化工设备设计力学基础

李国成　主编

石油大学出版社

化工设备设计力学基础

李国成　主编

石油大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

化工设备设计力学基础/李国成主编.—东营:石油大学出版社,2002.11
ISBN 7-5636-1711-6

Ⅰ.化... Ⅱ.李... Ⅲ.化工设备-设计 Ⅳ.TQ050.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 085130 号

化工设备设计力学基础

李国成 编著

出 版 者:石油大学出版社(山东 东营 邮编 257061)
网 址:http://sunctr.hdpu.edu.cn/~upcpress
电子信箱:upcpress@mail.hdpu.edu.cn
印 刷 者:石油大学印刷厂
发 行 者:石油大学出版社(电话 0546—8392563)
开 本:787×1092 1/16 印张:8.25 字数:186 千字
版 次:2002 年 12 月第 1 版第 1 次印刷
印 数:1—1000 册
定 价:12.00 元

内 容 提 要

本书为化工装备与控制工程专业的教学用书，它全面系统地阐述了化工设备机械设计的力学基础理论。

全书共分六章。第一章为弹性力学基础，着重介绍了弹性力学平面问题和空间轴对称问题的分析方法，以及化工容器设计中常遇到的孔边应力集中、厚壁筒的热应力问题和组合式圆筒的应力解答；第二章为塑性力学简介，从简单应力状态下的塑性力学问题入手，阐述了塑性力学基本概念和分析方法，给出了现代压力容器设计中涉及的极限设计准则、安定性概念和厚壁圆筒的自增强原理；第三章为薄板理论，详细介绍了薄板的基本概念、圆板轴对称弯曲的基本方程及工程设计中各种圆板的轴对称弯曲问题的分析方法与解答，并简要介绍了矩形薄板的计算公式；第四章为旋转薄壳理论，在阐明旋转薄壳基本概念的基础上，系统地阐述了化工容器常规设计所依据的旋转薄壳的无力矩理论及边缘弯曲基本方程和求解方法；第五章为外压壳体的稳定性分析，通过对外压圆环的弹性失稳分析，导出了外压圆筒的临界压力公式，并对其他外压壳体的稳定性进行了简要分析；第六章为压力容器低循环疲劳问题，在阐明疲劳破坏的有关概念、低循环疲劳与高循环疲劳之间的联系与区别的同时，重点介绍了低循环疲劳设计曲线、平均应力的影响与修正，以及疲劳累计损伤法则。

本书除侧重基本理论外，还注意理论与工程应用的结合，并辅以适当的例题和习题。

本书也可供从事化工装备设计、制造和维护管理等方面的工程技术人员参考。

目　录

第一章　弹性力学基础

本章阐述弹性力学的基本概念和分析方法，着重介绍化工容器机械设计中经常遇到的弹性力学的平面问题和空间轴对称问题。

第一节　弹性力学的任务和分析方法

一、弹性力学的任务

弹性力学是研究物体在弹性范围内由于外力的作用或物体温度改变而产生的应力、应变和位移。就这一方面而言，弹性力学的任务和材料力学是相似的，因此材料力学中关于弹性体的均匀连续假设和各向同性假设也适用于弹性力学。

然而，弹性力学与材料力学是不同的，其差别在于：材料力学主要是研究杆状构件和比较简单的杆件系统，且采用了关于变形或应力分布的假设，并以一个有限大的单元体作为研究对象；而弹性力学除了研究杆件外，还研究平面问题及空间问题。由于结构和受力的复杂性，因此在研究这些问题时，并不采用变形或应力分布之类的假设，而是以无限小的单元体作为研究和分析问题的出发点。

二、有关基本概念和分析方法

弹性力学中经常用到的基本概念有：外力、内力、应力、应变和位移。

作用于物体的外力可分为体积力（体力）和表面力（面力）两种。体力是分布在物体体积内的力，例如重力和惯性力。体力在坐标轴x、y、z上的投影用X、Y、Z表示，为该物体内某点的体力分量。面力是分布在物体表面上的力，例如流体压力和接触力。面力在坐标轴x、y、z上的投影用$\overline{X}$、$\overline{Y}$、$\overline{Z}$表示，为该物体表面上某点处的面力分量。

物体受外力作用时，其内部相邻部分之间就产生了相互作用力，这种内部相互作用的力就称之为内力。内力在各点的集度就是各点的应力。通常用它沿作用截面的法线和切线方向上的分量，即正应力σ和剪应力τ来表示。因为这些分量与物体的形状改变或材料的强度有直接的关系。

为了考察物体受外力后内部某一点P的应力，过P点从物体内截取出一微小的正六面体，棱边平行于坐标轴，长度分别为：$PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$、$PC=\mathrm{d}z$，如图1-1所示。微体的每一截面上的应力都可以分解成与三个坐标轴平行的一个正应力和两个剪应力。为了表明各应力分量的作用面和作用方向，在正应力σ上加一个坐标角码，例如σ_x是指作用在垂直于x轴的截面上，并与x轴平行的正应力；在剪应力τ上加两个坐标角码，前

一个角码表示作用面垂直于哪一个坐标轴，后一个角码表示作用方向沿着哪一个坐标轴，例如τ_{xy}是指作用在垂直于x轴的面上，方向与y轴平行的剪应力。如果某截面的外法线沿着坐标轴的正方向，这个截面就称为正面；反之，若外法线沿着坐标轴的负方向，这个截面就称为负面。正面上的应力分量以沿坐标轴正方向为正，沿坐标轴负方向为负；负面上的应力分量以沿坐标轴负方向为正，沿坐标轴正方向为负。图1-1所示的应力分量全部都是正的。

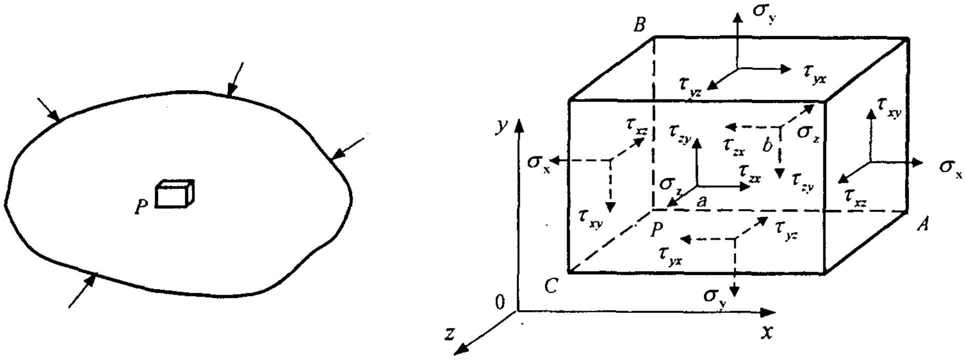

图1-1　弹性体内某点P的应力

在图1-1所示的9个应力分量中，6个剪应力之间具有一定的互等关系。如以连接微体前后两截面中心的直线ab为矩轴(见图1-1)，可写出力矩的平衡方程为

$$2\tau_{xy}\mathrm{d}y\mathrm{d}z\,\frac{\mathrm{d}x}{2}-2\tau_{yx}\mathrm{d}z\mathrm{d}x\,\frac{\mathrm{d}y}{2}=0$$

由此得到

$$\tau_{xy}=\tau_{yx}$$

同样可列出其余两个相似的方程，简化得出

$$\tau_{yz}=\tau_{zy},\qquad \tau_{zx}=\tau_{xz}$$

这就是所谓的剪应力互等定律，即作用在两垂直面上与两面交线垂直的剪应力，大小相等，正负号相同。因此，剪应力记号的两个角码可以对调。于是，9个应力分量中只有6个是独立的，即3个正应力σ_x、σ_y、σ_z和3个剪应力τ_{xy}、τ_{yz}、τ_{zx}。和材料力学的分析相似，利用静力平衡，过点P所作的任意斜截面上的应力，都可用上述6个应力分量来确定。所以，这6个应力分量确定了P点的应力状态。应力分析的目的，就是确定物体在外力作用下各点的6个应力分量，进而求得主应力，以作为强度设计的依据。

物体在外力作用下将产生变形，由于变形后物体的形状可以用其各部分的长度和角度来表示，因此物体受外力后的变形，也可归结为长度和角度的改变。如求物体内某点的变形，可在P点沿坐标轴x、y、z正方向取3个微小线段PA、PB、PC，如图1-1所示。物体变形后，PA、PB、PC的长度以及它们之间的夹角一般都将改变，各线段的每单位长度的伸长或缩短称为正应变，用字母ε表示；各线段之间的角度变化(以弧度为单位)称为剪应变，用字母γ表示。在正应变ε上加一个坐标角码表示伸缩的方向，如ε_x表示沿x方向的线段PA的正应变；在剪应变γ上加两个坐标角码，以表示沿这两个坐标方向

的线段的角度变化，如γ_{yz}表示沿y与z两方向的线段即PB与PC之间的角度变化。正应变以伸长为正，缩短为负，剪应变以直角变小时为正，变大时为负。这些规定和正应力、剪应力的符号规定是一致的。

物体内任一点的位移，可用它在x、y、z三轴上的投影u、v、w来表示。沿坐标轴正方向为正，反之为负。这三个投影称为该点的位移分量。

一般而论，弹性体内任意一点处的外力、应力、应变和位移是随着该点位置的变化而变化的，因而都是位置坐标的函数。

弹性力学所研究的绝大多数问题都属于静不定问题，亦即只有静力平衡方程是解不出应力的。因此，必须综合应用平衡（应力、外力之间的关系）、几何（应变、位移之间的关系）和物理（应力、应变之间的关系）三个方面的方程才能得出问题的解答。

第二节　弹性力学的平面问题

严格地讲，任何弹性体都是空间物体，它所承受的外力一般都是空间力系。因此，任何一个实际的弹性力学问题都是空间问题。但是，如果所研究的弹性体具有某种特殊的形状，且承受的是某种特殊的外力，则可把空间问题作为平面问题处理。这样，可使分析和计算大大简化，而所得结果仍能满足工程上的精度要求。

弹性力学平面问题不但在工程实际中具有重要意义，而且通过平面问题可看到解决具体问题的方法，从而进一步掌握弹性力学的基本概念。

平面问题分平面应力和平面应变两种情况，以下将逐一讨论它们的几何特征、受力特点、基本方程和求解方法。

一、平面应力和平面应变

设有很薄的等厚度薄板，见图1-2，其边缘上受有平行于板面且不沿厚度变化的面力作用，同时，体力也平行于板面且不沿厚度变化。设薄板的厚度为t，取坐标如图1-2所示，则在板面上应有

$$(\sigma_z)_{z=\pm t/2}=0,\qquad (\tau_{zx})_{z=\pm t/2}=0,\qquad (\tau_{zy})_{z=\pm t/2}=0$$

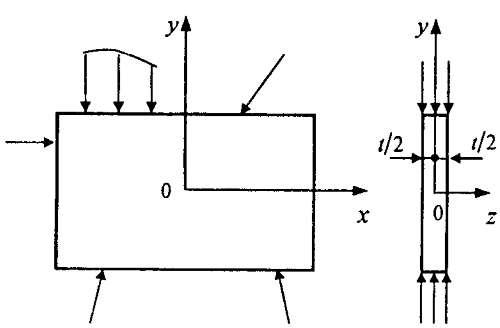

图1-2　平面应力问题示例

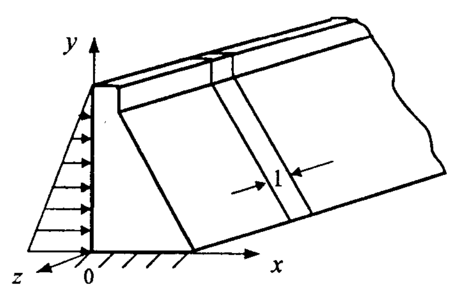

图1-3　平面应变问题示例

由于板很薄，外力又不沿厚度变化，所以可认为在整个薄板的所有点都有

$$\sigma_z=0,\quad \tau_{zx}=0,\quad \tau_{zy}=0$$

这样，6个应力分量只剩下平行于xy面的3个应力分量，即σ_x、σ_y和σ_{xy}，而且它们只是坐标x、y的函数，而与z无关。这类问题即为平面应力问题。

与此相反，设有很长的等截面柱形体，如重力水坝，受有平行于横截面(xy面)且不沿长度(z向)变化的外力作用，如图1-3所示。若假想这个柱形体为无限长，则其任一横截面都可以看做是对称面，因而柱形体内任一点都只有x、y方向的位移u和v，且只是坐标x、y的函数，而与z无关。像这样一类问题，由于$w=0$，亦即z向无伸缩，$\varepsilon_z=0$，因而被称为平面位移问题或平面应变问题。又由对称条件可知，对于这类问题也有$\tau_{zy}=0$，$\tau_{zx}=0$，但σ_z一般不等于零。这样6个应力分量只剩下4个，即σ_x、σ_y、σ_z和σ_{xy}，且它们也仅是坐标x、y的函数。

有许多实际问题，如高压管道、重力坝等，虽不是无限长，但实践证明，对于远离两端的部位，按平面应变问题进行分析，得出的结果具有足够的精度，能满足工程要求。

二、平面问题的基本方程

1. 平衡方程

对于平面应力问题，从图1-2所示的薄板上截取出一个微小的正六面体，沿x、y、z方向的长度分别为dx、dy和1，如图1-4所示。由于应力是位置坐标x、y的函数，因此作用于x轴正负面或y轴正负面上的应力分量是不同的，有微小差量。如设作用于x轴负面上的应力为σ_x、τ_{xy}，由于x坐标的改变，则正面上的应力为$\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx$、$\tau_{xy}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial x}dx$；同样，作用于$y$轴正负面上的应力分别为$\sigma_y$、$\tau_{yx}$和$\sigma_y+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}dy$、$\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy$。因为该六面体是微小的，所以各面上所受的应力可认为是均布的。如考虑体力，体力也可认为是均布的。体力沿x、y轴的分量为X、Y。

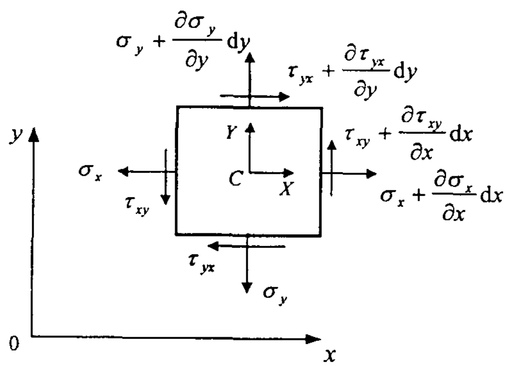

图1-4　平面问题微体受力图

对于平面应变问题，由于沿长度方向所有横截面的情况都相同，所以只需考虑单位长度上的柱形体就够了，如图1-3所示。然后再在单位长度柱形体上沿坐标x、y方向截取出一微小正六面体。该微体在x、y方向的受力情况和平面应力问题是完全相同的，不同的是在z方向还作用有自成平衡的正应力σ_z，因为它不沿长度变化。所以平面应变问题的微体受力图也如图1-4所示。

根据力的平衡条件，图1-4所示的微体可列出两个独立的静力平衡方程。

如沿x方向取力的平衡$\sum F_x=0$，可得

$$\left(\sigma_x+\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}dx\right)dy-\sigma_x dy+\left(\tau_{yx}+\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial y}dy\right)dx-\tau_{yx}dx+Xdxdy=0$$

约简后两边同除以$dxdy$，得

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0$$

同理，沿 y 方向取力的平衡 $\sum F_y=0$，则得

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0$$

此外还有一个力矩平衡方程，如将微体上所有的力对中心 C 点取力矩 $\sum M_C=0$，可以得到 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$。再次证明了剪应力互等定律。

于是平面问题中的平衡方程为

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}+X=0\\ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}+\frac{\partial \sigma_y}{\partial y}+Y=0\end{aligned}\right\} \tag{1-1}$$

以上在建立平衡方程时，采用了物体变形前的尺寸，这是因为这里讨论的是小变形问题，亦即物体受力后各点的位移都远远小于其原来的尺寸，且应变和转角都远小于1。这样，用变形前的尺寸来代替变形后的尺寸不会引起显著的误差，但方程却得到简化，在以后建立任何微分方程时，都将同样处理。

式(1-1)中两个微分方程包含有 σ_x、σ_y 和 $\tau_{xy}=\tau_{yx}$ 三个未知量，所以是静不定问题，必须考虑变形关系，才能求解。

2. 几何方程

现在来推导平面问题中应变分量和位移分量间的关系式。过弹性体(图1-2 所示薄板或图 1-3 所示的单位长度柱形体)内的任意点 P，沿 x 轴、y 轴取微小长度的线段 $PA=\mathrm{d}x$、$PB=\mathrm{d}y$，如图 1-5 所示。假定弹性体变形后，P、A、B 分别移动到 P'、A'、B'。设 P 点移至 P' 点的位移分量为 u、v。由于 A 点横坐标比 P 点有一增量 $\mathrm{d}x$，所以 A 点移至 A' 点的位移分量为 $u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x$、$v+\frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x$；同样，因 B 点的纵坐标比 P 点有一增量 $\mathrm{d}y$，所以 B 点移至 B' 点的位移分量为 $u+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y$、$v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y$。

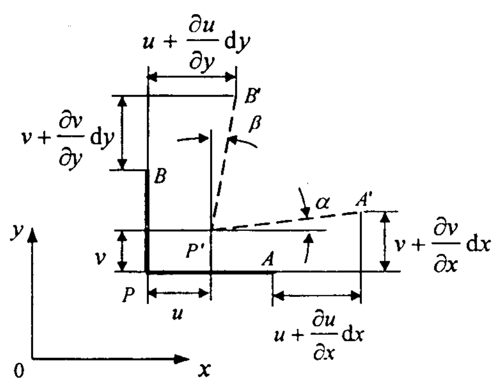

图 1-5　点 P 在 x-y 平面中的位移

由于线段 PA 和 PB 变形后的转角 α、β 都很小，所以线段 PA 的正应变 ε_x 为

$$\varepsilon_x=\frac{P'A'-PA}{PA}\approx\frac{\left(u+\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x\right)-u}{\mathrm{d}x}=\frac{\partial u}{\partial x}$$

线段 PB 的正应变 ε_y 为

$$\varepsilon_y=\frac{P'B'-PB}{PB}\approx\frac{\left(v+\frac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y\right)-v}{\mathrm{d}y}=\frac{\partial v}{\partial y}$$

又在小变形情况下，变形后的应变是远小于1的，所以线段PA的转角α为

$$\alpha \approx \tan\alpha = \frac{\left(v + \frac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x\right) - v}{(1+\varepsilon_x)\mathrm{d}x} \approx \frac{\partial v}{\partial x}$$

线段PB的转角β为

$$\beta \approx \tan\beta = \frac{\left(u + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y\right) - u}{(1+\varepsilon_y)\mathrm{d}y} \approx \frac{\partial u}{\partial y}$$

故线段PA与PB之间的直角的变化，即剪应变γ_{xy}为

$$\gamma_{xy} = \alpha + \beta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

于是，平面问题中的几何方程为

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x},\qquad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y},\qquad \gamma_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \tag{1-2}$$

3. 物理方程

在完全弹性的各向同性体内，应力分量和应变分量之间的关系，根据广义虎克定律可写成为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]\\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}\\
\gamma_{yz} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{yz}\\
\gamma_{zx} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{zx}
\end{aligned}\right\} \tag{1-3}$$

式中E为材料的弹性模量；μ为泊松比。

对于平面应力问题，$\sigma_z=0$、$\tau_{yz}=0$、$\tau_{zx}=0$。故式(1-3)中的第一、二、四式为

$$\left.\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \mu\sigma_y)\\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \mu\sigma_x)\\
\gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy}
\end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

此即平面应力问题的物理方程。此外，(1-3)中的第三式成为

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

可以用来求薄板厚度的改变。又由式(1-3)中的第五、六式可见，$\gamma_{yz}=0$，$\gamma_{zx}=0$。

对于平面应变问题，$\varepsilon_z=0$、$\tau_{yz}=0$、$\tau_{zx}=0$。式(1-3)中的第三式成为

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$$

将上式代入式(1-3)中的第一、二式，并注意到第四式仍适用，经整理即得平面应变问题的物理方程为

$$\left.\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_y\right) \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E}\left(\sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu}\sigma_x\right) \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E}\tau_{xy} \end{aligned}\right\} \tag{1-5}$$

此外，由式(1-3)中的第五、六式也有 $\gamma_{yz}=0$ 和 $\gamma_{zx}=0$。

比较式(1-4)和(1-5)可见两种平面问题的物理方程在形式上是相似的，仅系数不同。如果在平面应力问题的物理方程(1-4)中，将 E 换为 $\frac{E}{1-\mu^2}$，μ 换为 $\frac{\mu}{1-\mu}$，就得到平面应变问题的物理方程(1-5)。

以上导出的 2 个平衡方程(1-1)，3 个几何方程(1-2)和 3 个物理方程(1-4)或(1-5)，是弹性力学平面问题的8 个基本方程。这8 个基本方程恰好含有8 个未知函数：3 个应力分量(σ_x，σ_y，τ_{xy})，3 个应变分量(ε_x，ε_y，γ_{xy})和 2 个位移分量(u，v)。基本方程的数目和未知函数的数目相等，因此在适当的边界条件下是能得到解答的。

三、平面问题的边界条件

弹性力学问题的边界条件有位移边界条件、应力边界条件和混合边界条件三种。

1. 位移边界条件

若弹性体在边界上的位移分量 $\bar{u}$、$\bar{v}$ 是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的位移分量 u、v，在相应的边界上必须等于给定的位移，即要求

$$u = \bar{u}, \qquad v = \bar{v} \tag{1-6}$$

式(1-6)就是平面问题的位移边界条件。

2. 应力边界条件

若弹性体在边界上的面力分量 $\bar{X}$、$\bar{Y}$ 是边界坐标的已知函数，则作为基本方程解的应力分量 σ_x、σ_y、τ_{xy}，在边界上应与给定的面力之间满足平衡关系。因此应力边界条件可由边界上的微体平衡条件得出。

在边界上截取微小单元体，如图1-6 所示。用 N 表示边界面 AB 的外法线方向，并令其方向余弦为

$$\cos\,(N,x) = l, \qquad \cos\,(N,y) = m$$

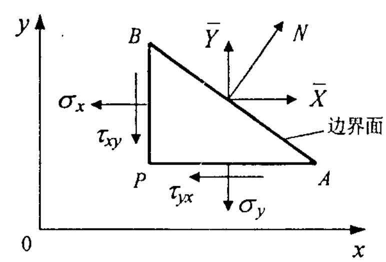

图1-6　应力边界条件

设边界面 AB 的长度为 $\mathrm{d}s$，则截面 PA 和 PB 的长度分别为 $m\mathrm{d}s$ 和 $l\mathrm{d}s$。垂直于图面的尺寸仍取为一个长度单位。由平衡条件 $\sum F_x=0$，得

$$\bar{X}\mathrm{d}s - \sigma_x l\mathrm{d}s - \tau_{yx} m\mathrm{d}s = 0$$

两边同除以 $\mathrm{d}s$，则得

$$l\sigma_x + m\tau_{yx} = \bar{X}$$

同样，由平衡条件$\sum F_y=0$，可得

$$m\sigma_y + l\tau_{xy} = \overline{Y}$$

于是物体边界上各点的应力分量与面力分量之间的关系，亦即平面问题的应力边界条件为

$$\left.\begin{aligned} l\sigma_x + m\tau_{yx} &= \overline{X} \\ m\sigma_y + l\tau_{xy} &= \overline{Y} \end{aligned}\right\} \tag{1-7}$$

当边界垂直于某一坐标轴时，应力边界条件的形式将大为简化。在垂直于x轴的边界上，$l=\pm1$，$m=0$，应力边界条件简化为

$$\sigma_x = \pm\overline{X}, \qquad \tau_{xy} = \pm\overline{Y}$$

在垂直于y轴的边界上，$l=0$，$m=\pm1$，应力边界条件简化为

$$\tau_{yx} = \pm\overline{X}, \qquad \sigma_y = \pm\overline{Y}$$

可见，在这种特殊情况下，应力分量的边界值就等于对应的面力分量。

3. 混合边界条件

当物体的一部分边界具有已知位移，而另一部分边界具有已知面力时，则已知位移的边界可应用式(1-6)，已知面力的边界可应用式(1-7)。

此外，还可能在同一部分边界上出现混合边界条件，即两个边界条件中的一个是位移边界条件，另一个则是应力边界条件。

四、圣维南原理

在求解弹性力学问题时，使应力分量、应变分量和位移分量完全满足基本方程并不困难，但要使边界条件也得到完全满足却往往是困难的。另外，在很多工程结构计算中，都会遇到这样的情况：在物体的一小部分边界上，仅仅知道物体所受的面力的合力，而其分布方式并不明确，因而无从考虑这部分边界上的应力边界条件。在这些情况下，圣维南原理有时可以提供很大的帮助。

圣维南原理可以这样来陈述：如果把物体的一小部分边界上的面力，换为分布不同但静力等效(主矢相同，主矩也相同)的面力，那么近处的应力将有显著的改变，而远处的应力所受的影响可以不计。

五、平面问题的解法

在弹性力学中，求解未知的应力分量、应变分量和位移分量，通常有位移解法和应力解法两种。

1. 位移解法

位移解法是以位移分量作为基本未知函数，综合运用平衡、几何和物理方程，得到只包含位移分量的微分方程。然后，由这些微分方程和边界条件求出位移分量，再由几何方程求出应变分量，由物理方程求出应力分量。

现在来导出按位移解法求解平面问题所需的微分方程和边界条件。

对于平面应力问题，可由物理方程(1-4)解出应力分量，得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_x+\mu\varepsilon_y)\\\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_y+\mu\varepsilon_x)\\\gamma_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\tau_{xy}\end{aligned}\right\}\tag{1-8}$$

将几何方程(1-2)代入式(1-8)得

$$\left.\begin{aligned}\sigma_x&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)\\\sigma_y&=\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)\\\gamma_{xy}&=\frac{E}{2(1+\mu)}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\end{aligned}\right\}\tag{①}$$

再将式①代入平衡方程(1-1)，简化后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x\partial y}\right)+X=0\\\frac{E}{1-\mu^2}\left(\frac{\partial^2v}{\partial y^2}+\frac{1-\mu}{2}\frac{\partial^2v}{\partial x^2}+\frac{1+\mu}{2}\frac{\partial^2u}{\partial x\partial y}\right)+Y=0\end{aligned}\right\}\tag{1-9}$$

这就是按位移解法求解平面问题时所需的基本微分方程。

由微分方程(1-9)确定的位移解答在已知位移边界上应满足的条件仍为式(1-6)。当已知应力边界时，可将式①代入应力边界条件式(1-7)，简化后得

$$\left.\begin{aligned}\frac{E}{1-\mu^2}\left[l\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\mu\frac{\partial v}{\partial y}\right)+m\,\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\overline{X}\\\frac{E}{1-\mu^2}\left[m\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\mu\frac{\partial u}{\partial x}\right)+l\,\frac{1-\mu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]=\overline{Y}\end{aligned}\right\}\tag{1-10}$$

此即用位移表示的应力边界条件，也就是按位移解法求解平面问题时所用的应力边界条件。

对于平面应变问题，只需在以上方程中将E换为$\frac{E}{1-\mu^2}$，将μ换为$\frac{\mu}{1-\mu}$即可。

2. 应力解法

应力解法是以应力分量作为基本未知函数，综合运用平衡、几何和物理方程，得到只包含应力分量的微分方程。然后，由这些微分方程和应力边界条件求出应力分量，再由物理方程和几何方程依次求出应变分量和位移分量。

现在来导出按应力解法求解平面问题所需的微分方程。

为了消去位移分量，将几何方程(1-2)中的ε_x对y求二阶导数，ε_y对x求二阶导数，然后相加得

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)=\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

由几何方程(1-2)中的第三式可见，这个等式右边括号中的表达式就等于γ_{xy}，于是有

$$\frac{\partial^2\varepsilon_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varepsilon_y}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\gamma_{xy}}{\partial x\partial y}\tag{1-11}$$

此关系式称为相容方程或变形协调方程。亦即,只有当ε_x、ε_y、γ_{xy}满足这个方程时,变形才能协调。否则,若ε_x、ε_y、γ_{xy}不满足这个方程,那么由几何方程(1-2)中的任何两个方程得到的位移分量,将与第三个方程不相容。这表明变形以后的物体不再是连续的,某些部分发生了互相脱离或互相侵入的情况。

为了消去应变分量,将物理方程代入式(1-11),使相容方程中只包含应力分量,然后与平衡方程联立,就能解出应力分量了。

对于平面应力问题,将物理方程(1-4)代入式(1-11),可得只包含应力分量的相容方程为

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(\sigma_x-\mu\sigma_y)+\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\sigma_y-\mu\sigma_x)=2(1+\mu)\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y} \quad ②$$

利用平衡方程,上式可简化为更为简单的形式。为此,将平衡方程(1-1)的第一式对x求导,第二式对y求导,然后相加,并注意到$\tau_{yx}=\tau_{xy}$,可得

$$2\frac{\partial^2\tau_{xy}}{\partial x\partial y}=-\frac{\partial^2\sigma_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2\sigma_y}{\partial y^2}-\frac{\partial X}{\partial x}-\frac{\partial Y}{\partial y} \quad ③$$

将式③代入式②,经整理即得用应力分量表示的相容方程为

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=-(1+\mu)\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}\right) \quad (1\text{-}12)$$

这样,按应力解法求解平面应力问题时,应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}应当满足平衡方程(1-1)和以应力表示的相容方程(1-12),当然也应当满足应力边界条件式(1-7)。

对于平面应变问题,只要在式(1-12)中将μ换为$\frac{\mu}{1-\mu}$就可以了。

六、常体力情况与应力函数

当所研究的问题中体力为常量时,如重力和平行移动时的惯性力,在这种情况下,以应力表示的相容方程(1-12)可简化成以下形式

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)(\sigma_x+\sigma_y)=0 \quad (1\text{-}13)$$

或

$$\nabla^2(\sigma_x+\sigma_y)=0$$

式中$\nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$,称作拉普拉斯算子。

这样,平衡方程(1-1)和相容方程(1-13)就组成了用应力法求解常体力问题时的基本方程,再加上应力边界条件(1-7)就可以用来求解平面问题。需要注意的是,这些方程中均不包含弹性常数。因此,若两个弹性体的边界形状相同,所受外力相同,那么无论这两个弹性体的材料是否相同,无论它们是平面应力问题还是平面应变问题,应力分量σ_x、σ_y、τ_{xy}的分布是相同的(σ_z以及应变分量和位移分量不一定相同)。这一结论为用实验方法测定平面问题的应力提供了极大的方便,不仅可以用便于测量的材料代替不便于测量的材料制造模型,而且也可以用薄板模型代替长柱形模型。

下面讨论如何引入一个应力函数,使之能自动满足平衡方程。这样,求解三个未知应力分量的问题就可以简化为寻求一个应力函数的问题。