \hline
 & 0 & \cdots\cdots \text{余} 1 \uparrow
\end{array}$$

$\therefore \quad 724_{(10)}=1324_{(8)}$.

(2)正有限小数的记数法：

在十进制中，$21+1\times10^{-1}+0\times10^{-2}+8\times10^{-3}+9\times10^{-4}$ 记作十进制小数 21.1089，称为该数的十进小数表示；$3\times10^{-1}+2\times10^{-2}+1\times10^{-3}$ 的十进小数表示为 0.321，等等. 一般地，十进小数记数法是根据每一个小数 r 可以用 10 的负整数次幂唯一地表示如下：

$$r=\alpha+\alpha_{-1}\cdot10^{-1}+\alpha_{-2}\cdot10^{-2}+\cdots+\alpha_{-n}\cdot10^{-n},$$

式中的 α 为正整数，其中 α_i 为十个数码 0, 1, 2, …, 9 中的一个. 这个数的十进小数表示为：

$$r=\alpha.\alpha_{-1}\alpha_{-2}\cdots\alpha_{-n}.$$

类似地，在 r 进位制中，都存在着小数记数法. 这种小数的记数规则是：在小数点以后第一位上的数码，表示 r^{-1} 的倍数，在第二位上的数码表示 r^{-2} 的倍数，等等，以下类推. 进位规则，仍然是"逢 r 进一". 例如：

$$1.237_{(8)}=1\cdot8^0+2\cdot8^{-1}+3\cdot8^{-2}+7\cdot8^{-3}.$$

与整数一样，将 r 进小数化成十进制中的数，只需根据 r 进制小数的定义，计算一系列十进分数的和即可．例如：

$$
\begin{aligned}
0.1101_{(2)} &= 1\cdot 2^{-1}+1\cdot 2^{-2}+0\cdot 2^{-3}+1\cdot 2^{-4} \\
&= \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16} \\
&= \frac{8+4+1}{16}=\frac{13}{16_{(10)}}.
\end{aligned}
$$

反之，将一个十进小数化为 r 进制的小数，可以先将该数化为十进分数，然后将这个分数化为 r 进制中的分数即可．

如：$10.75_{(10)}=\dfrac{1075_{(10)}}{100_{(10)}}=\dfrac{43_{(10)}}{4_{(10)}}=\dfrac{101011_{(2)}}{100_{(2)}}.$

若要化分数为小数，可继续进行除法，但这时，可能得到有限小数，也可能得到无限循环小数．关于无限小数，我们将在以后研究．

习　　题

1-1．进行下列所指出的四则运算：

(1) $5743_{(8)}\pm 3674_{(8)}$；　　(2) $11011011_{(2)}\times 10101_{(2)}$；

(3) $4_{(8)}\div 7_{(8)}$．

1-2．完成下列各数的转换：

(1) $2359_{(10)}=x_{(2)}$；　　(2) $7543_{(8)}=x_{(10)}$；

(3) $10111_{(2)}=x_{(10)}$．

§2　数列极限的例题

在数集中极限运算是一种重要而且基本的运算．下面我们以求圆的面积为例，说明极限运算及运用极限方法解决问