中学数学解题方法

（三角部分）

谭光宙　丁家泰　郁　华

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

（三角部分）

谭光宙　丁家泰　郑连德

北京师范大学出版社

中学数学解题方法

（三 角 部 分）

谭光宙　丁家泰　郑连德

•

北京师范大学出版社出版

新华书店北京发行所发行

河北涿县范阳印刷厂印刷

•

开本：787×1092　1/32　印张：9.625　字数：202 千

1985年6月第1版　1985年6月第1次印刷

印数：1—70,000

统一书号：7243·261　定价：1.20元

前　言

在多年的教学实践中，我们深感，学会思考数学问题的方法和掌握解题的一些技巧是教师教好数学、学生学好数学的重要因素。为了帮助高、初中学生，自学数学的知识青年、职工干部，以及中学数学教师巩固并熟练掌握数学基础知识，提高逻辑思维能力，简捷地掌握解数学题的一般方法和某些特殊技巧，我们根据《中学数学教学大纲》和现行的中学数学教材，以阐述逻辑思维、总结中学数学各部分题的解题方法与技巧为主，用例题形式说明方法与技巧为辅编写了这本书。

本书由谭光宙、丁家泰会同郁华、张乃凡、郑连德、安书田、赵素兰、张士清、张德平等同志编写。该三角部分主要是根据郑连德同志手稿选编的。

本书稿曾请我们的老师——北京师范大学数学系蒋铎等先生详细地审阅，对此我们表示衷心的感谢。

在编写过程中，我们还曾得到杨明林、程振球等同志的热情支持和帮助，在此表示谢意。

限于我们的水平，书中谬误一定不少，希望广大读者批评指正。

编　者

目　录

第一章　三角恒等变形……………………………………………（1）

一、预备知识……………………………………………………（1）

1°三角公式（1）；2°应该掌握的一些重要关

系式（3）。

二、求值、化简和三角恒等式的证明…………………………（5）

1°综合法（6）；2°比较法（57）；3°分析

法（58）；4°数学归纳法（61）。

练习一…………………………………………………………（64）

第二章　三角形中的边角关系…………………………………（69）

一、预备知识……………………………………………………（69）

1°三角形中的边角关系公式（69）；2°应该掌握的一

些重要关系式（72）；3°三角形的基本解法（74）。

二、三角形边角关系问题解法举例……………………………（75）

1°综合法（75）；2°比较法（121）；3°分析

法（123）；4°应用题的三角解法举例（125）。

练习二…………………………………………………………（130）

第三章　三角函数和反三角函数………………………………（133）

一、预备知识……………………………………………………（133）

1°三角函数（133）；2°反三角函数（137）；3°三角

函数与反三角函数的关系（139）。

二、关于三角函数、反三角函数的定义域和值域

问题的求法……………………………………………（140）

1°观察法（140）；2°求交集法（142）；3°恒等变

形法（144）；4°设参变量的解法（146）；5°图解法（148）。
三、比较两式值的大小……………………………………(152)
1°归一法（152）；2°求差计算法（153）；3°几何法（154）；4°微分法（157）。
四、三角函数的周期……………………………………(160)
1°观察法（160）；2°用最简单的三角函数的周期求其它函数的周期（162）；3°待定系数法（164）；4°恒等变形法（166）；5°利用周期函数的性质求周期（167）；6°关于周期问题的解法举例（170）。
五、反三角函数的恒等变形……………………………(172)
1°反三角函数的三角函数运算解法（172）；2°三角函数的反三角函数运算解法（181）；3°剥层解法（185）；4°差分解法（186）；5°数学归纳法（188）。
六、三角函数、反三角函数图象的作法及其应用…(190)
1°描点法作图（190）；2°几何作图法（192）；3°变换作图法（193）；4°三角函数和反三角函数图象的某些应用（198）。
练习三……………………………………………………(201)
第四章 三角方程……………………………………………(204)
一、预备知识……………………………………………(204)
1°最简单的三角方程的解（204）；2°同名三角函数值相等时两角的关系（204）；3°关于验根问题(204)
二、解三角方程…………………………………………(206)
1°直接应用最简单的三角方程解集的观察解法(206)；2°因式分解法（206）；3°升、降方次法（208）；4°归一法（210）；5°方程两边同次乘方法（213）；6°添设辅助角的解法（214）；7°换元法（217）；8°用方程组解方程（220）；9°化为两同名三角函数相等的解

法（221）；10°三角方程的一些个别解法（222）。
三、解反三角函数方程……………………………………(225)
1°反三角函数方程的三角运算解法（225）；2°列方程组的解法（228）。
四、解三角方程组……………………………………………(230)
1°消元法（230）；2°消去三角函数转化为代数方程组的解法（233）。
练习四…………………………………………………………(237)
第五章　三角不等式和极值……………………………(239)
一、预备知识…………………………………………………(239)
1°不等式的性质和一些重要公式（239）；2°三角函数的一些重要不等式（240）。
二、三角不等式和极值问题解法举例………………………(241)
1°综合法（241）；2°比较法（288）；3°分析法（290）；4°反证法（292）；5°数学归纳法（294）。
练习五…………………………………………………………(297)

第一章 三角恒等变形

一、预备知识

1° 三角公式

(1)同角关系公式

倒数关系：

$\sin\alpha\csc\alpha=1$，$\cos\alpha\sec\alpha=1$，$\operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha=1$；

商的关系： $\operatorname{tg}\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$， $\operatorname{ctg}\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$；

平方关系：$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$，$1+\operatorname{tg}^2\alpha=\sec^2\alpha$，

$1+\operatorname{ctg}^2\alpha=\csc^2\alpha$。

(2)诱导公式

$\sin(2k\pi+\alpha)=\sin\alpha$，$\cos(2k\pi+\alpha)=\cos\alpha$，

$\operatorname{tg}(k\pi+\alpha)=\operatorname{tg}\alpha$，$\operatorname{ctg}(k\pi+\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha$。 $(k\in J)$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\cos\alpha$，$\sin(\pi\pm\alpha)=\mp\sin\alpha$，

$\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=-\cos\alpha$，

$\sin(2\pi-\alpha)=\sin(-\alpha)=-\sin\alpha$；

$\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\sin\alpha$， $\cos(\pi\pm\alpha)=-\cos\alpha$，

$\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\pm\sin\alpha$，

$\cos(2\pi-\alpha)=\cos(-\alpha)=\cos\alpha$；

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,\quad \operatorname{tg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\alpha)=\operatorname{tg}(-\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha;$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,\quad \operatorname{ctg}(\pi\pm\alpha)=\pm\operatorname{ctg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2}\pm\alpha\right)=\mp\operatorname{tg}\alpha,$$

$$\operatorname{ctg}(2\pi-\alpha)=\operatorname{ctg}(-\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha.$$

(3)两角的和、差公式

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta\mp1}{\operatorname{ctg}\beta\pm\operatorname{ctg}\alpha}.$$

(4)倍角公式和万能置换公式

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1$$

$$=1-2\sin^2\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{1+\operatorname{tg}^2\alpha},$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},\quad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\alpha}{2\operatorname{tg}\alpha}.$$

(5)半角公式

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}},\quad \cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}},$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}.$$

（6）和、差化积与积化和、差公式

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta)-\sin(\alpha-\beta)],$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)],$$

$$\sin\alpha\sin\beta=-\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)].$$

2 应该掌握的一些重要关系式

（1）$\sin\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{4}\mp\alpha\right),$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\pm\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}\mp\alpha\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{6}\pm\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{3}\mp\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{6}\pm\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{3}\mp\alpha\right);$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{3}\pm\alpha\right)=\cos\left(\frac{\pi}{6}\mp\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}\pm\alpha\right)=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6}\mp\alpha\right).$$

(2) $1\pm\sin\alpha=\left(\cos\frac{\alpha}{2}\pm\sin\frac{\alpha}{2}\right)^2$

$$=2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}\pm\frac{\alpha}{2}\right)=2\cos^2\left(\frac{\pi}{4}\mp\frac{\alpha}{2}\right).$$

(3) $a\sin\alpha\pm b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha\pm\phi)$,

$$\left(a\neq 0,\quad \operatorname{tg}\phi=\frac{b}{a}\right).$$

(4) $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{ctg}\alpha=2\csc 2\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha=2\operatorname{ctg}2\alpha$,

$\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}2\alpha=\csc 2\alpha$.

(5) $\frac{\cos\alpha+\sin\alpha}{\cos\alpha-\sin\alpha}=\frac{1+\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$

$$=\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right),$$

$$\frac{\cos\alpha-\sin\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}=\frac{1-\operatorname{tg}\alpha}{1+\operatorname{tg}\alpha}=\frac{1-\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha}$$

$$=\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right).$$

(6) $\frac{\sin\alpha+\sin\beta}{\sin\alpha-\sin\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2}$,

$$\frac{\cos\alpha+\cos\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha+\beta}{2}\operatorname{ctg}\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha+\cos\beta}=\operatorname{tg}\frac{\alpha\pm\beta}{2},$$

$$\frac{\sin\alpha\pm\sin\beta}{\cos\alpha-\cos\beta}=-\operatorname{ctg}\frac{\alpha\mp\beta}{2}.$$

(7) $\sin^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1}{2}(\cos2\beta-\cos2\alpha)$

$$=\sin(\alpha+\beta)\sin(\alpha-\beta),$$

$$\cos^2\alpha-\sin^2\beta=\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)$$

$$=\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta).$$

(8) $(1\pm\sin\alpha\pm\cos\alpha)^2=2(1\pm\sin\alpha)(1\pm\cos\alpha)$.

(9) $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$$=4\sin\alpha\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right),$$

$$\cos3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$$

$$=4\cos\alpha\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right),$$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$=\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3}+\alpha\right).$$

(10) $\operatorname{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$,

$\operatorname{ctg}^2\alpha-\cos^2\alpha=\operatorname{ctg}^2\alpha\cos^2\alpha$.

二、求值、化简和三角恒等式的证明

本章包括求值、化简和恒等式的证明问题。三角恒等变形涉及到角、三角函数和运算形式三个方面。因此，解决这类问题应该从这三个方面着眼，注意观察、分析角、函数和

运算形式三者的依存关系，从而选取适当的解法。

1°综合法

从题设条件入手，运用公式、定理和运算法则，推出题目所要求的结果，这种方法叫综合法。它是解题时用得最普遍的一种方法。运用综合法解题时，由于题目结构上的不同特点，又产生了很多具体解法。

（1）化为特殊角的解法

如果三角函数式中的角，可用30°、45°、60°、90°、180°、270°、0°等特殊角的运算来表示，于是可用三角公式把所要求的函数化为特殊角的三角函数，从而用特殊角的三角函数值来求解。

例1 求$\sin 15°$、$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}$、$\sin\left(-\frac{7\pi}{8}\right)$的值。

解
$$\begin{aligned}\sin 15° &= \sin(45°-30°)\\ &= \sin 45°\cos 30° - \cos 45°\sin 30°\\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\times\frac{1}{2}\\ &= \frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2});\end{aligned}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\pi}{8}=\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{\sin\frac{\pi}{4}}=\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\sqrt{2}-1;$$

$$\sin\left(-\frac{7}{8}\pi\right)=-\sin\frac{\pi}{8}=-\sqrt{\frac{1-\cos\frac{\pi}{4}}{2}}$$

$$=-\sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}}=-\frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

（2）化为同角三角函数的解法

从角的数量关系着眼，若可用公式化为同角三角函数，则可考虑化为同角三角函数去解。

例 2 求下列各式的值：

1) $\dfrac{1}{\sin 10^\circ}-\dfrac{\sqrt{3}}{\sin 100^\circ}$； 2) $\dfrac{\cos 20^\circ}{\cos 35^\circ\sqrt{1-\sin 20^\circ}}$；

3) $\operatorname{tg}9^\circ-\operatorname{tg}27^\circ-\operatorname{tg}63^\circ+\operatorname{tg}81^\circ$.

解 1) 原式 $=\dfrac{\cos 10^\circ-\sqrt{3}\sin 10^\circ}{\sin 10^\circ\cos 10^\circ}$

$$=\frac{2(\sin 30^\circ\cos 10^\circ-\cos 30^\circ\sin 10^\circ)}{\frac{1}{2}\sin 20^\circ}$$

$$=\frac{4\sin 20^\circ}{\sin 20^\circ}=4;$$

2) 原式 $=\dfrac{\cos^2 10^\circ-\sin^2 10^\circ}{\cos 35^\circ\sqrt{(\cos 10^\circ-\sin 10^\circ)^2}}$

$$=\frac{\cos 10^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 35^\circ}=\frac{\sin 80^\circ+\sin 10^\circ}{\cos 35^\circ}$$

$$=\frac{2\sin 45^\circ\cos 35^\circ}{\cos 35^\circ}=\sqrt{2};$$

3) 原式 $=(\operatorname{tg}9^\circ+\operatorname{ctg}9^\circ)-(\operatorname{tg}27^\circ+\operatorname{ctg}27^\circ)$

$$=\frac{2}{\sin 18^\circ}-\frac{2}{\sin 54^\circ}=\frac{2(\sin 54^\circ-\sin 18^\circ)}{\sin 18^\circ\sin 54^\circ}$$

$$=\frac{4\cos 36^\circ\sin 18^\circ}{\sin 18^\circ\cos 36^\circ}=4.$$

例 3 已知 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$， $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，

求$\dfrac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\alpha\right)}$的值。

解 $\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\alpha\right)=\dfrac{5}{13}$， $\alpha\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$，

$$\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)=\sqrt{1-\left(\frac{5}{13}\right)^2}=\frac{12}{13},$$

$$\frac{\cos 2\alpha}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}=\frac{\sin 2\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)}$$

$$=2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)=2\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)$$

$$=2\times\frac{12}{13}=\frac{24}{13}=1\frac{11}{13}.$$

（3）由三角函数的定义化为代数式的解法

解只含有一个角的三角函数问题，一般可将三角函数由定义化为x、y、r（$r=\sqrt{x^2+y^2}$）的代数式，用代数运算解题。

例4 已知$\sec\alpha=\dfrac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ （$|a|<|b|$），求α的其它三角函数值.

解 令$r=a^2+b^2$，$x=a^2-b^2$，$\because |a|<|b|$，$\therefore \sec\alpha<0$。α角在第Ⅱ、Ⅲ象限内。

（i）当α在第Ⅱ象限：

$y>0$，$\therefore y=\sqrt{r^2-x^2}=2|ab|$。

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\ \sin\alpha=\frac{y}{r}=\frac{2|ab|}{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=\frac{2|ab|}{a^2-b^2},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=\frac{a^2-b^2}{2|ab|},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=\frac{a^2+b^2}{2|ab|};$$

(ii)当 α 在第Ⅱ象限：

$y<0$， $\therefore\ y=-\sqrt{r^2-x^2}=-2|ab|$。

$$\cos\alpha=\frac{x}{r}=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2},\quad \sin\alpha=\frac{y}{r}=-\frac{2|ab|}{a^2+b^2},$$

$$\operatorname{tg}\alpha=\frac{y}{x}=-\frac{2|ab|}{a^2-b^2},$$

$$\operatorname{ctg}\alpha=\frac{x}{y}=-\frac{a^2-b^2}{2|ab|},$$

$$\csc\alpha=\frac{r}{y}=-\frac{a^2+b^2}{2|ab|}.$$

例5 求证：$\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}$.

证明 左式 $=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha-\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{x}{y}-\dfrac{x}{r}}{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{r}}=\dfrac{r-y}{x}$,

右式 $=\dfrac{\operatorname{ctg}\alpha\cos\alpha}{\operatorname{ctg}\alpha+\cos\alpha}=\dfrac{\dfrac{x}{y}\cdot\dfrac{x}{r}}{\dfrac{x}{y}+\dfrac{x}{r}}=\dfrac{x}{r+y}$

$$=\frac{x(r-y)}{(r+y)(r-y)}=\frac{x(r-y)}{r^2-y^2}$$

$$=\frac{x(r-y)}{x^2}=\frac{r-y}{x}.$$

$\therefore$ 左式＝右式.

（4）降次或升次的解法

对方次较高的三角函数式，一般要考虑降方次求解；但为了开方或约分，需要配方或分解因式，有时又要考虑升方次求解。升、降方次主要用“1”的关系式代换和倍角公式。

例6 已知 $\sin\alpha+\cos\alpha=a$，求 $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha$ 的值。

解 $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha=(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)(\sin^4\alpha-\sin^2\alpha\cos^2\alpha+\cos^4\alpha)=1\cdot[(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha)^2-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha]=1-3\sin^2\alpha\cos^2\alpha$.

由 $\sin\alpha+\cos\alpha=a$, $\sin^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=a^2$,

求得 $\sin\alpha\cos\alpha=\frac{1}{2}(a^2-1)$.

$$\therefore\quad \sin^6\alpha+\cos^6\alpha=1-3\left[\frac{1}{2}(a^2-1)\right]^2$$

$$=\frac{1}{4}(1+6a^2-3a^4).$$

例7 化简 $\cos^2 73^\circ+\sin^2 43^\circ+\cos 73^\circ\sin 43^\circ$.

解 原式 $=\frac{1}{2}(1+\cos146^\circ)+\frac{1}{2}(1-\cos86^\circ)$

$$+\sin43^\circ\cos73^\circ=1+\frac{1}{2}(\cos146^\circ$$

$$-\cos86^\circ)+\frac{1}{2}(\sin116^\circ-\sin30^\circ)$$

$$=1-\sin116^\circ\sin30^\circ+\frac{1}{2}\sin116^\circ$$

$$-\frac{1}{2}\sin30^\circ=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}.$$

例8 已知 $0\leqslant\alpha<\beta<\gamma<2\pi$，$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma=0$,