研究生教材

国防科技大学研究生教材专项经费资助

组合图论

ZU HE TU LUN

谢政 戴丽 编著

国防科技大学出版社

研　究　生　教　材
国防科技大学研究生教材专项经费资助

组合图论

谢政　戴丽　编著

国防科技大学出版社
·湖南长沙·

内容简介

全书共十章，包括图的基本概念、树、连通性、遍历性、匹配、Ramsey 数、着色、平面图、有向图、图的空间与矩阵以及图的计数等图论基本内容和理论。还介绍了相异代表系、鸽巢原理、容斥原理、递推关系、生成函数和 Pólya 计数定理等经典的组合数学原理。

本书取材精炼，难点分散，论述清晰，富于启迪，是一本很有特色的关于图论和组合数学的入门书，可作为运筹学、应用数学等专业的研究生教材，也可供管理科学、计算机科学、军事运筹学和系统科学等有关专业的教师、研究生和大学高年级学生参考。

图书在版编目(CIP)数据

组合图论/谢政，戴丽编著．—长沙：国防科技大学出版社，2003.5

ISBN 7-81024-959-2

Ⅰ．组…　Ⅱ．①谢…②戴…　Ⅲ．图论　Ⅳ．O157.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 038761 号

国防科技大学出版社出版发行

电话：(0731)4572640　邮政编码：410073

E-mail：gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑：文慧　责任校对：耿筠

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

787×960　1/16　印张：15　字数：296 千

2003 年 5 月第 1 版第 1 次印刷　印数：1-3000 册

*

定价：22.00 元

序

图论是研究离散对象二元关系中关系结构的一个数学分支,它与组合数学、拓扑学、代数学等学科关系密切,其应用十分广泛,已经渗透到物理学、化学、电子学、生物学、运筹学、经济学、系统工程以及计算机科学等诸多学科领域.

图论最引人入胜之处就在于它蕴含着大量强有力的思想、漂亮的图形、巧妙的论证和简洁的表述方式.现实生活中处处潜藏着图论问题,图论是最贴近生活、最容易入门的一门学科.图论会大量用到组合数学的原理和方法,同时,图论的某些结果也可以推广到组合数学中去,因此,图论与组合数学是密不可分的,甚至有人认为图论是组合数学的一个重要组成部分.

作为图论与组合数学的入门教材,本书系统地介绍了图论最基本、最重要的内容和原理,并注重融合组合数学的基本原理.我们希望读者不仅能系统地掌握图论的基本内容和方法,而且学会如何利用组合数学中的知识来解决图论中的问题,把图论与组合数学有机地结合起来,从而提高分析和解决实际问题的能力.由于这是一本组合图论的入门书,因此,我们没有涉及更多的图的算法.

全书共十章,包括图的基本概念、树、连通性、匹配、遍历性、Ramsey 数、着色、平面图、有向图、图的空间与矩阵以及图的计数等图论的基本内容和理论,还介绍了相异代表系、鸽巢原理、容斥原理、递推关系、生成函数和 Pólya 计数定理等经典的组合数学原理.每章精心配置的习题是对内容的巩固和扩充,是本书的重要组成部分.图论题目往往需要运用精彩的技巧才能解决,但并非深不可测,多做习题,有助于理解和掌握图论的思想和方法.

十多年来我一直在国防科技大学讲授研究生课程"图论与组合数

学”，本书是以该课程的讲义为基础，参考了大量国内外有关文献和教材修订而成的．编写图论与组合数学方面的教材是我们的初次尝试．如何以图论为主线，把组合数学的基本内容恰当地穿插其中，是我们自始至终追求的目标．本书是否符合我们的初衷，仁者见仁，智者见智，有待于读者去评价．

谢　政

2003 年 9 月 28 日于长沙

目　　录

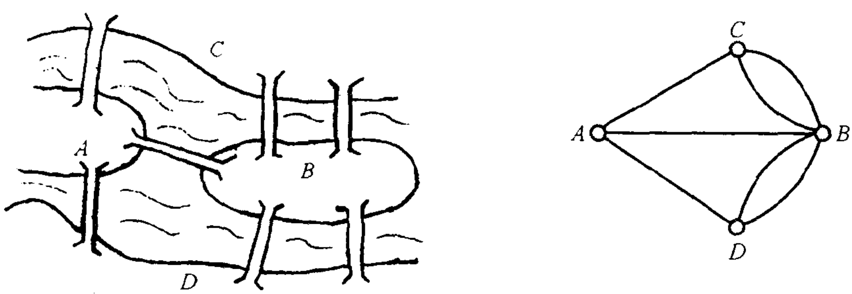
第一章　图的基本概念

本章介绍图论的发展历史和特点以及图的定义,重要的图类,链、圈与连通分支等基本概念.

1.1　图论的历史和特点

图论是一个比较年轻的数学分支.1736 年是图论的历史元年,这一年,Euler 研究并解决了一个当时著名的难题——Königsberg 七桥问题,发表了图论的首篇论文.Euler 是图论的创始人.

18 世纪,属于德国东普鲁士的 Königsberg 市被 Pregel 河穿城而过,河上有七座桥把河的两岸与河中的两个小岛连接起来,如图 1.1.1(a).当时 Königsberg 的市民热衷于这样一个有趣的游戏:从 A、B、C、D 四块陆地的某一块出发,通过每座桥一次且仅仅一次,再回到原出发地,是否可能?很多人不断地探索都没能成功,于是,便去请教瑞士的大数学家 Euler,Euler 否定地回答了这个问题.他把四块陆地抽象成四个几何点,把桥抽象成连接相应点的线,得到图 1.1.1(b),从而使问题得到解决.事实上,Königsberg 七桥问题就相当于能否用一支铅笔,从图 1.1.1(b)中 A、B、C、D 四个点中的某一个点出发,描过图中的每条线一次且仅仅一次,其间铅笔不允许离开纸面,再返回到原出发点.由于图中任一个点都与



(a)　　　　(b)

图 1.1.1　Königsberg 七桥问题

奇数条线相连，因此，对于任一点，都必然是先“出”后“回”，最后以“出”告终，才能行遍与该点相连的所有线，所以，不管从图中从哪个点出发都不可能再回到原来的出发地.

Königsberg 七桥问题本身只是一种游戏而已，似乎并没有多大意义，但Euler给出的它的抽象意义和论证方法开创了图论科学研究的先河.

19 世纪，人们在不同的领域发现了图论. 1847 年，Kirchhoff 为了解一类线性方程组而发展了树的理论. 这个线性方程组是描述一个电网络的每一条支路中电流和环绕每一个回路的电流的. Kirchhoff 虽然是一个物理学家，但却可以像数学家那样思考问题，他把一个电网络和其中的电阻、电容、电感等抽象化了：像Euler那样，用一个只由点和线组成的相应的组合结构来代替原来的电网络，而并不指明每条线所代表的电气元件的种类. 这样一来，Kirchhoff 实际上是把每个电网络用它的基本图代替. 他还证明，为了解这个方程组，只要考虑一个图的任何一个支撑树所决定的那些基本圈就足够了. 他的这个方法现在已成为一个标准的方法.

1857 年，Cayley 非常自然地在有机化学领域里发现了一族重要的图——树. 在研究给定碳原子数 n 的饱和碳氢化合物 $C_n^1H_{2n+2}$ 的同分异构物的数目的过程中，把碳原子和氢原子都抽象成点，把化学键抽象成相应原子间的线，于是问题转化为求有 $3n+2$ 个点的树的数目，其中每个点的度(与该点相连的线的数目)等于 1 或 4. Cayley 没有能够立即成功地解决这个问题，所以他改换了这个问题，逐步计数了：有根树，树，每个点的度至多等于 4 的树，并最终解决了每个顶点的度为 1 或 4 的树的计数问题. 后来，Jordan 从一个纯数学的角度独立地发现了树.

1852 年，一个叫 Francis Guthrie 的伦敦学生提出了四色问题：在地图或地球仪上，能否最多用四种颜色即可把每国之版图染好，使得国界线两侧异色？在图论中，也许在整个数学中，最出名的没有解决的问题就是著名的四色问题. 这个问题是如此之简单，以至于任何一个数学家都可以在五分钟之内将这个非凡的问题向马路上的任何一个普通人讲清楚. 可另一方面，这个问题又是如此之复杂，以至于时至今日，尚未能找到完整的理论性(非计算机的)证明.

20 世纪，随着现代生产和科学技术的发展，图论经历了一场爆炸性的发展. 1936 年，第一本图论著作诞生了，这就是著名的匈牙利图论专家 König 所著的《有限图和无限图理论》，它总结了图论两百年的主要成果，是图论发展史上的重要里程碑. 此后，图论开始迅速发展，并最终从组合数学中独立出来，成长为数学科学中一门独立的学科. 它的主要分支有图论、超图理论、极值图论、算法图论、网络图论和随机图论等. 科技的迅猛发展向图论提出了越来越多的需要解决的问题，使图论在科学界活跃非常. 尤其是计算机科学的快速发展，为图论及其算

法的实现提供了强大的计算与证明的手段，而图论在开关理论、数据结构、操作系统、形式语言、计算机网络、编译程序、人工智能等方面，亦有显著贡献.

今天，图论仍迅速向前发展，图论研究越来越广泛深入，大批优秀的数学家潜心研究，为图论宝库增添了一个又一个精彩成果. 时至今日，图论领域积累了大量的各种各样的难题，如 Hamilton 图问题. Hamilton 图是指顶点分布在同一个圆周上的一个图，它是 1895 年 Hamilton 玩环游世界的游戏时提出的. 图论中这样的难题很多，至今 Hamilton 图的非平凡的充要条件尚未建立. 又如Ramsey问题，直观地讲，Ramsey 问题就是：任给一群人，要么该人群中有 k 个人互相认识，要么有 l 个人互相不认识，问满足这种要求的人群至少有多少人？用$r(k,l)$表示该人群中的人数，易知 $r(3,3)=6$，即任何人数不少于 6 的人群中，必然要么有 3 个人互相认识，要么有 3 个人互相不认识. 但至今我们也不知道$r(4,5)$的确切值是多少. 目前已知的 $r(k,l)$值($k,l\geqslant 3$)只有有限的几个.

自从 Euler 于 1736 年研究 Königsberg 七桥问题以来，图论经历了 200 多年由慢到快的发展历程. 图论之所以迅速发展，是因为现代科学技术的推进作用和图论自身的特点. 图论把所研究的问题转化为一个符合美学外形的图，这样就使问题变得直观，使人们容易理解问题并对问题产生兴趣. 同时也正是图论的图解式表示方法，为科学探索提供了一种自然的而又非常重要的语言和构架. 许多图论问题都是从智力难题和游戏中提炼出来的，有些问题在本质上是初等的，但其中也有大量的问题可以难倒最老练的数学家. 图论问题的解决需要巧妙的方法，没有可循的程式，问题外表的简单朴素和本质上的难以解决，使每个从事图论研究的人在图论问题面前都必须谨慎、严肃、深入地思考. 因而学习图论可以锻炼思维，借助图论的思维方法可以提高解决问题的能力.

目前，图论领域形成了两个不同的研究方向：一个是以研究图的性质为主，我们称之为抽象图论；另一个是以研究图的算法为主，我们称之为算法图论，也称为网络最优化. 本书中，我们重点介绍抽象图论，对算法图论感兴趣的读者可以参阅参考文献[21].

1.2　图的定义

现实生活中，经常会遇到涉及某些研究对象之间具有某种特定关系的问题. 比如，在一个地区内，城市之间有没有交通线；一次球类比赛中，两个球队比赛过或没有比赛过；一群人中，两个人之间熟悉或不熟悉，等等. 这类关系是对称的，即对象甲对对象乙有某种关系，也意味着对象乙对对象甲有我们要研究的关系，则就在代表对象甲和对象乙的两个小圆圈之间连一条线，这样，对象之间的关系

就可以用一个图形来描述.我们感兴趣的是对象之间是否具有某种特定关系,因此,小圆圈之间有无连线是重要的,而小圆圈的位置以及连线的长短曲直则无关紧要.由此,我们就得到了图的概念,把图中的小圆圈叫做顶点,把连线叫做边.

下面举一个著名的例子来说明图的概念.

例 1.2.1(Hamilton 游戏) 1859 年,英国数学家 Hamilton 爵士发明了一种游戏:把一个木制的十二面体的二十个顶点标记上二十个城市的名字,要求从一个城市出发,经过每个城市恰好一次,再回到原出发城市.

我们用小圆圈代表十二面体的各个顶点,用连接相应小圆圈的线来代表十二面体的各个棱,得到图 1.2.1. Hamilton 游戏问题就相当于在图 1.2.1 上,用一支铅笔从 20 个顶点中的某个顶点出发,描过图中每个顶点一次且仅一次,其间铅笔不允许离开纸,而且必须沿边前进再返回到出发顶点.容易知道,按顶点标号从小到大顺序前进,就是 Hamilton 游戏的一个走法. □

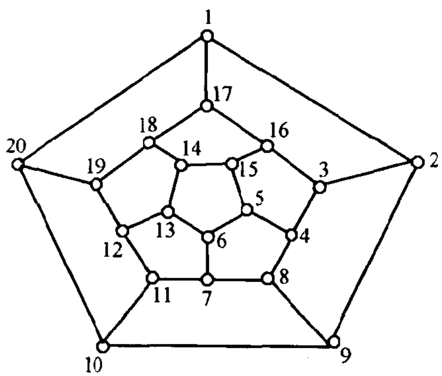


图 1.2.1 Hamilton 游戏

从 Hamilton 游戏问题以及上一节介绍的 Königsberg 七桥问题可以看出,图论中所说的图是描述研究对象之间关系的一种手段,它由若干个顶点和若干条边组成.下面我们给出图的数学定义.

图(graph) G 是指一个有序三元组 $(V(G), E(G), \psi_G)$,其中 $V(G) \neq \emptyset$, $V(G) \cap E(G) = \emptyset$. $V(G)$中的元素称为图 G 的顶点(vertex),而 $V(G)$则称为 G 的顶点集(vertex set);$E(G)$称为 G 的边集(edge set),其中的元素称为 G 的边(edge);ψ_G 称为关联函数(incidence function),它是使 G 中的每条边对应于 G 的无序顶点对的函数.

若 $e \in E(G)$,且 $\psi_G(e) = uv$,则称 e 连接(join) u 和 v,或称 e 与 u 及 v 关联(incident),而 u 和 v 称为 e 的端点(end),也称为 u 与 v 是相邻的(adjacent).我们

把 G 中所有与顶点 v 相邻的顶点的集合称为 v 的邻域(neighbour)，记为 $N_G(v)$ 或 $N(v)$.

例 1.2.2　设 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$；$E(G)=\{e_1,e_2,e_3,e_4,e_5,e_6\}$；$\psi_G(e_1)=v_1v_4$，$\psi_G(e_2)=v_1v_2$，$\psi_G(e_3)=v_1v_2$，$\psi_G(e_4)=v_1v_3$，$\psi_G(e_5)=v_3v_3$，$\psi_G(e_6)=v_2v_3$. 则图 G 的图形(diagram)如图 1.2.2 所示.

□

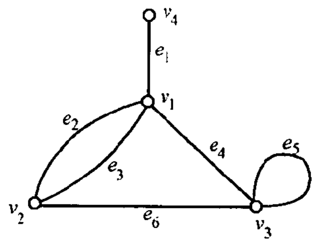


图 1.2.2　G 的图形

如前所述，我们不考虑图的图形中顶点的位置和边的长短曲直，所以，经常把一个图与代表它的图形等同起来，即把代表图的图形也称为图. 这就是我们把前面那种有序三元组称为图的原因. 应当说明的是，图论中所研究的图表现的只是顶点集合上的二元关系，其本质是抽象的概念，并不是几何图形、工程图或美术图画.

为了书写方便，以后我们通常把图 $G=(V(G),E(G),\psi_G)$ 简记为 $G=(V(G),E(G))$，此时 $E(G)$ 中的边只需要用它的两个端点的无序对来表示. 用这种表示方法，例 1.2.2 中的图 G 可以记为 $G=(V(G),E(G))$，其中 $V(G)=\{v_1,v_2,v_3,v_4\}$，$E(G)=\{v_1v_4,v_1v_2,v_1v_2,v_1v_3,v_3v_3,v_2v_3\}$. 需要指出的是，在这种记号下，$E(G)$ 中有些元素是重复的. 如例 1.2.2 中，v_1v_2 在 $E(G)$ 中出现了两次.

若图的顶点集和边集都只含有限个元素，则称之为有限图(finite graph)，否则称之为无限图(infinite graph). 我们只讨论有限图.

与同一个顶点关联的两条边称为是相邻的(adjacent)；两个端点重合的边称为环(loop)，端点不重合的边称为连杆(link)；连接同一对顶点的两条边称为重边(multiple edge). 例如，在例 1.2.2 中，边 e_1 与边 e_4 是相邻的；e_5 是环，其他的边都是连杆；边 e_2 和边 e_3 是重边. 显然，“相邻”是指顶点与顶点之间、边与边之间的关系，而“关联”则是指顶点与边之间的关系.

若一个图既没有环也没有重边，则称之为简单图(simple graph). 例 1.2.2 中

的图 G 不是简单图,去掉它的重边和环得到的图 1.2.3 就是简单图了.

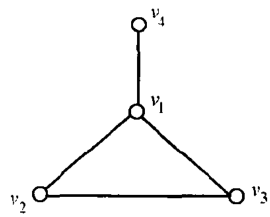


图 1.2.3 简单图

图 G 的顶点数、边数分别用 $\nu(G)$, $\varepsilon(G)$表示,即有 $\nu(G)=|V(G)|$, $\varepsilon(G)=|E(G)|$. $\nu(G)$又称为图 G 的阶(order). 当只讨论一个图时,我们常常省略 G,用 V, E, ν, ε 来代替$V(G), E(G), \nu(G), \varepsilon(G)$.

图 G 中顶点v 的度(degree)定义为与 v 关联的边的数目(与 v 关联的每个环算作两条边),记为 $d_G(v)$. 在例 1.2.2 中, $d_G(v_1)=4$, $d_G(v_2)=3$, $d_G(v_3)=4$, $d_G(v_4)=1$.

为方便计,我们把度为 0 的顶点称为孤立点(isolated vertex),度为 1 的顶点称为悬挂点(pendant vertex),悬挂点关联的边称为悬挂边(pendant edge),度为偶数的顶点称为偶点(even vertex),度为奇数的点称为奇点(odd vextex). 用$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别表示图 G 中顶点度的最小值和最大值,分别称为 G 的最小度(minimum degree)和最大度(maximum degree).

因为图 G 的每条边关联两个顶点,所以在计算顶点的度时,每条边在其端点各计算一次,即每条边对它的两个端点度的贡献各为 1,从而图 G 的一条边对于图G 的各个顶点的度的总和贡献为 2,于是得到如下著名的握手引理. 它是 Euler(1736)给出的.

定理 1.2.1(握手引理) $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v) = 2\varepsilon(G)$. □

显然,任何图中所有顶点的度的和必为偶数.

例 1.2.3 证明空间中不可能存在这样的多面体,它们有奇数个面,而每个面上又都有奇数条棱.

证明 以多面体的面集合为 $V(G)$,并且仅当两个面有共公棱时,在图 G 的相应顶点间连一条边,得到图 G. 由于已知 $\nu(G)$ 为奇数,而且 $d_G(v)$ 也是奇数($\forall v \in V(G)$),因此 $\sum\limits_{v\in V(G)} d_G(v)$ 必是奇数,此与定理 1.2.1 矛盾,故这样的多面体不存在. □

推论 1.2.2 任何图中奇点的个数为偶数.

证明 设 V_1 和 V_2 分别为图 G 的奇点集和偶点集，由定理 1.2.1 知 $\sum_{v \in V_1} d_G(v) + \sum_{v \in V_2} d_G(v) = 2\varepsilon(G)$，其中 $\sum_{v \in V_2} d_G(v)$ 是偶数，所以 $\sum_{v \in V_1} d_G(v)$ 亦是偶数，而 $d_G(v)$ 是奇数($\forall v \in V_1$)，故 $|V_1|$ 是偶数. □

现在引进图论中一个重要的概念 —— 图的同构. 如果能够在图 G_1 和图 G_2 的顶点集 $V(G_1)$ 和 $V(G_2)$ 之间建立一一对应关系，使得连接 G_1 中任何一对顶点的边数等于连接 G_2 中与之对应的一对顶点的边数，则称 G_1 和 G_2 是同构的(isomorphic)，记作 $G_1 \cong G_2$. 显然，同构的图必有相同的顶点数和边数. 图 1.2.4 中 G_1 和 G_2 是同构的. 事实上，只要令 $u_1 \leftrightarrow u$, $u_2 \leftrightarrow w$, $u_3 \leftrightarrow y$, $v_1 \leftrightarrow v$, $v_2 \leftrightarrow x$, $v_3 \leftrightarrow z$ 即可.

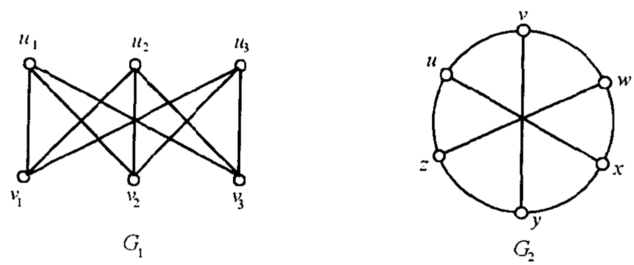


图 1.2.4 图的同构

如果两个图有相同的图形，则这两个图同构. 两个同构的图本质上是相同的，只是顶点和边的标记不同而已. 顶点已确定标号的图称为标号图(labelled graph).

因为我们感兴趣的是图的结构性质，所以在画一个图的图形时，有时省略顶点和边的标号. 一个无标号的图可以认为是同构图的一个代表. 给一个图的顶点和边以标号是为了便于称呼它们.

1.3 重要的图类

图论中的图千姿百态，多种多样，许多图之间具有密切的联系，如图 1.3.1 中的四个图，G_0，G_1，G_2 都可以看成是图 G 的一部分，因为它们的顶点集和边集都分别是图 G 的顶点集和边集的子集.

设 H 和 G 为两个图，若它们满足 $V(H) \subseteq V(G)$，且 $E(H) \subseteq E(G)$，则称 H 为 G 的子图(subgraph)，记作 $H \subseteq G$. 图 1.3.1 中，G_0，G_1，G_2 都是 G 的子图. 若 $V(H) = V(G)$，且 $E(H) = E(G)$，则称 H 与 G 相等，记作 $H = G$. 若 $H \subseteq G$，且

$H \neq G$,则称 H 是 G 的真子图(proper subgraph),记作 $H \subset G$. 若 $V(H) = V(G)$,且 $E(H) \subseteq E(G)$,则称 H 是 G 的支撑子图(spanning subgraph). 图 1.3.1 中,G_0, G_2 是 G 的支撑子图,而 G_1 不是.

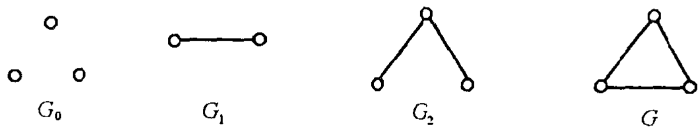


图 1.3.1 图与子图

从图 G 中删去所有的环,并且对连接任何一对顶点的重边,除保留一条外,去掉重边中余下的一切边,这样得到 G 的一个简单支撑子图 H,称为 G 的基础简单图(underlying simple graph). 图 1.2.3 就是图 1.2.2 的基础简单图.

n 阶简单图最多有 $\binom{n}{2}$ 条边, 我们称每对顶点都相邻的简单图为完全图(complete graph), n 阶完全图记作 K_n. 空图(empty graph) 是指边集为空集的图, 显然, 空图的每个顶点都是孤立点. 若图中只有一个顶点, 则称之为平凡图(trivial graph), 不是平凡图的一切其他图均称为非平凡图(notrivial graph).

除了完全图、空图外,还有两类重要的图 —— 正则图和二部图.

正则图(regular graph) 是指每个顶点的度都相等的图. 每个顶点的度都等于 r 的正则图称为 r 正则图. 空图是 0 正则图,完全图 K_n 是 $n-1$ 正则图.

二部图(bipartite graph) 是指其顶点集可以划分成两个子集 X 和 Y,使得每条边的一端点在 X 中,另一端点在 Y 中,二部图 G 记作 $G = (X, Y, E)$. 若 X 中每个顶点与 Y 中每个顶点之间恰有一条边,且 $X \neq \emptyset, Y \neq \emptyset$,则称二部图 $G = (X, Y, E)$ 为完全二部图(complete bipartite graph). 若 $|X| = m$, $|Y| = n$,则记这样的完全二部图为 $K_{m,n}$. 图 1.3.2 中的两个图都是二部图,其中立方体也是 3 正则图.

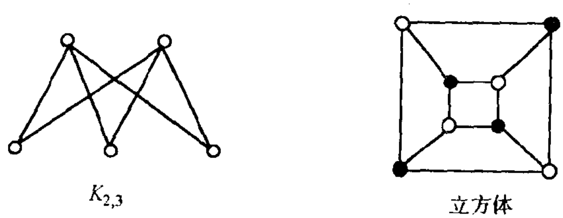


图 1.3.2 二部图

设 V' 是 $V(G)$ 的非空子集. 以 V' 为顶点集、以 $E' =$

$\{uv \in E(G) \mid u, v \in V'\}$为边集的$G$的子图称为$G$的由$V'$导出的子图，记作$G[V']$，简称为$G$的导出子图(induced subgraph).

设E'是$E(G)$的非空子集，顶点集为$V' = \{v \mid v$是E'中某条边的端点$\}$，边集为E'的G的子图称为G的由E'导出的子图，记作$G[E']$，简称为G的边导出子图(edge-induced graph).

图 1.3.3 画出了图G的两种不同类型的子图.

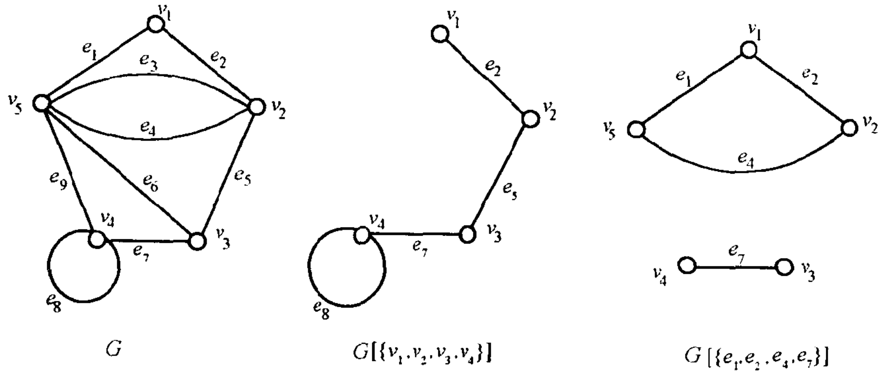


图 1.3.3　图的导出子图和边导出子图

设F是$E(G)$的非空子集，$G - F$表示从G中删去F中一切边后得到的图. 若$F = \{e\}$，则$G - \{e\}$简记作$G - e$. $G - F$只删去F中的边，并不删去任何顶点，因此，$G - F$必为G的支撑子图.

设S是$V(G)$的非空真子集，则$G - S$表示从G中删去S的所有顶点及其与S中顶点关联的一切边后得到的图. 同样，$G - \{v\}$简记为$G - v$. 显然，$G - S = G[V \setminus S]$.

对于图 1.3.3 中图G，设$F = \{e_2, e_3, e_5, e_8\}$，$S = \{v_1, v_3\}$，则$G - F$，$G - S$分别如图 1.3.4(a)，(b) 所示.

与从图中G中删去边集相对应的是添加边集. 若在图G中添加一条以G的顶点u和v为端点的边e，则得到的图记作$G + e$. 类似地可以定义$G + E'$.

设图$G_1 = (V_1, E_1)$，$G_2 = (V_2, E_2)$. 若$V_1 \cap V_2 = \emptyset$，则称G_1和G_2是不交的(disjoint)；若$E_1 \cap E_2 = \emptyset$，则称G_1和G_2是边不交的(edge-disjoint). G_1和G_2的并图(union)是指图$(V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$，记作$G_1 \cup G_2$. 若$G_1$和$G_2$是不交的，则把$G_1 \cup G_2$记作$G_1 + G_2$；若$G_1$与$G_2$至少有一个公共顶点，则定义$G_1 \cap G_2 = (V_1 \cap V_2, E_1 \cap E_2)$，称为$G_1$与$G_2$的交图(intersection).

图 1.3.5 给出了图的并运算与交运算.