胡崇慧 编

代数中的反例

陕西科学技术出版社

代数中的反例

胡崇慧 编

陕西科学技术出版社

代数中的反例
胡 崇 慧 编
陕西科学技术出版社出版
(西安北大街131号)
陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张4 字数 82,000
1983年6月第1版 1983年6月第1次印刷
印数 1—20,000
统一书号：7202·79 定价：0.46元

前　　言

“全等的两个三角形一定是相似的”，这一命题是正确的，那么我们就要加以严格证明；“相似的两个三角形一定是全等的”这一命题是不正确的，那么我们就要找出两个相似三角形并不全等，也就是说，举一个反例。由此看来，对于命题来说，给出证明和构造反例是同样重要的。

本书的主要内容是举出关于代数中的反例，包括高等代数和近世代数基础两部分。在前一部分中，环上的线性空间一节已超出高等代数的范围，但它对理解线性空间的结构不是无益的。在举反例的过程中，所涉及到的定理、命题的论证均可在高等代数和近世代数基础中找到。为了有助于对问题的理解，我们还加入了一些说明性的例题。

本书参考了张禾瑞教授著的《近世代数基础》及由王世强教授执笔的《关于代数教材的几点注记》的讲义等材料。

在编写过程中，张德荣同志精心审阅了全部手稿，提出许多改进意见；同时还得到我的老师和其他同志的帮助，谨此一并感谢。

希望同志们多加指正。

1982年6月

目　　录

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.c

高等代数部分

第一章　多　项　式

这一章，我们主要是讨论数域P上的一元多项式，并举出有关的反例，关于整除、最大公因式、互素、不可约、k重因式以及本原多项式这一系列的概念，都为大家所熟悉，就不一一叙述了。

下面就举一些相关的反例。

1. 如果$f(x)|g_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, n$，那么$f(x)$就能整除$g_1(x)$，$g_2(x)$，$\cdots$，$g_n(x)$的组合，即

$$f(x)|(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x)+\cdots+u_n(x)g_n(x))$$

反之不真。即$f(x)$能整除$g_1(x)$，$g_2(x)$，$\cdots$，$g_n(x)$的组合，未必$f(x)|$每一个$g_i(x)$。

例　　$f(x)=3x-2$

而　　$g_1(x)=x^2+1,\qquad g_2(x)=2x+3$

$u_1(x)=-2,\qquad u_2(x)=x$

显然　$f(x)|(u_1(x)g_1(x)+u_2(x)g_2(x))$

但　　$f(x)\nmid g_i(x)$

2. $P[x]$中的多项式$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是$d(x)$，那么有$P[x]$中多项式$u(x)$与$v(x)$使

$$d(x)=u(x)(f(x)+v(x)g(x)$$

但 i） **反之不真**。即上式成立，$d(x)$ 未必是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；

ii）满足上式的$u(x)$与$v(x)$**不是唯一的**。

例 i）　$f(x)=x$，　$g(x)=x+1$

有　$$x(x+2)+(x+1)(x-1)=2x^2+2x-1$$

其中　$u(x)=x+2$，　$v(x)=x-1$

而　$2x^2+2x-1$显然不是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

我们说，当

$$d(x)=u(x)f(x)+v(x)g(x)$$

而$d(x)$是$f(x)$与$g(x)$的一个公因式时，$d(x)$一定是 $f(x)$ 与 $g(x)$的一个最大公因式。

例ii）　$f(x)=x^2-1$，$g(x)=1$

则$d(x)=1$

$$\begin{cases}u(x)=-1\\v(x)=x^2\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(x)=0\\v(x)=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}u(x)=-2\\v(x)=2x^2-1\end{cases}$$

3.　多项式$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)(n>2)$互素时，并不一定两两互素。

例i）　$f_1(x)=x^2-3x+2$

$f_2(x)=x^2-5x+6$

$f_3(x)=x^2-4x+3$

是互素的，但

$$(f_1(x),\ f_2(x))=x-2$$

例ii) $f_1(x)=x^3-7x^2+7x+15$

$f_2(x)=x^2-x-20$

$f_3(x)=x^3+x^2-12x$

则 $(f_1(x),\ f_2(x),\ f_3(x))=1$

而 $(f_1(x),f_2(x))=x-5$

$(f_1(x),f_3(x))=x-3$

$(f_2(x),f_3(x))=x+4$

4. 不可约多项式 $p(x)|f(x)g(x)$ 则有 $p(x)|f(x)$ 或 $p(x)|g(x)$。

我们说，$p(x)$是不可约多项式的限制是必要的，否则，即可举出以下**反例**：

令 $p(x)=(x-1)^2$，$f(x)=x-1$，$g(x)=x-1$

显然有 $p(x)|f(x)g(x)$，但$p(x)\nmid f(x)$及$p(x)\nmid g(x)$

5. 若不可约多项式$p(x)$是$f(x)$的k重因式（$k\geqslant1$），则 $p(x)$是 $f'(x)$的 $k-1$ 重因式。

反之不真。举例如下：

令 $f(x)=x^3-3x^2+3x-3$

则 $f'(x)=3x^2-6x+3$

$x-1$是$f'(x)$ 的 2 重因式，但 $x-1$ 不是$f(x)$ 的 3 重因式，其实，就不是$f(x)$的因式。

6. 本原多项式不一定是不可约的。

例 x^2+3x+2 是本原的，可是

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

7. 设$f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且$g(x)$是本原的，若$f(x)=g(x)h(x)$，其中 $h(x)$ 是有理系数多项式，则 $h(x)$

一定是整系数的。

我们说，$g(x)$限制为本原的条件不可缺少，否则就有

$$f(x)=x^2+x, \qquad g(x)=2x+2$$

而
$$f(x)=g(x)h(x)$$

那么
$$h(x)=\frac{1}{2}x$$

8. *Eisenstein* 判别法告诉我们：

当
$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$$

是一个整系数多项式，存在一个素数p使得

i) $p\nmid a_n$;

ii) $p|a_i$, $i=0, 1, \cdots, n-1$;

iii) $p^2\nmid a_0$.

那么$f(x)$在有理数域上是不可约的。

可是当找不到这样的素数p，我们不能判定其是否可约。

例 $f_1(x)=x^2+3x+2$

$f_2(x)=x^2+1$

对$f_1(x)$及$f_2(x)$来说，找不到满足判别法条件的素数p，但$f_1(x)$可约，$f_2(x)$不可约。

9. $f(x)$在有理数域上可约，它不一定有有理根。

例 $f(x)=(x^2+1)^2$

这一章的最后，给出关于多项式函数的反例。

定义 如果在多项式$f(x)$与$g(x)$中，同次项的系数全相等，那么$f(x)$与$g(x)$就叫做**相等**，记为

$$f(x)=g(x)$$

定义 由一个多项式定义的函数称为数域P上的**多项式函数**。

即设 $$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$$
是$P[x]$中的多项式，α 是P中的数，在 $f(x)$ 的表达式中用 α 代 x 所得的数

$$a_0\alpha^n+a_1\alpha^{n-1}+\cdots+a_n$$

称为 $f(x)$当 $x=\alpha$ 时的值，记为 $f(\alpha)$。这样一来，多项式 $f(x)$就定义了一个数域P上的函数。

我们知道，两个多项式相等必然导出两个多项式函数相等；

反之，两个多项式函数相等是否必然导出两个多项式相等呢？

当P是数域时，回答是肯定的，其原因是数域中有无穷多个数。

当P是有穷多个元素时，回答是未必。

例 Z_2是以 2 为模的剩余类环。

考察Z_2上多项式

$$f(x)=x+1$$

与

$$g(x)=x^2+1$$

$$f(0)=g(0)=1$$

$$f(1)=g(1)=0$$

所以，这里的两个多项式函数$f(x)$与$g(x)$相等，但是，这里的两个多项式$f(x)$与$g(x)$不等。

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com

第二章　矩　　阵

矩阵乘法

定义　设$A=(a_{ij})mn$，$B=(b_{ij})np$

那么矩阵　$C=(c_{ij})mp$

其中

$$c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$$

称为A与B的乘积，记为

$$C=AB$$

注意，两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘。

矩阵乘法不适合交换律。

i）　$A_{mn}B_{np}$有意义，当$m\neq p$时，$B_{np}A_{mn}$没有意义。如$A_{43}B_{35}$有意义，而$B_{35}A_{43}$没有意义。

ii）　$A_{mn}B_{nm}$与$B_{nm}A_{mn}$都有意义，当$m\neq n$时，它们阶数不等，如$A_{43}B_{34}$是4阶的，$B_{34}A_{43}$是3阶的。

iii）　$A_{nn}B_{nn}$与$B_{nn}A_{nn}$的阶数都是n，也不一定相等。

例　$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}$，　$B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}8 & -1\\ 7 & -5\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

有关矩阵乘法的例题

1.存在零因子

即 $A\neq O$，$B\neq O$ 而有$AB=O$。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$

但 $AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$

一般说来，有

$$A_{n\times n}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$B_{n\times n}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\\\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\0 & 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

又如

$$A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}$$

而 $$AB=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

2. 上例中同阶矩阵相乘的情形里，$A\neq O$，$B\neq O$而有$AB=O$，同时有$BA=O$。

现举一例是$A\neq O$，$B\neq O$而有$AB=O$，而$BA\neq O$。

例 $$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

那么 $$AB=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

而 $$BA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}$$

和上例一样，可以举出同样结论的 n 阶阵的例。

3. 乘法消去律不成立。

$A\neq O$，$AB=AC$未必有$B=C$

例 $$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix},$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\qquad C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

显然，$A\neq O$，$AB=AC$，而 $B\neq C$

4. 一般说来

$$(AB)^k\neq A^kB^k$$

例

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\5 & -1\end{pmatrix},\qquad (AB)^2=\begin{pmatrix}4 & -2\\10 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}7 & 4\\12 & 7\end{pmatrix},\qquad B^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}8 & -14\\14 & -24\end{pmatrix}$$

所以

$$(AB)^2\neq A^2B^2$$

n 阶阵的例只要令

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & & & \\ 3 & 2 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1 & & & \\ 1 & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1\end{pmatrix}$$

可知

$$(AB)^k\neq A^kB^k$$

明显地，只要$AB=BA$，就有$(AB)^k=A^kB^k$。

在这一章以下的各例中，凡是遇到只举二阶矩阵的情形，都可以类似地扩展到 n 阶矩阵的情形：将所举的二阶矩阵放入要扩展的 n 阶矩阵的左上角，再将 $n-2$ 阶的单位矩阵放置右下角，其他位置均为零。凡此，我们就不再将扩展的 n 阶矩阵一一列举了。

5. 我们知道 $(AB)'=B'A'$，可是未必有 $(AB)'=$

$A'B'$.

例　仍取

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

而

$$A'=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix},\qquad B'=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\qquad A'B'=\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

故有

$$(AB)'\neq A'B'$$

6. $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，但未必有

$$(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$$

例

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

而

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix},\qquad B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix},\qquad (AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故有 $$(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$$

7. 不存在 n 阶矩阵 A、B 适合关系

$$AB-BA=E$$

可存在线性变换**A**、**B**适合关系

$$\mathbf{AB}-\mathbf{BA}=\mathbf{E}$$

请参看线性变换的有关例题。

8. 一般说来，对 n 阶矩阵 A 和 B，等式

$$|A+B|=|A|+|B|$$

不成立。

例 n 阶矩阵

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 0 & \\ & & & 1\end{pmatrix}$$

显然 $A+B=E$ 而 $|A+B|=|E|=1$

又 $|A|+|B|=0+0=0$

9. n 阶矩阵 A、B，且 $A^2=E$，$B^2=E$，未必有 $(AB)^2=E$。

例如当 $n=2$ 时，

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

试读结束，需要全本PDF请购买 www.ertongbook.com