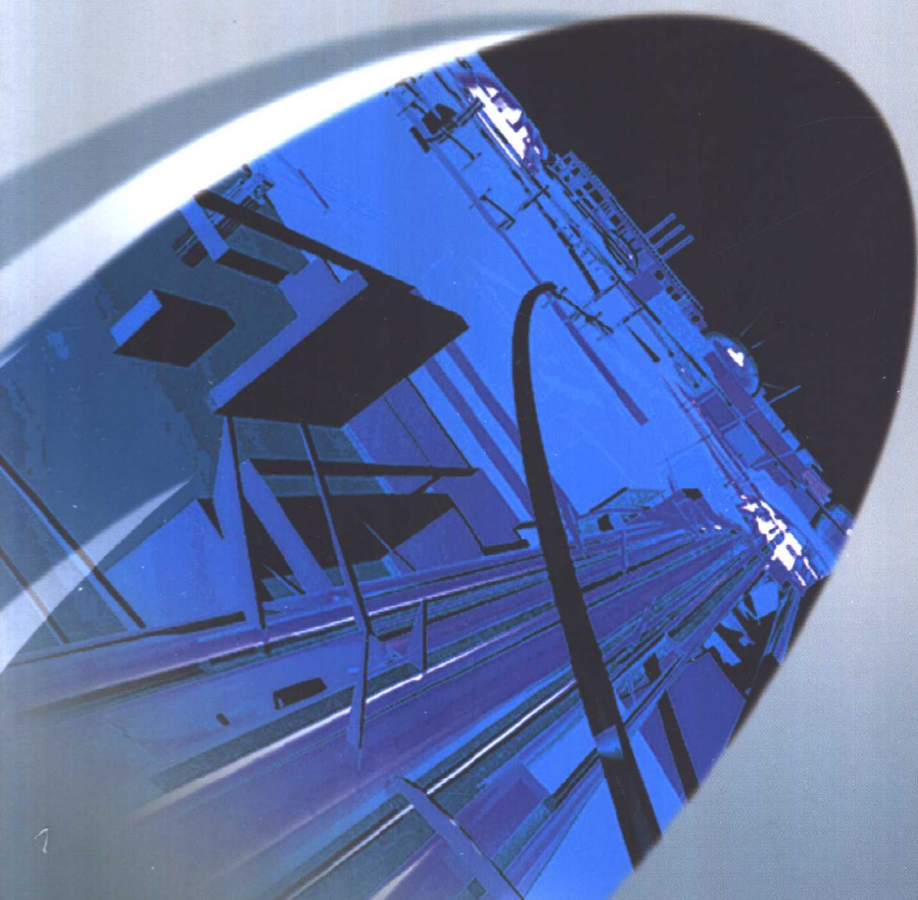


高等师范院校小学教育专业数学教材

# 大学数学

课程教材研究所 编  
数学课程教材研究开发中心



人民教育出版社

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

# 大学数学

（上册）

清华大学数学科学中心



高等师范院校小学教育专业数学教材

# 大 学 数 学

课 程 教 材 研 究 所 编  
数学课程教材研究开发中心

人民教育出版社

### 图书在版编目 (CIP) 数据

大学数学/人民教育出版社中学数学室编. —北京:  
人民教育出版社, 2003  
高等师范院校小学教育专业数学教材  
ISBN 7-107-17053-8

- I. 大...
- II. 人...
- III. 高等数学—师范大学—教材
- IV. 013

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2003) 第 078075 号

人民教育出版社出版发行

(北京沙滩后街 55 号 邮编: 100009)

网址: <http://www.pep.com.cn>

人民教育出版社印刷厂印装 全国新华书店经销

2003 年 9 月第 1 版 2003 年 9 月第 1 次印刷

开本: 890 毫米×1 240 毫米 1/32 印张: 12.5

字数: 312 千字 印数: 0 001 ~ 3 000 册

定价: 17.70 元

## 内 容 简 介

本书选取高等数学中最基础的、在各领域中有广泛应用的微积分、线性代数和概率统计三部分为学习内容。本书本着简明、易学、实用的原则，选材精当，结构严谨，叙述简明。是一部切合高等师范院校文科数学教学需要的教材。

人民教育出版社 课程教材研究所  
高等师范院校小学教育专业数学教材编写委员会

总主编: 王 元

编委: (以姓氏笔画为序)

马 凯	方明一	王长沛	王 蕾	田宏忠	邓映蒲
刘凤翥	刘京莉	刘思清	刘效丽	刘意竹	孙玉宝
孙 圻	江汉勋	李同贤	纪运如	宋 兵	陈 耘
张 艾	林奇青	林炳生	金成樾	郇中丹	胡光铎
胡永建	周 辉	章建跃	高 荆	唐京伟	黄世立
黄浪波	曾文艺	曾庆黎	梅全雄	陶晓永	舒振文
梁楚材	董丽波	傅耀良	蔡俊亮	颜其鹏	魏 纶

策划: 颜其鹏

本册主编: 刘凤翥

编写人员:

曹 磊 刘凤翥 刘京莉 蔡俊亮

特约审稿:

吴品三 王长沛 孙 圻 纪运如

责任编辑: 颜其鹏 胡永建

# 总 序

我国小学教师的职前培养，现在面临两个重大转变。第一，面临师范教育结构调整。小学教师的合格学历将由中等师范学校毕业提高到大专以上水平。根据《高等教育法》有关规定，招收高中阶段毕业生，实行三年专科教育和四年本科教育，是我国培养专科以上学历小学教师的主要形式。第二，基础教育，包括小学教育，正处于重大改革的初期。2001年教育部颁发了《基础教育课程改革纲要(试行)》，大力推进基础教育课程改革，调整和改革基础教育的课程体系、结构、内容，构建符合素质教育要求的新基础教育课程体系，课程改革引发了教育观念、教学方法的变革。教育改革的新形势向小学教师的职前培养提出了全新的要求。

在这样的背景之下，2003年1月，教育部师范教育司制订的《三年制小学教育专业课程方案(试行)》正式颁布，针对教师专业化的国际趋向和小学教师的培养特点，提出了一整套培养高中起点三年制大专学历小学教师的课程设计方案，并着手组织编写小学教育专业教材。

长期以来一直承担着师范教育课程教材研究、开发和编写任务的人民教育出版社、课程教材研究所，根据我国高师小学教育专业课程教材改革的需要，组织了“高师小学教育专业数学课程设置与教材建设”课题组，邀请了中国科学院、北京大学、北京师范大学、首都师范大学、北京教科院、北京教育学院、华中师范大学等单位的专家学者和全国各地的资深师范教育专家和教师参加。本课题组对我国高等师范教育的新兴门类——小学教育专业的数学课程设置和数学教材建设进行了大量的调查研究，对新世纪国际小学教师培养中数学课程体系的发展趋势进行了探讨，并总结了我国十多年

116994/15

来各地高师小教大专数学课程、教材和教学改革试验的成功经验，从而构建了能反映我国小学教师培养体制改革的时代要求、建立小学教师合理数学知识结构和教育素养的数学课程教材体系，其中有些科目如现代数学概论、数学实践、常用数学软件、数学建模和数学文化等还填补了我国高师小学教育专业数学教材的空白。在此基础上编写了这套高等师范小学教学专业数学教科书。

这套教科书充分吸收了以往培养小学教师各级各类专用数学教材的优点，努力突出数学课程教材的时代性和前瞻性，贴近国际教育改革和我国基础教育课程改革的前沿，体现新的教育理念；力求体现高等小学教育的基础性、专业性和师范性，促进小学教师专业化水平的提高；既注重数学素养的提高，又注意体现人文精神，还具有可读性和可操作性；同时延续了中等师范教育教材注重教学技能和创新能力的培养的良好传统。

这套小学教育专业数学教科书包括：必修课《大学数学》、《高等数学基础（上、下）》、《现代数学概论》、《数学实践》、《小学数学教学与研究》；选修课《数学文化》、《初等数论》、《常用数学软件》、《数学建模》、《小学数学竞赛指导》、《离散数学》和《数学思想方法》等十二科十三册教材（后两科 2004 年出版），供高师小学教育专业学生和小学教师继续教育学员使用。

本套书在研究、编写过程中得到了全国高等师范院校数学教育研究会小教培养工委的指导和帮助，还得到了大量一线教师的帮助和支持。

王元  
2003年7月14日



## 编写说明

《大学数学》是根据教育部师范司制订的《三年制小学教育专业课程方案(试行)》编写的专业必修课教材,供非数学和科学方向的学生使用。

本书针对读者为教育类文科生的特点,为适应基础教育课程改革综合化的趋势,贯彻使师范生文理兼通,学有专长,一专多能的精神,以简明、易学、实用;减少细节、突出思想为原则,选择高等数学中最基础的、在各领域中有广泛应用的内容编写而成。内容包括微积分、线性代数和概率与统计三部分。学习本教程大约需用90学时,其中微积分约需45学时,线性代数约需20学时,概率与统计约需25学时。为适应不同读者的需要,书中部分内容加了\*号。

本书由人民教育出版社组织编写,北京大学数学科学学院曹磊编写第一篇微积分第一、二章,北京教科院刘凤翥编写第一篇第三章,北京师范大学刘京莉编写第二篇线性代数全部,北京师范大学蔡俊亮编写第三篇概率与统计全部。全书由刘凤翥统稿和定稿。

本书初稿完成后,曾请北京教育学院王长沛、福州师范学校孙圻、长春师范学院纪运如、北京师范大学胡永建诸先生对书稿进行了审阅。北京师范大学吴品三先生仔细地审阅了本书初稿,提出了许多宝贵的意见。他们为提高本书的质量付出了辛勤的劳动,编者为此对各位专家表示深深的谢意。

由于时间仓促且编者水平有限,书中错误和疏漏之处一定不少,诚恳地希望各界读者批评指正。

编者

2003年6月于北京

# 目 录

## 第一篇 微 积 分

<b>第一章 函数、极限与连续</b> .....	1
第一节 函数 .....	1
第二节 极限 .....	21
第三节 两个重要极限 .....	37
第四节 函数的连续性 .....	44
<b>第二章 一元函数的微分学</b> .....	57
第一节 导数与微分 .....	57
第二节 求导法则和基本的导数公式 .....	72
第三节 高阶导数 .....	82
第四节 微分中值定理 .....	88
第五节 洛必达 (L'Hospital) 法则 .....	93
第六节 函数的极值与最值 .....	100
<b>第三章 积分</b> .....	110
第一节 定积分的概念 .....	110
第二节 定积分的性质和微积分基本定理 .....	119
第三节 不定积分 .....	122
第四节 不定积分的运算法则 .....	128
第五节 不定积分的换元积分法 .....	132
第六节 不定积分的分步积分法 .....	136
第七节 定积分的计算及广义积分 .....	139

第八节 定积分的简单应用 .....	146
阅读材料: 微积分简史 .....	156

## 第二篇 线性代数

<b>第四章 行列式</b> .....	159
第一节 行列式的意义 .....	159
第二节 行列式的性质和计算 .....	166
第三节 克莱姆法则 .....	177
<b>第五章 矩阵</b> .....	183
第一节 矩阵及其计算 .....	183
第二节 逆矩阵 .....	196
第三节 矩阵的秩 .....	208
<b>第六章 向量组的线性相关性</b> .....	214
第一节 $n$ 维向量空间 .....	214
第二节 向量间的线性关系 .....	216
第三节 向量组的秩 .....	220
<b>第七章 线性方程组</b> .....	227
第一节 消元法 .....	227
第二节 线性方程组解的判定及解法 .....	233
阅读材料: 线性代数应用举例 .....	239

## 第三篇 概率论与数理统计

<b>第八章 随机事件与概率</b> .....	244
第一节 事件的直观意义及其运算 .....	244
第二节 概率的直观意义及其运算 .....	252
第三节 全概率公式与逆概公式 .....	261

第四节	事件的相互独立性 .....	267
	阅读材料: 概率论的创立与发展 .....	273
<b>第九章</b>	<b>随机事件及其分布</b> .....	275
第一节	随机变量的概念 .....	275
第二节	离散型随机变量及其概率分布 .....	277
第三节	随机变量的分布函数 .....	281
第四节	连续型随机及其概率密度 .....	284
第五节	随机变量函数的分布 .....	294
	阅读材料: 概率概念的产生与演变 .....	300
<b>*第十章</b>	<b>随机变量的数字特征</b> .....	302
第一节	数学期望 .....	302
第二节	方差与标准差 .....	308
	阅读材料: 随机变量的数字特征 .....	315
<b>第十一章</b>	<b>数理统计初步</b> .....	316
第一节	基本概念 .....	316
第二节	参数估计 .....	327
*第三节	假设检验 .....	338
	阅读材料: 数理统计学的发展 .....	350
<b>答案及提示</b>	.....	353
<b>附表</b>	.....	374

# 第一篇 微 积 分

微积分是数学中最重要最基础的部分。微积分是研究变量的数学。大部分自然现象和科学技术上的问题都是变量问题，所以都要用微积分加以分析、研究，微积分是处理上述问题的最重要的数学工具。在本教程中，微积分部分以一元函数——客观世界中变量之间依赖关系的反映——为研究对象，以极限——一种非常朴素，然而又非常强有力的方法——为基本工具，以“化繁为简”、“以简御繁”为基本原则，着重讨论两类问题：变量的变化率问题和连续变化的变量的变化总效果问题。前者被称为微分学，后者被称为积分学。

## 第一章 函数、极限与连续

极限是微积分学中最重要的基本概念，极限的思想和方法贯穿于微积分学的始终。微积分学中的一系列重要概念（如导数、积分、级数等）的建立，主要问题的解决都借助于它，依赖于它。极限是从静止认识运动，从有限认识无限，从近似认识精确的重要手段，是整个微积分学的理论基础。本章将在复习函数概念等有关知识的基础上，讨论极限和连续的基本概念、性质及运算。

### 第一节 函 数

函数概念是微积分中最基本的概念之一。函数是微积分的研究

对象，是客观世界中变量之间依从关系的反映。读者在中学已经学过一些有关函数的知识，我们将在初等数学的基础上对函数做进一步的讨论。在给出函数的概念之前，我们先回顾一下与此有关的内容。

## 一、常量与变量

当我们研究或观察某种自然现象或技术过程时，经常会遇到各种不同的量。例如：在物理学中有重量、温度、力、速度等；在化学中有原子量、分子量、溶解度、克分子浓度等；在几何中有长度、面积、体积等。其中有些量在所研究的过程中始终保持不变，这种量叫做**常量**；另外有些量在这个过程中可以取得各种不同的数值，这种量叫做**变量**。

例如，某物体自某一高度自由下落时，物体的质量保持不变，是常量；物体与地面的距离以及物体的下落速度都在变化，是变量。又例如，在圆的半径增长的过程中，圆的直径、圆的周长、圆的面积都是变量。而圆的周长与其直径的比却是一个常量（即圆周率  $\pi$ ）。

值得注意的是，我们说一个量是常量或变量，都是指在某一确定的现象或过程中来说的。同一个量在某种情况下可以看成常量，而在另一种情况下又可能是变量。例如，半径为  $r$  的圆，半径保持不变，在沿着一条平面直线滚动的过程中，圆的面积  $\pi r^2$  是一个常量；在圆心固定，半径增大的过程中，圆的面积就变成一个变量了。

在高等数学中，为研究问题方便，有时把常量看成是取同一数值的变量，即把常量当作一种特殊形式的变量来看待。常量一般用字母  $a, b, c$  等表示，而变量用字母  $x, y, z$  等表示。

## 二、实数、区间与邻域

凡是表示成形式  $\frac{p}{q}$ （其中  $p, q$  为整数，且  $q \neq 0$ ）的数，称为**有理数**。而象  $\pi, \sqrt{2}$  等不能表示为形式  $\frac{p}{q}$  的数，称为**无理数**。有理数和无理数统称为**实数**，全体实数所构成的集合称为**实数集**。在本书中，如果没有特别声明，今后所提到的数都是实数。为叙述方

便, 我们统一用  $\mathbf{R}$  表示 **实数集**, 用  $\mathbf{Q}$  表示 **有理数集**, 用  $\mathbf{Z}$  表示 **整数集**, 用  $\mathbf{N}$  表示 **自然数集**.

规定了原点、正方向和单位长度的直线称为 **数轴**. 显然, 任给一个实数都可以在数轴上找到一个点与其对应; 反之, 数轴上的任何一点也对应着一个实数. 也就是说, 实数与数轴上的点是一一对应的. 由于变量  $x$  的每一个值都是一个实数, 因而可以用数轴上的一个点来表示. 如果一个量是常量, 则用数轴上的一个定点  $a$  来表示; 如果一个量是变量, 则用数轴上的动点  $x$  来表示.

设  $a, b \in \mathbf{R}$ , 且  $a < b$ , 则把下列实数集  $\mathbf{R}$  的子集称为 **有限区间**:

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\};$$

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\};$$

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\};$$

$$[a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

其中  $a, b$  分别称为以上各区间的左、右端点, 数  $b - a$  称为区间的长度,  $(a, b)$  称为 **开区间**,  $[a, b]$  称为 **闭区间**, 而  $(a, b], [a, b)$  分别称为 **左开右闭**、**左闭右开区间**, 或统称为 **半开半闭区间**.

除了有限区间以外, 还有 **无限区间**, 常见的无限区间有以下五种:

$$(a, +\infty) = \{x \mid a < x < +\infty\};$$

$$[a, +\infty) = \{x \mid a \leq x < +\infty\};$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid -\infty < x < b\};$$

$$(-\infty, b] = \{x \mid -\infty < x \leq b\};$$

$$(-\infty, +\infty) = \{x \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbf{R},$$

其中“ $+\infty$ ”, “ $-\infty$ ”分别称为“正无穷大”, “负无穷大”. 我们约定: 对于任何实数  $a$ , 恒有  $a < +\infty$ ,  $a > -\infty$ . 应该注意,  $+\infty$  和  $-\infty$  只是记号, 它们既不是实数, 也不能象实数那样进行计算.

下面介绍 **邻域** 的概念. 设  $a, \delta \in \mathbf{R}$ , 且  $\delta > 0$ , 则把

$$\{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta)$$

称为点  $a$  的  $\delta$  邻域, 记为  $U(a, \delta)$ , 其中  $a$  称为邻域  $U(a, \delta)$  的中心,  $\delta$  称为邻域  $U(a, \delta)$  的半径. 称集合  $\{x | 0 < |x - a| < \delta\}$  为点  $a$  的去心邻域, 记为  $\dot{U}(a, \delta)$ . 集合  $\{x | a - \delta < x \leq a\}$  称为点  $a$  的左邻域, 集合  $\{x | a \leq x < a + \delta\}$  称为点  $a$  的右邻域.

### 三、函数的概念

一切事物都在运动和发展之中, 当我们考察某个自然现象或生产过程时, 往往会遇到多个变量. 各个变量之间也不是彼此孤立的, 它们之间相互联系相互依赖, 并且具有一定的规律. 在数学研究中, 我们常略去变量或常量的具体意义, 而只在数值上研究这些量之间的关系. 在高等数学里要讨论的主要是两个变量之间的一种确定的依赖关系, 即函数关系. 下面通过几个例子加以说明.

**例 1** 圆的面积  $S$  与圆的半径  $r$  有如下的关系

$$S = \pi r^2,$$

对于半径  $r$  在  $(0, +\infty)$  内的任意一个取值, 上述关系确定了一个圆的面积, 即圆的面积的大小随着圆半径的变化而变化.

**例 2** 物体在空中自由下落时, 如果忽略空气阻力不计, 则落体所经过的路程  $s$  随时间的变化关系为

$$s = \frac{1}{2}gt^2,$$

其中  $g = 9.8\text{m/s}^2$  为重力加速度. 假定物体开始下落的时刻是  $t = 0$ , 物体着地的时刻是  $t = t_0$ , 则当  $t$  在闭区间  $[0, t_0]$  上任意取定一个数值时, 由上式就可以确定  $s$  的相应数值.

从上面两个例子我们看到, 在某一特定过程中, 有关变量之间是相互联系相互制约的. 这种量与量之间的相互关系, 用数学语言来描述就是函数.

**定义 1** 设  $X$  是非空数集, 如果对于每个  $x \in X$ , 依照某一对应关系, 存在唯一的实数  $y$  与之对应, 那么这种对应关系 (记为  $f$ ) 称为定义在  $X$  上的一个函数, 记为

$$f: X \rightarrow Y, x \mapsto y \text{ (或 } y = f(x)\text{)}.$$



其中,  $x$  称为 **自变量**,  $y$  称为 **因变量**.  $X$  称为函数  $f$  的定义域, 而集合  $f(X) = \{y | y = f(x), x \in X\}$  称为函数  $f$  的值域.

关于函数的定义, 说明以下几点:

(1) 函数的单值性, 即自变量  $x$  的每一个值唯一对应因变量  $y$  的一个值.

(2) 对于我们研究的函数, 自变量  $x$  与因变量  $y$  都在实数范围内变化.

(3) 由定义可见, 定义域和对应法则是确定函数的两个要素. 对于两个函数, 只有当它们的定义域和对应法则都相同时, 它们才是相同的.

(4) 常数  $A$  可以看作是变量  $x$  的函数, 即无论  $x$  取什么值, 变量  $y$  永远取值  $A$ , 可写为  $y = A$ .

(5) 特别地, 数列  $\{x_n\}$  可以看作定义在全体正整数上的函数, 记作  $x_n = f(n)$ .

**例 3** 球的体积  $V$  是球的半径  $r$  的函数, 它用  $V = \frac{4}{3}\pi r^2$  表示, 其中  $X = \{r | 0 \leq r < +\infty\}$  为  $f$  的定义域. 若不考虑这个函数的实际意义, 那么其定义域为  $X = \{r | -\infty < r < +\infty\}$ .

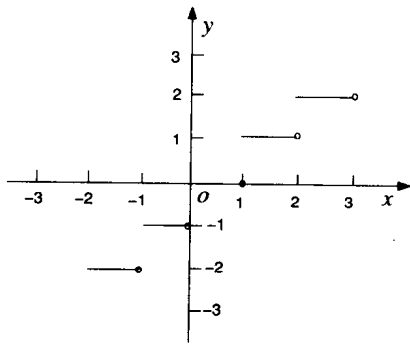


图 1-1

**例 4** 公元 1800 年, 德国数学家高斯 (F. Gauss) 在研究圆内整点问题时引进了 **取整函数**  $[x]$ , 用于表示不大于实数  $x$  的最大整数.