ZHONGXUESHENGKEWAIDUWU

反证法及其应用

唐德论编著

数学中的证题法多种多样，但最终可归结为两大类：直接证法和间接证法。反证法即是间接证法中的一种，是数学中的一种重要的证题方法。本书对反证法作了全面的论述，阐述了反证法的理论根据、多种论证形式、如何分类使用等，最后举例说明了反证法的应用。全书的论述紧凑、严谨。

读者若能认真地读完本书，就能较为全面地掌握反证法。

反证法及其应用

唐德论　编著

湖 南 教 育 出 版 社

反证法及其应用

唐德论 编著

责任编辑：孟实华

湖南教育出版社出版发行（长沙市展览馆路3号）
湖南省新华书店经销　湖南省新华印刷一厂印刷

787×1092毫米 32开　印张：5.5　字数：106000
1988年7月第1版　1988年7月第1次印刷
印数：1——5570
ISBN 7—5355—0628—3/G・663
定价：1.20 元

前　言

反证法是数学中的一种重要证题方法。反证法与直接证法比较，尽管其应用不如直接证法普遍，但我们决不能因此而低估它的作用，更不能因有直接证法而抛弃反证法。反证法在数学命题的证明中能起到直接证法所起不到的作用，不少数学命题的证明当使用直接证法比较麻烦或比较困难甚至不可能时，如能恰当地使用反证法，就可以化繁为简，化难为易，化不能为可能。犹如人们行路，直接证法和反证法好比通向同一目的地的两条道路，前者从正面而进，后者从背面而入。如若正面道路径直，平坦好走，我们当然从正面而进。如若正面道路曲折，崎岖难行，那我们就宁可从背面而入。至于正面道路闭塞断绝，那就非走背面道路不可了。在证明数学命题时，所遇到的情况与此甚为相似。有时虽能用直接证法，但反证法来得简单容易，我们就宁可用反证法，至于有时根本不能用直接证法，而用反证法又能奏效，那我们就不妨采用反证法。因此，反证法在数学证明中确有着它重要而特殊的地位和作用。

反证法有着广泛的应用。反证法在现行中学数学教材中是在平面几何部分提出的，但它的应用不仅仅限于平面几何，在代

数、三角、立体几何、解析几何以及微积分中也有着广泛的应用。特别是国际国内的中学生数学竞赛题中，有不少问题需要用反证法来证明。还有古代的某些数学难题，也是应用了反证法才获得解决的。因此，反证法是我们论证有关数学命题时常用的有力工具，所以现行中学数学教学大纲把它规定为中学数学教学内容之一，并要求中学生能够逐步地掌握它。

反证法对于初学者来说，虽然是一种比较难以掌握的证明方法，但它并不是难不可学的。只要我们弄清反证法的实质，掌握反证法的步骤，熟悉反证法的论证形式，了解应用反证法的范围，再加上有计划有步骤有目的地反复练习，是没有学不好的，没有掌握不了的。本书的目的就在于试图为中学生和其他数学爱好者学习并掌握反证法提供一个较为系统较为全面的参考资料，以期在读者学习和掌握反证法的过程中起个引路作用。

编　者

目　　录

前言……………………………………………………(1)

一　什么是反证法………………………………………(1)

二　反证法的逻辑根据…………………………………(6)

三　反证法的论证形式…………………………………(14)

四　哪些命题适宜用反证法……………………………(40)

五　应用反证法要注意的几个问题……………………(64)

六　反证法的应用………………………………………(87)

　（一）应用反证法证明几何题…………………………(87)

　（二）应用反证法证明代数题…………………………(109)

　（三）应用反证法证明三角题…………………………(139)

　（四）应用反证法证明微积分题………………………(155)

一　什么是反证法

我们先来看这样一个例子：王小波是某中学的学生，但不知道他是初中部学生还是高中部学生，今有该校学生名册一份，你怎样由学生名册查出王小波是初中部学生还是高中部学生呢？当然，你查遍名册一定可以得出结论，但是这样去查，一般说来是很费事的．因此，自然会想到把学生名册按初中和高中分开，看初中学生少还是高中学生少，如果高中学生少，就查高中学生名册．要是高中学生名册中有王小波，就直接查出了王小波是高中部的学生．要是高中部学生名册中没有王小波，那么初中部学生名册中必有王小波，这样不用再查初中学生名册就可从反面间接说明王小波是初中部的学生了．

假如王小波是初中部的学生，并且初中部有初一、初二、初三共三个年级，你又怎样查出王小波是哪个年级的学生呢？同前面一样，不去查遍初中部所有学生名册，而把初中部学生名册按年级分开，看哪个年级学生少，如果是初三学生最少，初二次之，就先查初三学生名册．要是初三学生名册中有王小波，就直接查出了王小波是初三的学生．要是初三学生名册中没有王小波，就再查初二学生名册．倘若初二学生名册中有王

小波，就又直接查出了王小波是初二的学生. 倘若初二学生名册中也没有王小波，那么初一学生名册中必有王小波，这样不用再查初一学生名册就可从反面间接说明王小波是初一的学生了.

上述判断王小波是高中部学生还是初中部学生的方法，前者直接，后者间接，并且后者是用否定王小波是高中部学生的方法来从反面断定王小波是初中部的学生. 上述判断王小波是初中部哪个年级学生的方法，前二者直接，末者间接，并且末者是用同时否定王小波是初三学生和初二学生的方法来从反面断定王小波是初一的学生.

数学命题的证明也是如此，有的采用直接证法，有的采用间接证法. 上述生活中的实例对于我们理解数学中的证明方法颇有启发作用.

从命题的题设出发，根据已学过的定义、公理、定理等推导出命题的结论，这种证明的方法叫做**直接证法**. 因为数学命题的证明多是采用这种方法，读者非常熟悉，且它不是本书所要介绍的内容，因此这里不去赘述.

当一个命题不易或者不能直接证明时，我们就改证它的等效命题，若证得等效命题为真，则原命题就断定为真，这种证明的方法叫做**间接证法**.

间接证法有同一法和反证法两种. 那么什么叫做同一法，什么叫做反证法呢？

若一个命题的题设和结论所指的概念都唯一存在时，则这个命题和它的逆命题同时为真或同时为假. 例如"湖南的省会是长沙"这个正确的命题里，"湖南的省会"和"长沙"都是唯

一存在的，因此逆命题“长沙是湖南的省会”也是正确的。又如命题“等腰三角形顶角的平分线也是底边上的高”与其逆命题“等腰三角形底边上的高也是顶角的平分线”也同时是正确的。由此可见，一个命题的题设和结论所指的概念都唯一存在时，若直接证明它有困难，就不妨改证它的逆命题，然后根据同一法则* 断言原命题为真，这种证明的方法叫做**同一法**。

先假定命题中结论的反面成立，推出和命题中的题设、或前面学过的定义、公理、定理、或已知的事实、或临时的假定等相矛盾的结果，从而断定命题结论的反面不可能成立，因而断定命题中的结论成立，这种证明的方法叫做**反证法**。

简而言之，反证法不直接证明“C是D”，而是从反面证明“C不是D”不对，以肯定“C是D”是对的。

同一法这种间接证法是改证其逆命题，但一般说来，两个互逆的命题并不一定同真同假，因而同一法不能滥用，必须符合同一法则才行.反证法这种间接证法一般是改证其逆否命题，但要注意它不限于此，有时把命题结论的反面加入到命题的题设之后，并非去推出和题设相矛盾的结论，而是去推出和定义、公理、定理等相矛盾的结论。

同一法不是本书所要介绍的内容，此处略而不述。对于反证法，下面我们举几个例子分类论述一下。

例 1 已知 2 整除a^2，a是整数，求证 2 整除a。

证明 反设 2 不整除a，因a是整数，则a 可表示为 $2m+1$

---

* 某个命题的题设和结论所指的概念都是唯一存在的，那么这个命题及其逆命题，当其一成立时，另一将不证自立，这个原则叫做**同一法则**。

(m为整数)，

∴ $a^2=(2m+1)^2=4m^2+4m+1$.

因此，2不能整除a^2，这与已知条件“2整除a^2”相矛盾.

∴ 2不整除a不可能，因此，2整除a.

例 2 如果在一个平面内有两条相交直线平行于另一个平面，那么这两个平面平行.

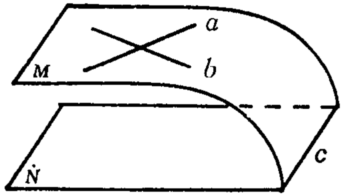

图 1

已知：如图1，平面M内有两条相交直线a、b和平面N平行.

求证：平面M // 平面N.

证明 反设平面M、N相交于直线c.

∵ a // 平面N，平面M过a，且c为平面M、N的交线，

∴ $a // c$（如果一条直线和已知平面平行，那么经过这条直线的平面和已知平面的交线也和这条直线平行）.

同理，$b // c$.

因此，就有两条相交直线a、b和同一条直线c平行，这和“平行公理”相矛盾.

∴ 平面M和N不能相交，

因此，平面M // 平面N.

例 3 求证：对角互补的四边形内接于圆.

已知：如图2，四边形$ABCD$中，$\angle ABC+\angle ADC=180°$.

求证：$ABCD$内接于圆.

证明 过不在同一直线上的三个顶点A、B、C作一个圆，设这个圆是$\odot O$.

我们用反证法证明第四个顶点D也在$\odot O$上.

假定D不在$\odot O$上，那么只能有另外两种情况：D在$\odot O$内或在$\odot O$外.

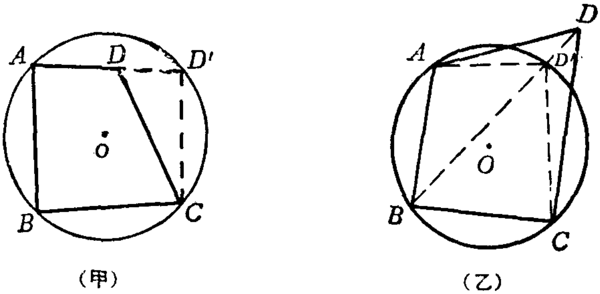

图 2

（i） 若D在$\odot O$的内部（图2(甲)），延长AD交$\odot O$于D'，连结$D'C$，则$\angle ADC > \angle AD'C$. 但$\angle ABC + \angle AD'C = 180°$，故得$\angle ABC + \angle ADC > 180°$.这和已知条件$\angle ABC + \angle ADC = 180°$相矛盾，所以$D$在$\odot O$的内部是不可能的.

（ii） 若D在$\odot O$的外部（图2(乙)），连结BD，交$\odot O$于D'，再连结AD'、CD'，则$\angle ADC < \angle AD'C$. 但$\angle ABC + \angle AD'C = 180°$，故得$\angle ABC + \angle ADC < 180°$. 这和已知条件$\angle ABC + \angle ADC = 180°$相矛盾，所以$D$在$\odot O$的外部也是不可能的.

因为D不能在$\odot O$的内部，也不能在$\odot O$的外部，所以D只能在$\odot O$上. 因此，四边形$ABCD$内接于圆.

上述例1和例2这两个命题结论的反面都只有一种情况，那么推翻这种情况就足以证明结论是真实的，这种比较单纯的反

证法叫做归谬法。例 3 这个命题结论的反面不止一种情况，那么就必须将所有这些情况一一推翻，才能断定结论是真实的，这种比较复杂的反证法叫做穷举法。

从上述例题的论证过程中，我们可以归纳出运用反证法证题一般有下列三个步骤：

（1）否定结论，作出反设。

假定结论不成立，那么结论的反面一定成立。如果结论的反面只有一种情况，则只须作出一种反设；如果结论的反面不止一种情况，则对每种情况都必须作出反设。这是反证法的第一个步骤，也是反证法的前提部分。

（2）进行推理，导出矛盾。

作出反设后，就从反设出发，根据真实的论据，进行正确的推理，导出矛盾来（与已知定义、公理、定理、题设相矛盾，或与反设相矛盾，或自相矛盾等）。这是反证法的第二个步骤，也是反证法的核心部分。

（3）否定反设，肯定结论。

由反设推出了矛盾，而推理论据真实，推理方法正确，因此反设必不成立，从而得出命题结论成立。这是反证法的第三个步骤，也是反证法的结尾部分。

二　反证法的逻辑根据

反证法的逻辑根据是矛盾律和排中律。那末，什么叫做矛

盾律，什么叫做排中律呢？

同一对象，在同一时间内和同一关系下，不能具有两种互相矛盾的性质．这种逻辑上的思维规律叫做矛盾律．例如“a是正数”和“a是负数”这样的两个矛盾判断，决不会都是对的．假如其中一个是对的，那末另一个必然是错的．但是反过来说，如果其中一个是错的，却不能肯定另一个必然是对的，也许同样是错的，因为假如a等于0，它就既不是正数，也不是负数，而是无所谓正负的中性数．又如在同一平面内，“a、b两直线平行”和“a、b两直线相交”这两个矛盾判断，也是不相容的，不能同时为真．但这样的矛盾判断，和上面所举的例子有点不同，就是它们也不能同假，其中只有一个是假的，而另一个一定是真的．因为在同一平面内的两直线a、b，若不平行则必相交，若不相交则必平行，既不平行也不相交的两直线是不存在的．根据这一矛盾律，我们可以知道两个互相矛盾的判断，不能同真，但能同假，也可一真一假．

同一对象，在同一时间内和同一关系下，或者是具有某种性质，或者是不具有某种性质，二者必居其一，不能有第三种情形．这种逻辑上的思维规律叫做排中律．例如“a是正数”和“a是非正数”这样的两个对立性的矛盾判断，决不能都是对的，也决不能都是错的，而必定是一个对的一个错的．又如“这个角是直角”与“这个角是非直角”、“这个方程有解”与“这个方程无解”等这些对立性的矛盾判断也必定是一真一假．根据这一排中律，我们可以知道两个对立性的矛盾判断，不能同真，也不能同假，必定是一真一假．

因此，根据矛盾律，对于两个互相矛盾的判断，可以由一个真断定另一个假，但不能由一个假断定另一个真。根据排中律，对于两个对立性的矛盾判断，不但可由一个真断定另一个假，而且反过来也可以由一个假断定另一个真。

反证法中推出矛盾后，否定反设用的就是矛盾律；否定反设后，肯定结论用的就是排中律。因为从命题结论 q 的反面 $\overline{q}$ 出发，推出了和题设、定义、公理、定理等相矛盾的结果 F，而题设、定义、公理、定理等为真，根据矛盾律，两个互相矛盾的判断不能同真，知F必为假。但推出F时的论据真实，论证正确，因此只有反设 $\overline{q}$ 这个前提为假。再根据排中律，两个对立性的矛盾判断不能同假，知结论 q 必为真。

如果我们了解一点逻辑代数的初步知识，那么我们还可以用逻辑代数的知识来说明反证法的合理性。因为反证法证明的途径一般有两条：一是证明原命题的逆否命题成立，从而得出原命题成立；一是从命题结论的反面出发，并考虑到题设条件，推导出一个矛盾来，从而断定命题成立。因此，我们分别从两个方面用逻辑代数的知识说明反证法的合理性。

我们把命题“若 p 则 q ”记作“ $p\to q$”，把“p或 q ”记作“ $p\vee q$”，把“ p 与 q ”记作“ $p\wedge q$”，并把“不是 q ”记作“ $\overline{q}$”. 这样一来，如果原命题是“ $p\to q$”，那么它的逆否命题就是“$\overline{q}\to\overline{p}$”；如果原命题的题设是“ $p_1\wedge p_2$”，结论是“ q”，那么它的逆否命题就是“ $p_1\wedge\overline{q}\to\overline{p}_2$”或“$\overline{q}\wedge p_2\to\overline{p}_1$”.

因此，要说明由逆否命题的真确性能确立原命题的真确性，

只要证明下述定理一就行了.

定理一* (1) $p \to q = \overline{q} \to \overline{p}$;

(2) $(p_1 \wedge p_2) \to q = (p_1 \wedge \overline{q}) \to \overline{p}_2$.

证明 (1) $\overline{q} \to \overline{p} = \overline{\overline{q}} \vee \overline{p} = q \vee \overline{p} = \overline{p} \vee q = p \to q$;

(2) $(p_1 \wedge \overline{q}) \to \overline{p}_2 = \overline{p_1 \wedge \overline{q}} \vee \overline{p}_2 = (\overline{p}_1 \vee q)$

$\vee \overline{p}_2 = (\overline{p}_1 \vee \overline{p}_2) \vee q = \overline{p_1 \wedge p_2} \vee q$

$= (p_1 \wedge p_2) \to q$.

要说明如果把原命题结论的反面加入原命题的题设中后，推出了矛盾，就能确立原命题的真确性，只要证明下述定理二就行了.

定理二* $(p \to q) = (p \wedge \overline{q}) \to f$.（$f$表示恒假命题）

证明 $(p \wedge \overline{q}) \to f = \overline{p \wedge \overline{q}} \vee f = \overline{p > \overline{q}} = \overline{p} \vee q$

$= p \to q$.

下面我们通过几个具体例子采用对比的方法进一步说明证明原命题与证明逆否命题间的关系.

例 1 若$x=3$，则$x^2-6x+9=0$.

对于这个命题我们采用反证法来证明，而对其逆否命题采用直接证法来证明.

原命题	**逆否命题**
$x=3 \Rightarrow x^2-6x+9=0$.	$x^2-6x+9 \neq 0 \Rightarrow x \neq 3$.

* 定理一与定理二摘自程楚书同志的《谈谈反证法》一文（《湖南数学通讯》1981年第1期）

证 （用反证法）

若 $x^2-6x+9\neq 0$,

则 $(x-3)^2\neq 0$,

$x-3\neq 0$,

$\therefore$ $x\neq 3$,

与题设矛盾。

故 $x^2-6x+9=0$。

证 （用直接证法）

$\because$ $x^2-6x+9\neq 0$,

则 $(x-3)^2\neq 0$,

$x-3\neq 0$,

$\therefore$ $x\neq 3$。

由此可见，对原命题的反证＝对其逆否命题的直接证明＋断语（与…矛盾，所以结论成立）。

例 2 如图3，在已知四边形$ABCD$中，M、N分别是AD、BC的中点，且$MN=\frac{1}{2}(AB+CD)$，求证$AB\parallel CD$。

此例的原命题可以简写成：

$$\left.\begin{array}{ll}① & MN=\frac{1}{2}(AB+CD)\\ ② & AM=MD\\ ③ & BN=NC\end{array}\right\}\Rightarrow ④AB\parallel CD.$$

因为原命题的题设有三条，而制造逆否命题时要在原命题的题设与结论中各取出一般多条的事项交换并否定，因此本例原命题的逆否命题有三个：

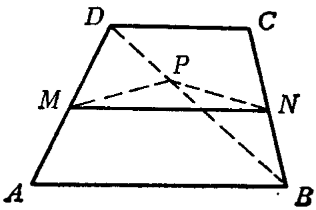

图 3

逆否命题一

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{④} & AB \nparallel CD \\ ② & AM = MD \\ ③ & BN = NC\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{①}\, MN \neq \frac{1}{2}(AB+CD).$$

逆否命题

$$\left.\begin{array}{ll}① & MN = \frac{1}{2}(AB+CD) \\ \overline{④} & AB \nparallel CD \\ ③ & BN = NC\end{array}\right\} \Rightarrow \overline{②}\, AM \neq MD.$$

逆否命题 三

$$\left.\begin{array}{ll}① & MN = \frac{1}{2}(AB+CD) \\ ② & AM = MD \\ \overline{④} & AB \nparallel CD\end{array}\right\} \overline{③}\, BN \neq NC.$$

原命题的反证(一)

连结BD，取BD的中点P，再连结PM、PN（如图3)。

∵ $AM = MD$，$BN = NC$，

∴ $PM \parallel AB$，$PN \parallel CD$.

若 $AB \nparallel CD$，

则 M、N、P三点不在一直线上，