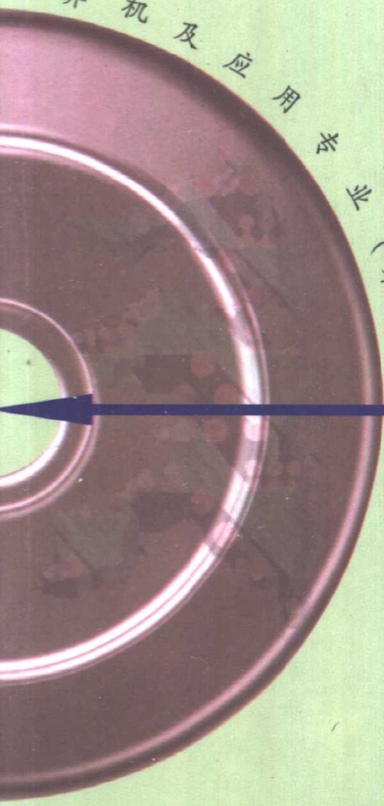
全国高等教育自学考试应试指导丛书

中国计算机函授学院图书编写中心 组编

计算机及应用专业（本科）



离散数学自考应试指导

主编 朱怀宏

南京大学出版社

离散数学
自考应试指导

[illegible]

中国计算机函授学院图书编写中心　组编

全国高等教育自学考试应试指导丛书

计算机及应用专业(本科)

离散数学自考应试指导

主　编　朱怀宏

南　京　大　学　出　版　社

内容简介

本书是按《离散数学自学考试大纲》的要求编写的，包括离散数学中的五部分内容：命题演算，谓词演算，集合与函数，代数结构，图论。每一部分均先列出基本概念，然后按照自学考试的四种考题形式（单项选择题、填空题、计算题、证明题）详解了一些典型例题，并用通俗的语言对各题的关键点给予了注解。

本书主要是针对离散数学自考者的辅导，为自习者提供帮助，另对各类离散数学的学习者来说，也是一本辅导、复习、迎考的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

离散数学自考应试指导/朱怀宏主编．—南京：南京大学出版社，2003

ISBN 7-305-02169-5

Ⅰ．离…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．离散数学-高等教育-自学考试-自学参考资料　Ⅳ．O158

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 000907 号

书　　名　离散数学自考应试指导
主　　编　朱怀宏
丛书主编　牛允鹏　胡学联
责任编辑　史德芬
出版发行　南京大学出版社
地　　址　南京汉口路 22 号　邮编　210093　电话　025-3593695
印　　刷　合肥学苑印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　787×1092 1/16　印张　10.75　字数　258　千字
版　　次　2003 年 1 月第 1 版　2003 年 1 月第 1 次印刷
定　　价　18.00 元
ISBN 7-305-02169-5/O·261

组编前言

国家教育部考试中心决定，从2000年开始，全国高等教育自学考试正式使用新编的大纲和教材。

为适应新调整的考试计划及密切配合新大纲、新教材开展助学辅导，中国计算机函授学院利用多年积累的自考教学辅导资源和经验，全面系统地剖析了有关各门课程新大纲和教材的内容体系，重新组织编写了一套《全国高等教育自学考试应试指导丛书》，推向全国，以满足考生之急需，适应社会之需要。

这套丛书堪称"通关必读"，丛书的作者在书中融入了自己多年从事自考教学辅导的直接经验，他们既是本专业的教授，又是自考辅导的专家，二者集于一身，使该套丛书极具实用性和针对性。他们精心组织、细心筹划、用心编撰，从而确保该套丛书质量上乘。

编写该套丛书的指导思想是切实解决考生自学应试中的三个问题：

(1)在自学过程中起到答疑解惑作用，帮助考生顺利阅读，掌握教材内容；

(2)帮助考生抓住课程重点、难点，不入迷津；

(3)帮助考生理清课程主线，建立清晰的知识结构体系，在掌握知识点的前提下，沉着应战，顺利过关。

对于广大应试者而言，请一位好"教师"，找一位好"辅导"，尤为重要。这套《自学考试指导丛书》，可望成为你攻克一门又一门课程、克服一个又一个难关的良师益友，帮助你扫清学习中的障碍，增强你的必胜信心，伴随你走向成功的彼岸。

我们真诚地为广大考生奉献这份精品、真品。愿广大考生早成夙愿！

2002年10月

编 者 的 话

离散数学是现代数学的一个重要分支，是计算机专业的一门核心基础课程，是计算机科学与技术的基础理论之一。随着软、硬件技术的快速发展，离散数学作为核心基础课的学习显得非常重要，通过离散数学的教学，不仅能为学生的专业课学习及将来所从事的软、硬件开发和应用研究打下坚实的基础，同时也能培养其抽象思维和严格逻辑推理的能力。

但是，由于与传统的高等数学教育相比，离散数学是一门相对年轻的课程，适合于不同层次、不同需求的教材相对较少，尤其是对离散数学的辅导用书就更少，这对于学习，特别是对自学考试的朋友来说的确是有很大的难度。而本辅导书可为离散数学的学习者，特别是参加自学考试等应试者提供较大的帮助。

根据自学考试的特点，对于基本要求中的概念、理论，立足于实际需要，并不要求对相应的数学理论去作详细的深究，只要求根据教材及大纲提供的基础知识，即基本术语（概念、名词解释）、基本结论、基本定理、基本的运算和论证的技巧，以及它们在计算机中的应用，获取解决实际问题的方法及应试技巧。

离散数学中有很多定义、定理、解题方法等均用非常简洁的数学语言给出，对初学者来说理解起来有一定的难度，本书针对此问题用形象自然的语言来解释，在一定程度上化解了难度，使初学者通过等价的通俗文字看懂相应内容，使原来要长时间反复阅读、理解很多遍才能理解的文字，现在只要花较少的时间就能理解，大大地节省了广大自学者的宝贵时间和精力。本书原则上按照教学大纲中的次序进行辅导，方便读者配合教材使用。

现在有关离散数学的教材和参考书往往各成体系，所用符号不统一，为了使广大自考朋友顺利地阅读，本书在内容选取、符号应用方面，严格参照由左孝凌先生主编的全国高等教育自学考试计算机及应用专业（独立本科段）的指定教材《离散数学》（经济科学出版社出版）一书中的规定。

本书在选题方面选择了一些传统的经典习题，包括一些常作为考题的类似习题，特别选择了由左孝凌先生等人编著的《离散数学理论·分析·题解》、由孙俊秀先生等人编著的《离散数学标准化题解》等书中的一些有代表性的习题。在此对各位专家致以深切的谢意。

最后，作者诚恳地期待各位专家及读者对本书的批评和指正。

主 编

2002 年 10 月

目　　录

第一部分

内容概要与典型题解

在这一部分中，以考试大纲规定的考核知识点为纲，以最简捷的文字简明扼要地阐述了各知识点的基本概念、原理和方法，并围绕相关知识点组织了大量典型例题，以增强读者对概念的理解和提高解题能力。

读者可将这部分内容作为复习提纲来使用，它针对性强，能帮助考生从繁杂的内容中理清头绪，从而在复习迎考冲刺阶段做到事半功倍。

第 1 章　命题演算

数理逻辑的任务是采用数学方法研究抽象的思维规律,研究的中心问题是推理,而推理的基本要素是命题,学习本章首先要深刻理解命题的概念,理解原子命题与复合命题的关系,在了解复合命题的基础上,理解联结词的定义。命题演算中两个重要内容是:① 命题公式的范式表示,主要是命题公式化简与主范式表示;② 命题的推理理论,主要是熟悉直接推理与间接推理这两种方法。

本章重点是命题概念及其表示、命题公式化简、主范式及其互化、P 规则、T 规则以及 CP 规则,难点是推理理论及应用。

1.1　命题概念,要求达到"领会"层次

1.1.1　内容概要

1. 命题与真值的概念

命题　具有唯一真值的陈述句称作命题,亦简称为语句。

真值　一个命题总具有一个"值",称为真值。真值只有真和假两种,分别记为 T(或 1)和 F(或 0)。

原子命题　不能分解为更简单的陈述句称为原子命题(即原子命题不能再被分割成为更小的命题)。

命题标识符　表示命题的符号,常用大写字母 A、B…,或用带下标的大写字母,或用数字来表示。

命题常量　一个命题标识符表示确定的命题,称该标识符为命题常量。

命题变元　命题标识符如仅是表示任意命题的位置标志,则称为命题变元。

原子变元　当命题变元表示原子命题时,该变元称原子变元。

2. 复合命题与联结词关系

复合命题　用联结词把若干个原子命题联结(复合)而成的命题称为复合命题。

联结词　是将命题联结成新命题的方式(符号),将命题联结词用符号表示则称为命题运算符。

常用联结词有:

① 否定　设 P 为一命题,P 的否定是一个新的命题,记作 $\neg P$。若 P 为 T(真),$\neg P$ 为 F(假);若 P 为 F,$\neg P$ 为 T。

② 合取　两个命题 P 和 Q 的合取是一个复合命题,记作 $P \wedge Q$。当且仅当 P、Q 同时

为 T 时，$P \wedge Q$ 的真值为 T；在其他情况下，$P \wedge Q$ 的真值为 F。

③ 析取　两个命题 P 和 Q 的析取是一个复合命题，记作 $P \vee Q$。当且仅当 P、Q 同时为 F 时，$P \vee Q$ 的真值为 F，否则 $P \vee Q$ 的真值为 T。

④ 条件　给定两个命题 P 和 Q，其条件命题是一个复合命题，记作 $P \rightarrow Q$。当且仅当 P 的真值为 T，Q 的真值为 F 时，$P \rightarrow Q$ 的真值为 F；否则 $P \rightarrow Q$ 的真值为 T。

⑤ 双条件　给定两个命题 P 和 Q，其复合命题记作 $P \leftrightarrows Q$，称双条件命题。当 P 和 Q 的真值相同时，$P \leftrightarrows Q$ 的真值为 T；否则 $P \leftrightarrows Q$ 的真值为 F。

3. 命题公式与联结词的简化

合式公式（又称命题公式或简称公式）用来进行命题演算。

其生成规则为：

① 单个命题变元本身是一个合式公式。

② 如果 A 是合式公式，那么 $\neg A$ 是合式公式。

③ 如果 A 和 B 是合式公式，那么 $(A \wedge B)$、$(A \vee B)$、$(A \rightarrow B)$ 和 $(A \leftrightarrows B)$ 都是合式公式。

④ 当且仅当有限次地应用①、②、③所得到的包含命题变元，联结词和圆括号的符号串是合式公式。

☞ 提个醒

书写命题公式时为了减少圆括号的使用数量，约定最外层圆括号可以省略，若根据命题公式的基本等价式（等式），对公式真值判定无影响的情况下，有些括号也是可以省略的。例如，根据析取结合律：

$((P \vee Q) \vee R) = (P \vee (Q \vee R))$

往往可以简写成 $P \vee Q \vee R$。

翻译　把自然语言中陈述的命题（语句）符号化为数理逻辑的公式，称为翻译。

优先次序　对联结词运算规定优先级为：$\neg$，$\wedge$，$\vee$，$\rightarrow$，$\leftrightarrows$。

子公式　设 A_i 是公式 A 的一部分，且 A_i 是一个合式公式，称 A_i 是 A 的子公式。

1.1.2　典型题解

一、单项选择题

1　设 P：他将去学校，Q：他有时间，命题"他将去学校，仅当他有时间。"可符号化为（　　）。

A) $Q \rightarrow P$　　B) $P \rightarrow Q$　　C) $P \leftrightarrows Q$　　D) $\neg Q \vee \neg P$

【分析】 命题并没有指明，有时间就去学校，所以不能选 A)。命题只是说去学校一定是有时间的情况，但并没有肯定有时间的情况都一定去学校。

【解答】 B)

2　下面命题中（　　）是命题"2 是偶数或 -3 是负数"的否定选题。

A) 2 是偶数或 -3 不是负数　　B) 2 不是偶数且 -3 不是负数

C) 2 是奇数且 -3 不是负数　　　　D) 2 是奇数或 -3 不是负数

【分析】设命题 P 为"2 是偶数"，Q 为"-3 是负数"。题中所给复合命题为：$P \vee Q$，若取其否定：$\neg(P \vee Q) = \neg P \wedge \neg Q$，故选 B)。

【解答】B)

3 下列语句中(　　)是真命题。

A) 严禁吸烟　　　　B) 我正在说谎

C) 如果 $1+2=3$，那么雪是黑的　　　　D) 如果 $1+2=5$，那么雪是黑的

【分析】选项 A) 不是命题(不是陈述句)，B) 是矛盾句，无法为真，选项 C)、D) 是"如果 … 则 …"形式的条件命题。此类命题在后件为假时，只有前件为假时，命题才能为真。此处设命题 P 为"$1+2=5$"，Q 为"雪是黑的"，P、Q 均为假，则有 $P \to Q$ 为真命题。如果选 C)(按通常习惯常会选 C)，此时命题 P 为"$1+2=3$"，值为 T，Q 为"雪是黑的"，值为 F，而此时 $P \to Q$ 为 F(假)，不是真命题，故要根据命题联结词的实际含义来选择。

【解答】D)

4 下面联结词运算中不可交换的是(　　)。

A) $\wedge$　　B) $\vee$　　C) $\to$　　D) $\leftrightarrows$

【分析】上述联结词根据其定义，只有 $\to$ 不满足交换律。

【解答】C)

二、填空题

1 P 是 A 的子公式，P 应满足________且________。

【分析】这里要掌握子公式的定义，要满足两个方面。

【解答】P 是 A 的一部分　P 本身也是公式

2 语句"$x+y>6$" ________命题。

【分析】此语句无法确定其真值，故不是命题。

【解答】不是

3 "学习有如逆水行舟，不进则退"。设 P：学习如逆水行舟，Q：学习进步，R：学习退步。

则命题符号化为________。

【分析】此处有：学习不进步为 $\neg Q$，不进则退为 $\neg Q \to R$，整体含义 P 是条件联结符的前件，故符号化为：$P \to (\neg Q \to R)$。

【解答】$P \to (\neg Q \to R)$

三、变换题

1 将下列命题符号化。

(a) 朱云身体好，学习也好。

(b) 如果 a 和 b 是偶数，则 $a+b$ 是偶数。

(c) 四边形 $ABCD$ 是平行四边形,仅当其对边平行。

(d) 如果鸟是会飞的,则汽车是交通工具。

(e) 明天小张将去演出,或者明天小王将去演出。

(f) 选张三或李四中的一人当团总支书记。

【分析】 上述是各类联结词的用法举例。

(a) 当 P 与 Q 都为真值时,$P \wedge Q$ 才为真。

(b)、(d) 是条件命题,当且仅当 P 为真,Q 为假时,$P \to Q$ 才为假(其他情况均为真),相当于"如果 P 则 Q"。在日常生活中,"如果 P 则 Q"的前件 P 与后件 Q 间必须有因果关系,但是在条件命题 $P \to Q$ 中则不一定要求如此。例如(d)中的前件 P 和后件 Q 均为真,$P \to Q$ 也为真,但是 P 与 Q 之间并无因果关系。

(c) 是双条件命题,表示 P 等价 Q 当 P、Q。同时为真或同时为假时,$P \leftrightarrows Q$ 为真,否则为假。本例中 P、Q 均为真,$P \leftrightarrows Q$ 也为真。在日常生活中 P 与 Q 等价中的 P、Q 间存在逻辑关系,但对 $P \leftrightarrows Q$ 则不一定要求如此。例如:设 P 为"南京是个历史名城",Q 为"南京大学是一所有名的大学",则 $P \leftrightarrows Q$ 表示"南京是个历史名城当且仅当南京大学是一所有名的大学"。此等价式(双条件)的前、后件 P、Q 均为真,因此该命题是真的,但是 P 和 Q 间是没有必然的逻辑联系。

(e) 是析取,$P \vee Q$ 表示当 P 或者 Q 只要有其中之一为真时,$P \vee Q$ 就为真,这里小张和小王中只要有一个明天去演出(当然也可以两个都去演出),则 $P \vee Q$ 即为真,这称为"可兼的或"。

(f) 所表示意思是张三、李四只有一人去当团支部书记,本例中的"或"是"不可兼的或",同(e)不一样,不能用 $P \vee Q$ 来表示,而应符号化为 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$。

【解答】 (a) 设 P:朱云身体好;Q:朱云学习好。 $P \wedge Q$

(b) 设 P:a 和 b 是偶数;Q:$a + b$ 是偶数。 $P \to Q$

(c) 设 P:四边形 $ABCD$ 是平行四边形;Q:四边形 $ABCD$ 的对边平行。 $P \leftrightarrows Q$

(d) 设 P:鸟是会飞的;Q:汽车是交通工具。 $P \to Q$

(e) 设 P:明天小张将去演出;Q:明天小王将去演出。 $P \vee Q$

(f) 设 P:选张三当团总支书记;Q:选李四当团总支书记。 $(P \wedge \neg Q) \vee (\neg P \wedge Q)$

2 指出下列语句哪些是命题,哪些不是命题。如果是命题,指出它的真值。

(a) 北京是中国的首都。

(b) 后天我去公园。

(c) 请勿吸烟。

(d) 不存在最小负数。

(e) 如果我掌握了英语、法语,那么学习其他欧洲语言就容易了。

(f) $y = 6$。

(g) $2 + 3 \geqslant 8$。

(h) 我们要努力工作。

(i) 复印机有空吗?

(j) 对不起，请你让一下。

(k) 祝你一路顺风。

(l) 菊花总是在春天开放。

【解答】(a) 是命题，真值为 T。

(b) 是命题，真值要根据具体情况确定。

(c) 不是命题。

(d) 是命题，真值为 T。

(e) 是命题，真值为 T。

(f) 不是命题。

(g) 是命题，真值为 F。

(h) 不是命题。

(i) 不是命题。

(j) 不是命题。

(k) 不是命题。

(l) 是命题，真值为 F。

☞ 提个醒

命题表示一个能判别真假的语句。一般，只有陈述句才能判别真假；严格地讲，所以，命题是简单陈述句(对应原子命题) 与复合陈述句(对应复合命题)。

3 将下列复合命题分成若干原子命题。

(a) 今天天气炎热，且有雨。

(b) 天气炎热但湿度较低。

(c) 天正在下雨或湿度很高。

(d) 如果你不去比赛，那么我也不去比赛。

(e) 我既不看电视，也不去看电影，我在做作业。

(f) 老王或小张是改革者。

【解答】(a) P:今天天气炎热，Q:今天有雨。 $P \wedge Q$

(b) P:天气炎热，Q:湿度较低。 $P \wedge Q$

(c) P:天正在下雨，Q:湿度很高。 $P \vee Q$

(d) P:你去比赛，Q:我去比赛。 $\neg P \rightarrow \neg Q$。

(e) P:我不看电视，Q:我不看电影，R:我不在做作业。 $P \wedge Q \wedge \neg R$。

(f) P:老王是改革者，Q:小张是改革者。 $P \vee Q$。

☞ 提个醒

命题中的肯定和否定应看原子命题是如何描述的，$\neg P$ 表示对 P 的否定，P 本身也可以定义为否定的。例如(e) 中 P 如果改为“我看电视”，则在后面要以 $\neg P$ 出现在复合命题中，同理 R 已定义为我不在做作业，如要按题中含义表示在做作业，就要用 $\neg R$ 表示在复合命题中。

4 判别下列公式哪些是合式公式,哪些不是合式公式。

(a) $(Q \rightarrow R \wedge S)$

(b) $(P \rightleftarrows (R \rightarrow S))$

(c) $((\neg P \rightarrow Q) \rightarrow (Q \rightarrow P)))$

(d) $(RS \rightarrow K)$

(e) $((P \rightarrow (Q \rightarrow R)) \rightarrow ((P \rightarrow Q) \rightarrow (P \rightarrow R)))$

【解答】(a) 是合式公式($\wedge$ 联结词优先级次序优先于 $\rightarrow$)。

(b) 是合式公式。

(c) 不是合式公式(括号不配对)。

(d) 不是合式公式(RS 之间缺联结词)。

(e) 是合式公式。

5 根据定义,说明下列公式如何形成合式公式。

(a) $(A \rightarrow (A \vee B))$

(b) $((\neg A \wedge B) \wedge A)$

(c) $((\neg A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$

【分析】本题要求熟悉合式公式的组成方法。

【解答】(a) A 是合式公式,$(A \vee B)$ 是合式公式,$(A \rightarrow (A \vee B))$ 是合式公式。这个过程可简记为:

$A;(A \vee B);(A \rightarrow (A \vee B))$

同理可有:

(b) $A;\neg A;(\neg A \wedge B);((\neg A \wedge B) \wedge A)$

(c) $A;\neg A;B;(\neg A \rightarrow B);(B \rightarrow A);((\neg A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$

1.2　命题公式化简,要求达到“简单应用”层次

1.2.1　内容概要

1. 命题等价式与蕴含式的定义

<u>指派</u>　设 P 为一命题公式,$P_1,P_2,\cdots P_n$ 为出现在 P 中的所有命题变元,对 $P_1,P_2,\cdots P_n$ 指定一组真值称为对 P 的一种指派。

☞ **提个醒**

若指定的一种指派,使 P 的值为真,则称这组值为<u>成真指派</u>。

若指定的一种指派,使 P 的值为假,则称这组值为<u>成假指派</u>。

含 n 个命题变元的命题公式,共有 2_n 组指派。

<u>真值表</u>　将命题公式 P 在所有指派下取值的情况列成表，称为 P 的真值表。真值表中，真值 T 和 F，可分别用 1 和 0 代替。

<u>命题等价</u>　给定两个命题公式 A 和 B，设 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 为所有出现于 A 和 B 中的原子变元，若给 $P_1, P_2, \cdots P_n$ 任一组真值指派，A 和 B 的真值都相同，称 A 和 B 是等价的，记作 $A \Rightarrow B$。

两个重要的常用等值公式：

①$(\neg P \vee Q) \Rightarrow (P \rightarrow Q)$

②$(P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q) \Rightarrow (P \leftrightarrows Q)$

<u>重言式</u>　（或称永真式）　设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为真，则称公式 A 为重言式。

<u>矛盾式</u>　（或称永假式）　设 A 为一命题公式，若 A 在它的各种指派情况下，其取值均为假，则称公式 A 为矛盾式。

<u>可满足式</u>　设 A 为一命题公式，若 A 在各种指派下至少存在一组成真指派，则称 A 为可满足式。

【定理】设 X 是合式公式 A 的子公式，若有 Y 也是一个合式公式，且 $X \Rightarrow Y$，如果将 A 中的 X 用 Y 置换，得到公式 B，则 $A \Rightarrow B$。

<u>等价式</u>　设 A 和 B 为两个命题公式，$A \Rightarrow B$，当且仅当 $A \Rightarrow B$ 为一个重言式。

<u>蕴含式</u>　当且仅当 $P \rightarrow Q$ 是一个重言式时，称"P 蕴含 Q"，并记作 $P \Rightarrow Q$，亦称作永真条件式。

蕴含式具有以下性质：

① 对任意公式 A，有 $A \Rightarrow A$。

② 对任意公式 A, B 和 C，若 $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow C$。

③ 对任意公式 A, B 和 C，若 $A \Rightarrow B, A \Rightarrow C$，则 $A \Rightarrow (B \wedge C)$。

④ 对任意公式 A, B 和 C，若 $A \Rightarrow C, B \Rightarrow C$，则 $A \vee B \Rightarrow C$。

【定理】设 P, Q 为任意两个命题公式，$P \Rightarrow Q$ 的充分必要条件是：$P \Rightarrow Q, Q \Rightarrow P$。

2. 构造真值表证明等价式

① 将所有指派列在真值表中，在同一组指派下，$A \Leftrightarrow B$ 式的两边 A 和 B 取值相同。

② 可用真值表指派的方法证明 $P \rightarrow Q$ 是重言式，从而证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$。

3. 不构造真值表证明蕴含式与等价式

可用以下两种方法来证明蕴含式 $P \Rightarrow Q$：

① 对于 $P \rightarrow Q$，除 P 的真值取 T、Q 的真值取 F 外，其余情况 $P \rightarrow Q$ 真值都为 T。

故要证 $P \Rightarrow Q$，只需指定 $P \rightarrow Q$ 的前件 P 真值为 T，若由此推出 Q 的真值亦为 T，则 $P \rightarrow Q$ 是重言式，即 $P \Rightarrow Q$ 成立。

② 由于$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow (\neg Q \rightarrow \neg P)$，所以要证 $P \rightarrow Q$ 是重言式，只需证$\neg Q \rightarrow \neg P$ 是重言式，亦即证明假定 Q 的真值取 F（$\neg Q$ 为 T），由此推出 P 的真值为 F（$\neg P$ 为 T），即推证了：

$\neg Q \Rightarrow \neg P$ 成立，即 $P \Rightarrow Q$ 成立。

1.2.2　典型题解

一、单项选择题

1　命题公式$(P \wedge (P \rightarrow Q)) \rightarrow Q$ 是(　　)。