概率論初阶

Б.В. 格涅金柯、А.Я. 恆欽著

机械工业出版社

概 率 論 初 阶

第 四 版

Б. В. 格涅金柯、А. Я. 恒欽著
卜 元 震 譯

机械工业出版社

內容簡介

本書目的是向軍队、工业、农业和經济部門中的工作人員介紹概率論的基本概念和計算概率的方法。內容深入淺出，具有中学数学知識即可閱讀本書。

內容分概率和随机变量两編；在第一編中講述了概率的基本概念，概率的加法法則，乘法法則以及貝奴里定理。在第二編中則講述了随机变量的概念及其分布律，散布和平均偏差，大数定律和正态律。

苏联 Б. В. Гнеденко, А. Я. Хинчин 著 'Элементарное введение в теорию вероятностей (Издание четвертое)' (Гизтех или Гостехиздат 1957 年第四版)

*　　　*　　　*

NO. 1944

1958 年 9 月第一版　　1960 年 2 月第一版第二次印刷

787×1092 1/32　字数 85 千字　印張 4 1/8　2,101— 4,150册

机械工業出版社(北京阜成門外百万庄)出版

机械工業出版社印刷厂印刷　　新华書店發行

北京市書刊出版業營業許可証出字第 008 号　定价(11) 0.65 元

目　录

第一版序書

如果能通曉某一門数学学科的理論基础，那就随时可以更自覺和更积極地把这門科学的結論应用到实踐上去。其实，在概率論的領域里，事情就是这样的，軍队，工业，农业，經济等方面的大多数領导者們(有时是普通的工作人員)都要和这門科学發生关系，但是这些人的数学知識却非常有限。

本書的目的就是要用尽可能适当的方式，向这一类工作者們介紹概率論的基本概念和計算概率的方法。所有十年制中学畢业的学生都能看懂这本書，七年制学校畢业的学生差不多也能完全看懂这本書。本書的每一章都是用具体的实际例子作基础；但是在选取这些例子时，我們所遵循的，首先不是它們在实踐上的現实性，而是为通曉相应理論基础所具有的說明力。

莫斯科一九四五年一月七日

第二版序言

現今向讀者提出的本書第二版，和初版只有无关重要的区別：对初版的結語作了些补充，以及在原文的文意上作了为数不多的修改。

基輔——莫斯科一九四九年十一月七日

第四版序言

第四版和前两版几乎沒有区別，只作了一些无关重要的修改。

一九五七年一月廿八日

第一編 概率

第一章
事件的概率

1 概率的概念

如果說某射手，在一定的射击条件下，其命中率是92%的話，那就是說，在某种特定的条件下（同样的距离、同一枝槍射击同一目标等等）射击一百次，平均起来大約有 92 次命中（也就是約 8 次不中）。当然，这不是說，每射击一百次就有 92 次命中；有时会是 91 或 90 次，也有时会是 93 或 94 次，甚至有时命中次数会显著地小于或显著地大于 92 次；但是在同样的条件下，作多次重复射击时，只要不發生某种本質的变化（例如，射手可能提高自己的技术，使命中的平均百分率提高到95甚至更高些）平均来說，命中的百分率是不会發生变化的。經驗証明，射手在大多数的情况下，在發射一百次中，命中次数大概是 92 次左右；至于一百次中命中次数小于 88 或大于96的情形虽然也会遇到，但总是比較少的。作为表示射手技术水平的百分数92%，一般是很稳定的，即（在同样的条件下）作大量射击时，射手的命中百分率几乎是一样的，与平均值有显著差别的只是極个别的情形。

我們再考察一个例子。在某一个企業里，在一定条件下平均有1.6%的成品不合規格而成为廢品。这就是說，在一批成品中，假定以 1000 件为一批的話，在廢品未挑出前，大約就有

16件不合格。当然，有时廢品的数目会大一些，而有时又会小一些；但是平均来說是接近16这个数目的。而且在大多数以1000件作为一批的成品中，也是接近16这个数字的。当然，在这里我們假定生产条件(制造过程的組織、設备、原料、工作熟練程度等)是不改变的。

显然，这种例子可以随意的举出很多来，在所有这些例子中，我們看出在同一性質的大量作業中(重复射击，制件的大量生产等)，就各种重要事件(命中目标，不合规格的成品等)的百分率来說，在給定的条件下，几乎总是一样的，只有在极少数的情况下才与某平均数有較显著的差别。因此，我們可以說，这个平均数是已知大量作業(在給予的特定条件下)的特征指数。命中率告訴我們射手的技术，廢品率为我們估計产品的質量。从而在軍事、技术、經济、物理、化学等各种領域中，这种指数的知識的重要性，就自然而然地明白了；它不但可以使我們評定已經發生过的大量現象，而且可以預計将發生的大量作業的結局。

如果一个射手在給予的射击条件下，在發射100次中平均有92次击中目标，那么我們說：这个射手，他在这种条件下的命中概率是92%(或92/100，或0.92)。如果在給予的条件下，某企業的每1000件成品中有16件廢品，那么我們說：这次生产的廢品概率是0.016或1.6%。

在已知的大量作業中，一般所謂事件的概率是什么呢？对于这一点，現在是不难回答的。大量作業总是由同一性質的多次重复的單一作業所組成(射击由單次發射击組成，大量生产是由制造單个物品所組成等)。我們感兴趣的是單一作業的确定結果(單次發射时命中目标，單件成品的不合规格等)，首先

是在各种大量作業中的这种結果的数字(多少發命中目标，多少成品被成为廢品等)。在已知大量作業中，这种“成功”● 結果的百分率(或者一般說机遇)，我們把它叫做这种重要結果的概率。同时必須注意，各种事件(結果)的概率，只有在完全确定的条件，也就是我們进行大量作業的条件下討論才有意义。这些条件的任何本質变化，当然会引起概率發生变化。

以命中目标这样的大量作業(事件 A)为例，在 b 次射击中平均命中 a 次，那么事件 A 在給予条件下的概率是 $\frac{a}{b}$ $\left(\text{或}\ \frac{100a}{b}\%\right)$。因此我們可以說，單一作業成功結局的概率就是，这种“成功”結局平均出現的次数与組成已知大量作業的全部單一作業的次数的比。不言而喻，如果某一事件的概率等于 $\frac{a}{b}$，那么在給予的每一組 b 次單一作業中，这一事件出現的次数，可以大于 a 次，也可以小于 a 次；只是平均来說，它大致出現 a 次；在这些 b 次作業組中，事件 A 出現的次数是与 a 接近的，如果 b 是个很大的数目的时候更是这样。

例 1 某一城市在第一季度出生的情况为：

一月份男孩 145 个女孩 135 个，

二月份男孩 142 个女孩 136 个，

三月份男孩 152 个女孩 140 个。

出生男孩的概率是多大呢？男孩出生的机遇是：

一月份：$\frac{145}{280}\approx 0.518=51.8\%$，

二月份：$\frac{142}{278}\approx 0.511=51.1\%$，

三月份：$\frac{152}{292}\approx 0.520=52.0\%$。

● 在第二个例子中，很可能会說成是“不成功的”。但是在概率論中，使我們感到兴趣的問題的事件的結果常叫做“成功的”。

我們看到，每个月的机遇接近于机遇的算术平均数0.516＝51.6%；在一定的条件下，所得概率大約是0.516或51.6%。这个数字在研究人口动态的人口統計学中是熟知的；看来，在一般条件下，在不同时期男孩出生的机遇不会与这个数字相差过大。

例2 在上一世紀初，發現了称为布朗运动(以發現者英国植物学家布朗的名字定名)的著名現象。这个現象断定：浮悬于液体內● 的物質的微小粒子是处于杂乱的运动状态中，其原因不明。

当气体动力学沒有給出簡單而詳尽的解釋以前，很久不能說明这个似乎是自發运动的理由，而气体动力学的解釋是：浮悬于液体的粒子的运动是液体分子对这些粒子撞击的結果。气体动力学使得有可能計算在一定容积的液体內沒有一顆浮悬物質粒子的概率，也可計算有一顆，二顆，三顆粒子等的概率。为了驗証理論的結果，曾进行了許多实驗。

我們現举出瑞典物理学家斯韋捷尔格观測浮悬在水中的黃金微小粒子的518次結果。他曾經發現，在受观測的空間部分有112次沒有观測到一顆粒子，168次观測到一顆粒子，130次两顆粒子，69次三顆粒子，32次四顆粒子，5次五顆粒子，1次六顆粒子，1次七顆粒子。

观測到各种数目的粒子的机遇等于：

0顆粒子：$\frac{112}{518}\approx 0.216$； 1顆粒子：$\frac{168}{518}\approx 0.325$；

2顆粒子：$\frac{130}{518}\approx 0.251$； 3顆粒子：$\frac{69}{518}\approx 0.133$；

4顆粒子：$\frac{32}{518}\approx 0.062$； 5顆粒子：$\frac{5}{518}\approx 0.010$；

● 亦即处于无异于平衡的状态。

6 顆粒子：$\frac{1}{518}\approx 0.002$；7 顆粒子：$\frac{1}{518}\approx 0.002$。

观測結果显然和理論上預測的概率非常一致。

2 不可能事件和必然事件

显然，事件的概率总是正数和零。它不可能大于一，因而表示概率的分数，分子不可能大于分母（“成功”作業的次数不可能大于全部作業的次数）。

我們建議用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率，无論什么事件总是

$$0\leqslant P(A)\leqslant 1。$$

$P(A)$ 愈大，事件 A 就愈易發生。例如，射手命中目标的概率愈大，他成功的射击就愈多，而他的技术就愈高。如果事件的概率非常小，那么它就很少發生；如果 $P(A)=0$，那么事件 A 或者无論何时都不会發生，或者發生得这样少，以至实际上可以認为它不可能。反之，如果 $P(A)$ 接近于 1，那么表示概率分数的分子和分母很接近，亦卽作業中占压到多数的是“成功的”；在大多数情形中这样的事件总是發生的；如果 $P(A)=1$，那么事件 A 一定發生，或者几乎一定發生，以至实际上可以認为它“必然”；亦卽估計它一定發生。如果 $P(A)=\frac{1}{2}$，那么事件 A 在所有的情况下大約出現一半；这就是說，“成功”和“不成功”作業的發生大致一样多。如果 $P(A)>\frac{1}{2}$，那么發生事件 A 就比不發生要頻繁一些；当 $P(A)<\frac{1}{2}$，我們就得到相反的現象。

事件的概率小到什么程度，就能够使我們在实踐上認为它不可能呢？要对这个問題作一个一般性的回答是不可能的，因为一切决定于所論事件的重要程度。例如，0.01 是一个不

大的数。如果我們有一批炮彈，而 0.01 是炮彈落地时不爆炸的概率，那么这就意味着，大約 1% 的發射是无效的。这是可以容忍的。假若我們有一个降落傘，而 0.01 是在跳傘时傘不張开的概率，当然这就无論如何不能容忍，因为这意味着，在一百次跳傘中就有一次会使傘兵的宝貴生命毫无意义的牺牲掉。这个例子指出，在考虑每一个問題时，我們应該預先根据实际情況，来确定事件的概率如何小，我們就能够于事无損地認为它不可能。

3 問 題

問題 一个射手的命中率是80%，而另一个（在同样射击条件下）是 70%。如果两个射手同时發射，求命中目标的概率。两顆子彈之一中了目标，就認为是命中。

解法一：我們假定进行 100 次双射。其中第一个射手大約有 80 次命中目标，20次沒有命中目标。而第二个射手在100次射击中平均有 70 次命中目标，也就是 10 次中有 7 次命中目标，所以我們可以預期，在第一个射手沒有命中的 20 次中，第二个射手大約命中 14 次。因此，在整个 100 次射击中，大約有 $80+14=94$ 次命中目标。所以，我們的两个射手同时射击时，命中目标的概率就等于 94%或 0.94。

解法二：我們仍然假定进行 100 次双射。我們已經看出，这时第一个射手有 20 次沒有命中目标。因为第二个射手在100次射击中大約有 30 次未命中目标，这就是在十次中大約有 3 次未命中目标，所以可以預料，在第一个射手落空的20次射击中，大約有 6 次第二个射手也沒有命中目标。这 6 次射击未命中目标而在其余 94 次中，最少有一个射手射击成功，亦

即命中目标。我們仍旧得到同一結論，即在 100 次双射中，大約有 94 次命中目标，亦即命中的概率是 94% 或 0.94。

我們考虑的問題非常簡單。但是它已經使我們得到一个重要的結果：可能有这种情形，如果会求一些事件的概率，有时对于求另一些較复杂的事件的概率是有益的。事实上，这种情形很多，不只在軍事上是这样，就是在任何科学和任何实踐活动中都可以遇到很多这种現象。

当然，遇到每一个这样一类的新問題，要探求它的特殊解法是非常不方便的。科学总是企圖建立一般法則，而这种一般法則的知識使我們可以机械地或几乎机械地解决互相类似的个別問題。

在大量現象的領域中，建立这种一般法則的科学叫做概率論。在这本書里将叙述这門科学的基本理論。

概率論和算术、几何一样，也是数学的一个分支。因此，它的方法就是严格論証的方法，而它的工具是公式、表、圖等。

双射就为二人作双射[illegible]

第 二 章

概率的加法法則

4 概率的加法法則的推导

在計算概率时用到的最簡單而最重要的法則，就是我們現在要探討的加法法則。

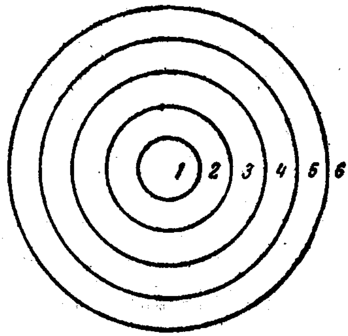

圖 1

向如圖 1 所示的靶子射击时，在一定的距离对于不同的射手，击中区域 1, 2, 3, 4, 5, 6 的概率也不相同。設某射手击中区域 1 的概率是 0.24，而击中区域 2 的概率是 0.17。正如我們所知道的，这就是說，由这射手所發射的一百發子彈中，(平均)有 24 發击中区域 1，17 發击中区域 2。

在某一次射击比賽中，設子彈击中区域 1 作为“优”，击中区域 2 作为“良”。我們的射手得到优或良的發射的概率是多大呢？

这問題是容易回答的。由射手發射的每一百發子彈中，大約有 24 發射入区域 1，大約有 17 發射入区域 2。这就是說，大約有 24＋17＝41 發子彈射入区域 1 和区域 2。因而所求概率等于 0.41＝0.24＋0.17。因此，發射为优或良的概率等于优射和良射的概率之和。

我們再考慮另外一个例子。在第 16, 22, 26, 31 四路电車經过的电車站，有一个乘客等候着第 26 路和 16 路电車。假定各路电車經过的次數平均是一样的，求首先到站的电車是这个乘客所需路綫电車的概率。

显然，16 路电車首先到站的概率是1/4；26 路电車首先到站的概率也一样。所求概率显然等于$\frac{1}{2}$。但是

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4};$$

因而我們可以說，首先出現 16 路或 26 路电車的概率等于 16 路电車和 26 路电車出現的概率之和。

現在，我們可以引入比較一般的論述。

在某大量作業进行时，在每一組 b 次單一作業中平均出現

結果 A_1	a_1 次,
結果 A_2	a_2 次,
結果 A_3	a_3 次

等。換言之

事件 A_1 的概率等于$\frac{a_1}{b}$,

事件 A_2 的概率等于$\frac{a_2}{b}$,

事件 A_3 的概率等于$\frac{a_3}{b}$

等。

某單一作業出現結果A_1, A_2, A_3, ……中任何一个（那一个都一样）的概率是多大呢？

使我們感兴趣的事件可以叫做"A_1, 或 A_2, 或 A_3, 或…"●

● 在这里和其他类似地方的省略号表示"等等"。

这事件在一組 b 次作業中出現 $a_1+a_2+a_3+\cdots$ 次；这就是所求概率等于

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots}{b}=\frac{a_1}{b}+\frac{a_2}{b}+\frac{a_3}{b}+\cdots\cdots;$$

这可以写成下面的公式：

$$\boxed{\begin{aligned}P(A_1,\text{或 }A_2,\text{或 }A_3,\text{或}\cdots)=P(A_1)+\\+P(A_2)+P(A_3)+\cdots\end{aligned}}$$

同时，和上面的例子一样，我們在一般論述中也总归假定，被探討的結果中的任意两个（例如 A_1 和 A_2）互不相容，亦卽不可能在同一單一作業中出現。举例来說，被等候着的电車不可能同时是需要和不需要的一路，它或者是适合乘客的要求，或者是不适合。

这个，关于独立結果的互不相容性的假定，是非常重要的；沒有它，加法法則就要成为不正确的，而应用它就会导致大錯。例如，我們来考虑上一节最后所解决的問題（12頁）。在那里，恰巧是在双射时求第一个和第二个射手击中目标的概率，而且第一个射手的命中概率是 0.8，而第二个的是 0.7。如果我們应用加法法則来解这个問題，那么我們立刻得到，所求概率等于 $0.8+0.7=1.5$，这显然是荒謬的結果，因为我們已經知道，事件的概率不可能大于一。我們得到这个不正确而荒謬的解答，是由于把加法法則应用于它不能应用的情況上去了，因为这个問題中所談的两个結果是互相相容的，因为在同一次双射中，两个射手同时击中目标是完全可能的。初学者在計算概率时所發生的錯誤中相当大一部分正好是由于这种不正确的应用加法法則；因此必須細心地防范这种錯誤，在每一次应用加法法則时，必須把那些要应用法則的事件，驗証是否眞是两两互不相容。