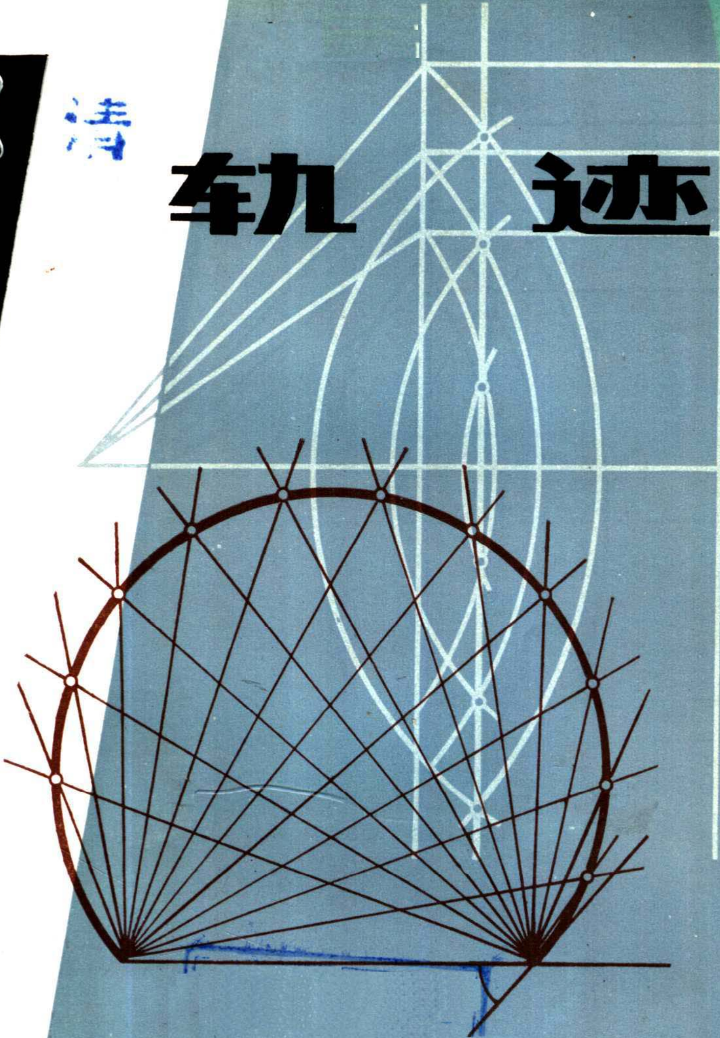
清

轨迹



IRANKEXUE XIAOCONGSHU

自然科学小丛书

北京出版社

自然科学小丛书

轨 迹

赵 慈 庚

北 京 出 版 社

自然科学小丛书
轨　　迹
赵慈庚
*
北京出版社出版
（北京崇文门外东兴隆街51号）
新华书店北京发行所发行
北京印刷一厂印刷
*
787×1092毫米　32开本　3.125印张　47,000字
1983年1月第1版　1983年1月第1次印刷
印数1—17,000
书号：13071·145　定价：0.25元

编辑说明

《自然科学小丛书》是综合性科学普及读物，包括数学、物理、化学、天文、地学、生物、航空和无线电电子等学科。主要介绍这些学科的基础知识，以及现代科学技术成就。编写上力求深入浅出，通俗易懂，使它具有思想性、知识性和趣味性，可以作为中学的课外辅导读物，并适合具有初中文化水平的广大读者阅读。

写在前面

欧氏几何的轨迹理论，是解析几何与函数理论的基础。中学同学学一点这类知识，会有很大的好处。这就是编写这个小册子的目的。

学习数学没有坚实的基础不行。谁曾见壮丽的大厦建筑在沙滩上！多少年来在数学教学工作中要求加强基本训练，就是在这个原则下提出来的。谁也不能把所有的数学知识都告诉学生，正象谁也不能带领他们走遍世界的每个角落。但是我们应该把学习数学的方法教给他们，犹如我们应该指点他们怎样探索我们未曾走过的道路。究竟怎样加强基本训练，指导学习方法？是很难回答的问题。这是一门艺术，不是读几篇文章就能作得到的。

我的已故业师傅仲嘉先生，从事中学教学多年，对几何教学积有丰富的经验。他在三十年代著有平面几何课本。这本书重视几何体系，也集中表现着他在施教中的用心。当时采用这一课本的教师，一致认为

这本书对于引导学生思考、揭示逻辑层次、讲述证题思路，都有独到之处，确实能使教学工作事半功倍。现在这本小册子主要以傅先生的教学观点为依据，尤其第二、三、四节的内容，半数以上是从傅先生原作改写的。

本书前四节是基本知识和基本训练，对读者的要求比较严格，希望读者耐心体会。若能从这本书养成一个良好的读书习惯，就是实现了作者的最大愿望。

赵慈庚

一九八〇年十一月

目　录

一 预备知识

从踢球说起

操场的墙上涂着一片直径三尺的白灰圆面，高爽在离墙脚十米的地上放一个足球，噔地一脚把球向墙踢去，正好打在这片白灰上。一连几次都是这样。王保踢了几次，总也打不中这片白灰。于是他问高爽，“为什么这球那样听你那只脚的指挥，却不听我的脚的命令.”高爽说：“我也说不清其中的道理，反正踢的方向和用力的大小都有关系。这两个因素配合得适当，就能使球打中目标.”

他们去问老师，老师说高爽的话有道理，并且告诉他们：“把炮弹的初速度和发射角调整好，就能打中几公里外的目标。只凭最初的速度（包括发射角）加上自然条件的约束，就能把炮弹的运动路线完全确定。飞机投掷炸弹，夜间天空的流星，都不外乎是这样运行的。将来你们学了物理学就会明白.”

天体都在几乎不变的条件下运行，于是它们才有固定的轨道。人们认识了这类轨道，就能预报日蚀月蚀、彗星出没等现象。人们发射导弹、人造卫星，也是依照这种原理。那么掌握物体运动的路线，便是人类生活中值得注意的一件事情。把这个问题抽象化，可以粗略地说：动点可能取得的一切位置，集合起来就是一条路线。或者说，路线是动点的无穷多位置的总体。这一切点都满足某种条件；也正是这些条件约束着动点，使它走成一定形状的路线。在几何学里，这属于轨迹问题。

抽象的轨迹理论，不象炮弹、流星等问题那样直观。要把轨迹理论学习透彻，需要先熟悉几个概念。

甜的必然是蜂蜜吗？

数学里时常用到“必要且充分的条件”或者“必然且充分的条件”。这是“必然条件”与“充分条件”合并成的名词。那么，什么是“必然条件”，什么是“充分条件”呢？让我们先举几个例子：

蜂蜜必然有甜味，

天落雨必然马路湿，

2 减 2 必然等于零。

这些例子中的蜂蜜、甜味、天落雨、马路湿、2 减

2、相等，都是事项。在数学里，这些事项（如名词、图形、现象、关系、条理……）就叫做条件。事项与事项之间，往往由因果关系构成完备的判断。上面的三句话，就是判断。

因果关系必须包括两个事项（条件），一个处在原因地位，一个处于结果地位。处于结果地位的事项叫做必然条件。上边三句话里，“有甜味”、“马路湿”、“等于零”，都是前半句的必然条件。处于原因地位的事项（条件）——“是蜂蜜”、“天落雨”、“2减2”，都是后半句的充分条件。扼要地说，前因是后果的充分条件，后果是前因的必然条件。必然条件和充分条件是同时存在的，缺一不可。由充分条件产生必然条件，数学里常用记号⇒表示它们间的关系。因此，上面的三句话可写成：

是蜂蜜⇒有甜味，

天落雨⇒马路湿，

2减2 ⇒等于零。

箭头所向的一端是必然条件，所背的一端是充分条件。

如果把这几句话的前半句与后半句对换，就都变成错误的判断了。有甜味不必是蜂蜜，马路湿未必天落雨，等于零未必是2减2。所以“蜂蜜”不是“甜味”

的必然结果，“天落雨”不是“马路湿”的必然后果。可见充分条件与必然条件是不能混淆的。例如大学入学考试，假定各科平均分数够60分就能录取。某人的平均分数是83。那么这“83分”的条件能充分地保证他升入大学。然而升入大学的平均分数并不必然是83。83分是升入大学的充分条件，而不是必然的条件。这就是充分条件与必然条件的不同。

然而，也有不少的两件事情是互为因果的。例如“两直线平行”与“内错角相等”互为因果。“内错角相等”既是“两直线平行”的必然条件，又是充分条件；这时便省事地说“内错角相等”是“两直线平行”的必然且充分的条件。显然，这时“两直线平行”也是“内错角相等”的必然且充分的条件。又如“两三角形全等”与“三对对应边相等”也互为因果。这种关系写做

两直线平行$\Longleftrightarrow$内错角相等，

两个三角形全等$\Longleftrightarrow$三对对应边相等。

读做“两直线平行，必然且只需内错角相等”；“两个三角形全等，必然且只需三对对应边相等.”

关于必然且充分的条件，有一句话附带在这里说一下，即是：数学中的定义都是使一个概念成立的必然且充分的条件。例如：

和圆只有一个公共点的直线叫做这圆的切线。

这个定义可以从两方面使用。当你知道直线和圆仅有一个公共点时，可以根据这定义说这直线是圆的切线；当你知道一条直线是圆的切线时，又可以根据这定义断定它和圆仅有一个公共点。

不是四足的动物必然不是马

仿照前款的话，说

马必然是四足动物 (1)

是对的。说

四足动物必然是马 (2)

就错了。说

不是马必然不是四足动物 (3)

也错；但是说

不是四足动物必然不是马 (4)

又是正确的。形式逻辑所用的普通语言，一般不外乎上边这四种格式。这四种格式之间有下列三种关系：

(1)与(2)或(3)与(4)之不同，是前因与后果互相对换。这种关系称为**互逆**。(2)是(1)的逆述语，(1)也是(2)的逆述语。(3)与(4)也是这样。

把(1)里前后两件事都换成否定语气，就变成(3)，把(3)中前后两件事换成否定语气，就又回到(1)。这种关系叫做**对称**。(3)是(1)的对称语，(1)也是(3)的

对称语。同样，(2)与(4)的关系也是如此。

把(1)的前半改成否定语气作为后半段，又把它的后半段改成否定语气作为前半段，便是(4)。用同样方式，可以把(4)改造成(1)。我们便说(1)和(4)是互相反申的两句话。(2)和(3)也互为反申语。

图 1.1简洁地表示了这三种关系。

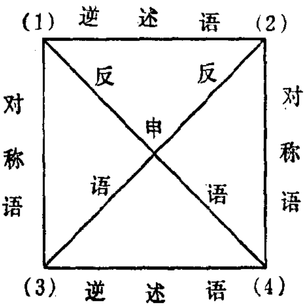


图 1.1

互逆的两句话或对称的两句话可以一个正确一个错误，上边的例句就是这样；也可以都对，也可以都错。例如

两直线平行$\Rightarrow$内错角相等，

内错角相等$\Rightarrow$两直线平行，

两直线不平行$\Rightarrow$内错角不相等，

内错角不相等$\Rightarrow$两直线不平行。

其中互逆的两对句子和对称的两对句子都是正确的。又如

两圆相交$\Rightarrow$连心线$>$半径和，

连心线$>$半径和$\Rightarrow$两圆相交，

两圆不相交$\Rightarrow$连心线$\ngtr$半径和，

连心线$\ngtr$半径和$\Rightarrow$两圆不相交。

其中两对逆述语和两对对称语都是错误的。

唯有互相反申的两句话，要对就都对，要错就都错。上边的例句已经可以说明这一点。这事实表示互相反申的两句话效果一致，因此在逻辑论证之中可以互相代替。某句话说不透彻时，可以用它的反申语再说。例如不容易从内错角相等证明两线平行时，可以试用“两直线不平行则内错角不相等”去证明。

集

一群事物合在一起叫做集，也叫做集合。一个集中所含的事物就是这个集的成员。当 a 是集 A 的成员时，就说 a 属于 A，记做 $a\in A$。只要有方法能判断一件东西是否属于某集，这集就形成了.至于集中的成员，可以有共同性质，也可以没有共同性质。例如一支钢笔、一顶帽子和牌号不同的三辆汽车，可以成为一个集。显然，其中的成员没有共同属性。这样的集，只好用列举法来说明它。如果集中的成员有共同性质，就可以用这共同性质说明这集。例如“有北京市户口的人”，“一九八〇年的礼拜日”，“一个公园里的老虎”，……

说“公园里的老虎”也是集，会有人不以为然。他可以反问：“那么景山公园的老虎是什么集？”这反问似乎可笑，但是，仔细一想，问得并不是没有道理。

因为你没有说是什么公园，为什么不允许他想到景山公园呢！所以不能否定这个问题。景山公园里确实没有老虎。但是在数学里也承认这公园的老虎是一个集，只是这集里没有成员。没有成员的集叫做空集。空集的记号是ϕ。不要以为空集是无聊的概念，它在集论里起着不小的作用。空集有些象实数里的零。请想想如果实数里没有零，还能进行多少运算！

不要忽视平凡的推理

在自然现象和日常生活中，有许多东西总是一类一类地存在着，这是集论的物质基础。例如，物理学家、数学家各是一个集，而两者都在科学家这个大集之内。此外，有的人既是物理家又是数学家，那么物理学家与数学家两个集之间又有交叉。这些都是集与集之间的关系，都是集论所要讨论的内容。轨迹理论只用到其中最简单的一些关系。

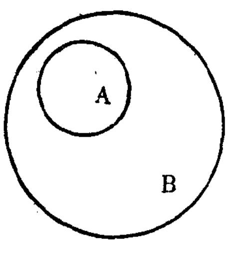


图 1.2

第一条简单关系是，大集包括小集.例如科学家包括数学家，黄种人是人类的一部分，直角三角形的集是三角形的集的一部分。一般地说，假若A集的每个成员都属于B集(图 1.2)，也就

是，当

$$a\in A\Rightarrow a\in B$$

时，便说 A 是 B 的子集，记作

$$A\subseteq B \text{ 或 } B\supseteq A.$$

读作"A 含于 B"或"B 含着 A"。如果 B 里有不属于 A 的成员，就说 A 是 B 的真子集；记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$。读作"A 含于 B 内"或"B 内含着 A"。例如当 m 与 b 是任意常数时，$y=3x+b$ 表示的无穷多方程是一个集，这个集是 $y=mx+b$ 所表示的方程集的真子集。

两个集可以称谓不同或表示方法不同，而成员却完全一样。这是集与集之间的第二个简单关系。例如"持有第三中学学生证的人"和"第三中学的在校生"，又如几何里"三边形的集"和"三角形的集"，说法虽然不同，成员完全一样。有这样关系的两个集 A、B，说它们全等，记作 $A\equiv B$。这关系的正式定义是

$$A\equiv B\Longleftrightarrow A\subseteq B \text{ 而且 } A\supseteq B.$$

其实这种数学语言，是常识的反映，是数学化了的常识。因为 $A\subseteq B$ 必然 A 的成员都在 B 里，B 的成员不少于 A 的成员；同时，$A\supseteq B$ 必然 B 的成员都在 A 里，B 的成员又不多于 A 的成员。既然 B 的成员不少于 A 的成员又不多于 A 的成员，所以两集的成员完全一样。

这些话听来似乎平淡无味，因为两集全等就是它