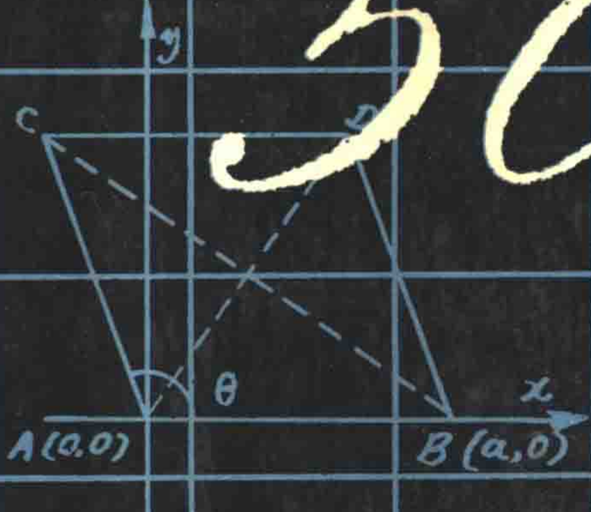
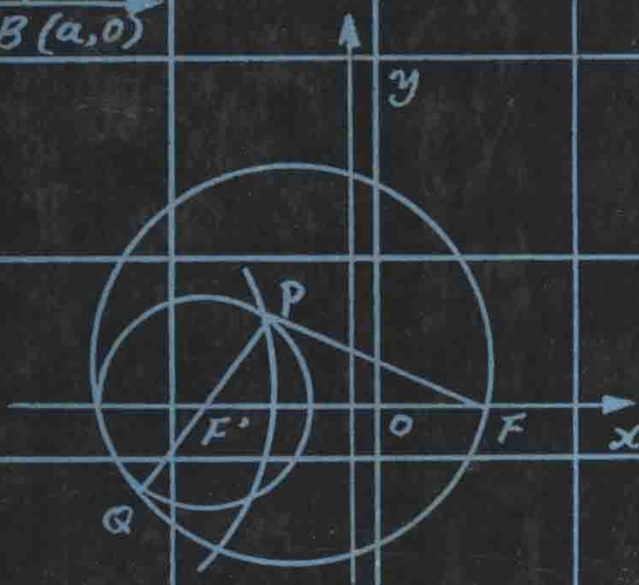
FUZHUXIANYINFA 500 LI

辅助线引法 500例





山西人民出版社

辅助线引法500例

牛志英　编著

山 西 人 民 出 版 社

辅助线引法500例

牛　志　英

山西人民出版社出版（太原并州北路十一号）
山西省新华书店发行　山西新华印刷厂印刷

开本：787×1092 1/32 印张：11.25 字数：240千字
1988年6月第1版　1988年6月太原第1次印刷
印数：1—20,000册

ISBN 7—203—00432—7
G·103　　定价：2.70元

内 容 簡 介

本书根据作者长期的教学实践，围绕平面几何的重点和难点，全面系统地介绍了辅助线的作用和引法。全书图文并茂、详略兼备，对提高读者的思维能力和解题能力大有帮助。是青少年学习平面几何的钥匙；也可作为中学教师教学的参考。

前　言

遇到几何题，有的人往往无从下手，总觉得条件和结论间好象是彼此孤立的。要想进一步探寻这类问题的解题途径，最有效的办法就是要引出适当的辅助线来。它就象一座桥梁，沟通了条件和结论间的鸿沟，能把表面上看来似乎孤立的元素有机的联系在一起。

有时面对一个几何题，苦思冥想不得其解。一旦在曾经思索过的问题中发现相似的地方进行类比；或结合有关问题引起联想，于是触类旁通，灵机一动引出奇妙的辅助线来，使问题迎刃而解。这时心里那股兴奋欢愉劲儿，实在难以形容。

几何题由于种类繁杂、变化多端，一个题往往会有多种解法，其繁简优劣之别，也体现在辅助线是否引的得当。人们常常夸奖某个题解的妙，仔细推敲，妙就妙在辅助线引的出色、引的高明，它象一支制胜的奇兵，突然出现在决定胜负的关键地方。

医生治病难，难就难在没有包治百病的灵丹妙药；同样，引辅助线难，难就难在它既无一定的程序，也没一般的公式，找不到一条能解任何题的万能辅助线。正因为如此，一般几何书上很少涉及到这方面的论述。于是更使学生感到头疼，教师觉得棘手　致使当前在几何教学中存在两个偏

向：有的教师认为引辅助线挺神秘，只能意会、不可言传，主张要学生死背硬记；有的教师却盲目强调多做多练，鼓吹“只要肯下功夫，到时候自然而然就会了.”前者生吞活剥固然不对，后者放任自流也难得要领，甚至会使学生在题海中越陷越深．要知道，实践当然重要，但必须把它提到理论高度才能进一步指导实践．为此，作者在长期教学中通过正反两方面的经验，想对此作些有益的探讨，试图帮助大家把一堆复杂的辅助线理出个头绪来．

医生尽管不能包治百病，但确能为大多数人减轻病痛，甚至于创造奇迹，其原因就是几千年来总结了不少规律，积累了大量的偏方验方，就能对症下药．同样，经过长期的解题实践，也使我们探索和总结出一些引辅助线的规律，可供大家运用和借鉴．这和医生治病时先要掌握各种药物的性能一样．师生证题时，先要务必明确辅助线的作用．解起题来，才能少走弯路，越来越得心应手，做到有的放矢．

目　录

第一编　辅助线的一般作用

关于辅助线的一般作用，概括下来，主要有以下十个方面：

一、发掘条件潜力，充分表达题意

几何证题，主要是探索和揭示条件和结论之间内在的必然的联系，如果碰到条件和结论中有关元素之间设有明显的逻辑关系，往往最容易忽略和遗漏这种联系．初学几何的人感到束手无策时总是牢骚满腹，埋怨给的条件不够，其实是自己不善于发现和利用条件．在这个节骨眼儿上，如能引出适当的辅助线来，就能通过新图将条件中隐含的有关元素的性质揭示出来，把题意充分表达清楚，从而导出正确的解题途径．下面举几个例子：

【例1】 已知：图1.1.1，在$\triangle ABC$中，BB'和CC'分别是$\angle B$和$\angle C$的平分线，$AD\perp CC'$，$AE\perp BB'$，D、E是垂足．

求证：$DE\parallel BC$．

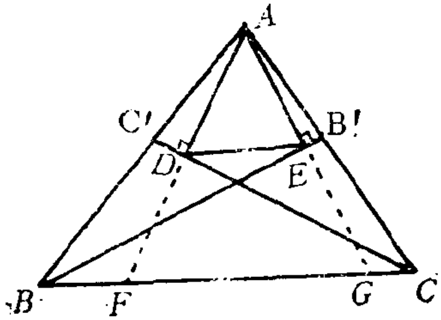


图　1.1.1

分析： 如果光从原图上

着眼，思来想去总是原地踏步，难以奏效。若能广开思路，推敲角平分线的有关性质，就会从$AD \perp CC'$及$AE \perp BB'$中进一步发现了A点关于CC'的对称点一定在BC上，A点关于BB'的对称点也在BC上，只要延长AD交BC于F，延长AE交BC于G，从而顺蔓摸瓜，就能得出$AD=DF$，$AE=EG$，所以DE是$\triangle AFG$的中位线，就证得$ED \parallel FG$，即$DE \parallel BC$。

由此可见，原题里还潜伏着D和E分别是AF和AG的中点这个条件，只有通过辅助线才能发掘出来。

通过上题，想想看：

①如果其它条件不变，只把BB'、CC'换成$\angle B$和$\angle C$外角的平分线，将会得到什么结论？

②如果从A分别向$\angle B$和$\angle C$及其外角的平分线作出四条垂线。那么这四个垂足间有何关系？它们之间的连线和底边又有何关系？

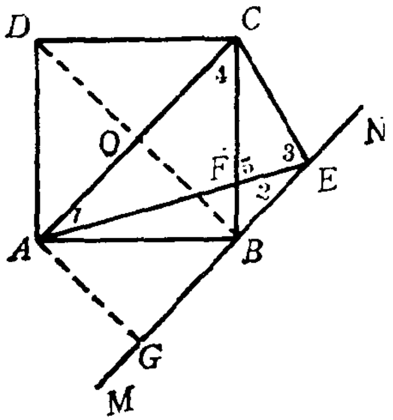


图 1.1.2

【例2】 已知：如图1.1.2，在正方形$ABCD$中，过B作直线$MN \parallel AC$，以A为圆心，AC为半径画弧交MN于E，连AE交BC于F。

求证：$CE=CF$。

分析：因为题上只笼统地说$ABCD$是正方形，就必须有选择的应用有关正方形的性质，通过辅助线具体而形象化的表现出来：根据正方形的对角线互相垂直平分且相等，得知OB正是AC和MN间的距离，其

长度恰好等于 AC 的一半，

于是只要作出 $AG \perp MN$，即可得出：

$AG = OB = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}AE$，所以 $\angle 1 = \angle 2 = 30°$，

$\angle 3 = \frac{1}{2}(180° - 30°) = 75°$，因为 $\angle 4 = 45°$，

所以 $\angle 5 = 30° + 45° = 75°$，所以 $CE = CF$。

可见，作出辅助线 BD 和 AG，才能把正方形中在证题时应用到的有关属性充分表达到来。

如果 AE 不和线段 BC 相交，那么延长 EA 交 BC 的延长线于 F 时（如图1.1.3），想想：该如何证明 $CE = CF$？

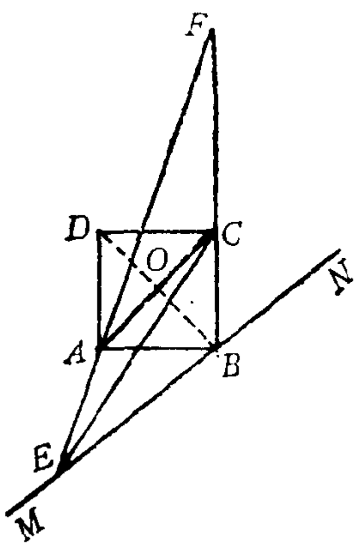


图 1.1.3

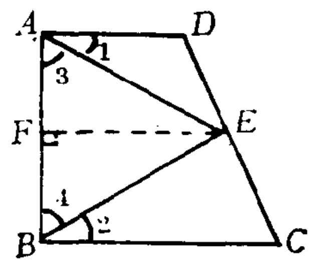


图 1.1.4

【例3】 已知：如图1.1.4，在梯形 $ABCD$ 中，$AD \parallel BC$，$\angle ABC = 90°$。E 是一腰 DC 的中点。

求证：$\angle 1 = \angle 2$。

分析：要证 $\angle 1 = \angle 2$，一般人往往会从 $\triangle ADE$ 和 $\triangle BCE$ 中找寻答案，但这两个三角形既不全等又不相似，

直接难以如愿．这时可继续深钻，要证$\angle 1=\angle 2$，可证$\angle 3=\angle 4$。要证$\angle 3=\angle 4$，可证$EA=EB$，要证$EA=EB$，可证E在AB的垂直平分线上．为此，可作$EF\perp AB$，设法证得$AF=FB$。

因为$AD\parallel FE\parallel BC$，$DE=EC$，所以$AF=FB$，

$EA=EB$，$\angle 3=\angle 4$，$\therefore\angle 1=\angle 2$。

可见，条件中隐藏着一条很重要的线段，就是梯形的中位线．只要引出它来，就可利用平行线等分线段定理证得EF平分AB．从而找到正确的结论．

解决了这个问题后，就可触类旁通证明下列类似问题：

①如图1.1.5，在$\odot O$中AB是直径，直线MN交$\odot O$于C和D。$AE\perp MN$，$BF\perp MN$

求证：$CE=DF$。

②如图1.1.6，$\odot O_1$和$\odot O_2$外切，它们的外公切线分别切两圆于A、B。求证：以O_1O_2为直径的园一定和AB相切．

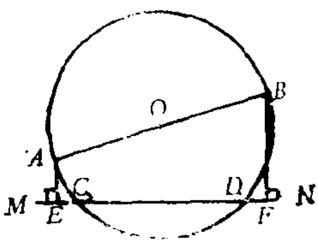


图 1.1.5

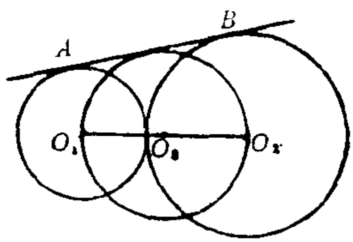


图 1.1.6

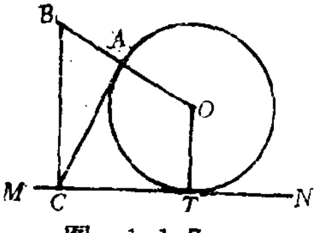


图 1.1.7

③如图1.1.7所示，

已知：MN切$\odot O$于T，B在半径AO的延长线上，且$AB=OA$，$BC\perp MN$，C是垂足．

求证：$\angle CAO=3\angle ACB$。

想想看，这三个题尽管形式不同，题中各隐含着那些重要元素？在引辅助线时要利用什么重要定理？各该引什么辅助线？其中有何共同的规律？

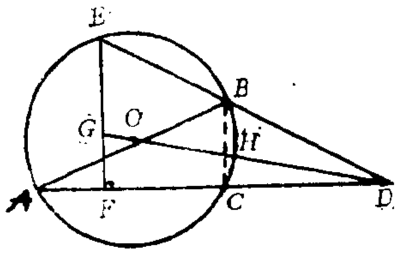


图 1.1.8

【例4】已知：AB 是 $\odot O$ 的直径，D 在弦 AC 的延长线上，且 $CD=AC$，延长 DB 交 $\odot O$ 于 E，$EF\perp AC$，直线 DO 交 EF 于 G。

求证：$EG=\frac{2}{3}EF$。

分析：要证线段 EF 的一部份 EG 是它的 $\frac{2}{3}$，很自然的就会想到重心定理，但是显而易见 EF 并不是有关三角形的中线，这时，决不能就此罢休。只要继续推敲，就会在 $\triangle ABD$ 中找出两条中线 OD 和 BC，其交点就是这个三角形的重心。因此，只要连起 BC 这条辅助线来，设它和 OD 相交于 H。因为 $BC\perp AC$，$EF\perp AC$，所以 $BC\parallel EF$，

$$\frac{BH}{EG}=\frac{DH}{DG}=\frac{HC}{GF},\ \frac{EG}{GF}=\frac{BH}{HC}=\frac{2}{1},$$

所以 $\frac{EG}{EF}=\frac{BH}{BC}=\frac{2}{3}$，即 $EG=\frac{2}{3}EF$。

可见，连结 BC，挖出它和 OD 的交点这颗潜伏很深的重心，就是证明此题的一条捷径。

【例5】如图1.1.9 $\odot O$ 和 $\odot O'$ 外切于 D，过 D 分别作两

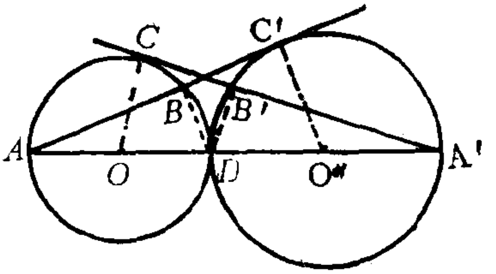


图 1.1.9

圆的直径DA和DA'，过A作$\odot O'$的切线AC'交$\odot O$于B，过A'作$\odot O$的切线$A'C$交$\odot O'$于B'。

求证：$AB \times A'B' = 4BC' \times B'C$

分析：从已知条件看，如能抓住这几个切点和交点仔细推敲，连起DB'、DB、$O'C'$和OC，就能把条件中隐含的有关性质明显的揭示出来，设$\odot O$和$\odot O'$的半径分别为R和R'，因为$\angle ABD = \angle AC'O' = 90°$

所以$DB \parallel O'C'$，$\dfrac{AB}{BC'} = \dfrac{AD}{DO'} = \dfrac{2R}{R'}$……①．同理，$\dfrac{A'B'}{B'C}$

$= \dfrac{A'D}{DO} = \dfrac{2R'}{R}$……②． ①×②得$\dfrac{AB}{BC'} \times \dfrac{A'B'}{B'C} =$

$\dfrac{2R \times 2R'}{R' \times R} = 4$，所以$AB \times A'B' = 4BC' \times B'C$。

【例6】 已知：如图1.1.10

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 45°$，

$AB = AE$。

求证：$BC^2 = CD \times BE$。

分析：因为

$\angle 1 = \angle 2 = \angle 3 = 45°$

延长BA到F，可知

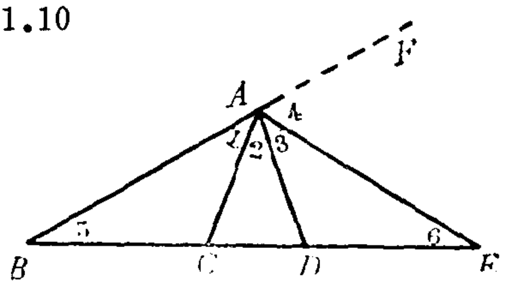


图 1.1.10

$\angle 4 = 45°$，这时不仅知道AC是$\angle BAD$的平分线，而且利用辅助线把条件中隐含的AE是$\angle BAD$外角的平分线也明显

的表示出来了，利用三角形内外角平分线的性质可知：

$\frac{BC}{CD}=\frac{AB}{AD}=\frac{BE}{DE}$，又因$AB=AE$，所以$\angle 5=\angle 6$，

$\triangle ABC\cong\triangle AED$，所以$BC=DE$．$BC^2=CD\times BE$．

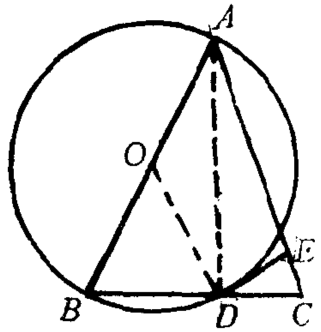


图 1.1.11

【例7】 已知：如图 1.1.11 在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，以AB为直径作圆交BC于D，过D作圆的切线交AC于E。

求证：$DE\perp AC$。

分析：此题直接不易证得$DE\perp AC$，连接OD，可知，$DE\perp OD$.这时只要证得$OD\parallel AC$即可．为此再连AD，得出$AD\perp BC$．因为$AB=AC$，所以$BD=DC$，又因为$OA=OB$，所以$OD\parallel AC$，于是问题得证．可见，原题中隐含了等腰三角形底边上的高和一条中位线，把它们发掘出来，问题就迎刃而解了。

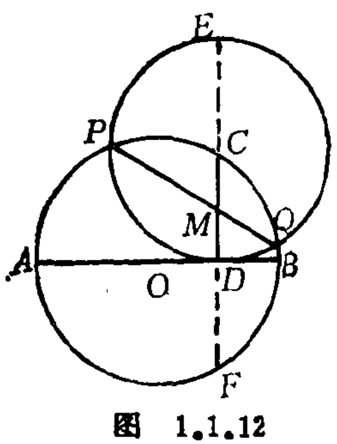


图 1.1.12

【例8】 在图1.1.12中，从$\odot O$上一点引直径AB的垂线，垂足为D，以C为圆心，CD为半径作圆交$\odot O$于P和Q，求证：PQ平分CD。

分析：设PQ和CD相交于M，这时直接难以确定$MC=MD$。PQ是两圆的公共

弦，如想利用相交弦定理，就可把CD向两方延长交$\odot C$于E交$\odot O$于F。这样就可找出隐含的$\odot C$的直径DE和$\odot O$的弦CF，并知$CE=CD=DF$。根据相交弦定理得：

$MC\times MF=MP\times MQ$,

$MD\times ME=MP\times MQ$，所以$MC\times MF=MD\times ME$.

即$MC(CD+MD)=MD(CD+MC)$,

所以$MC\times CD+MC\times MD=MD\times CD+MD\times MC$,

所以$MC\times CD=MD\times CD$.

$MC=MD$，　即PQ平分CD。

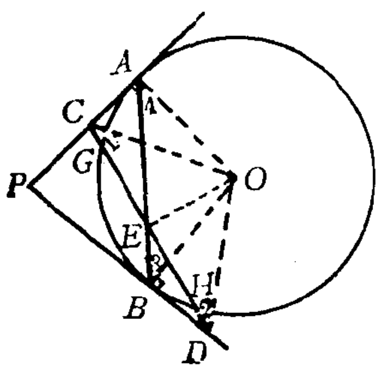


图　1.1.13

【例9】 如图1.1.13，P为$\odot O$外的一点，PA、PB切$\odot O$于A和B，一直线交PA于C交PB的延长线于D，交AB于E，交$\odot O$于G和H，若$EG=EH$。

求证：$AC=BD$。

分析：在$\odot O$中，因为E是弦GH的中点，连结OE就能找出隐含条件$OE\perp CD$，再连OA、OB、OC、OD，可得$OA\perp PA$、$OB\perp PB$利用这些隐含条件，可得O、A、C、E和O、D、B、E四点共圆。所以$\angle 1=\angle 4$，$\angle 2=\angle 3$，　因为$\angle 3=\angle 4$　所以$\angle 1=\angle 2$

$OC=OD$。又因为$OA=OB$　所以$\triangle OAC\cong\triangle OBD$，所以$AC=BD$。　可见，上述各辅助线对发掘已知条件，发挥了相当重要的作用。

【例10】 已知：如图1.1.14，$\odot O$和$\odot O'$相交于A和B，且$\odot O'$过$\odot O$的圆心，C是$\odot O'$上的一点，直线CA、CB交

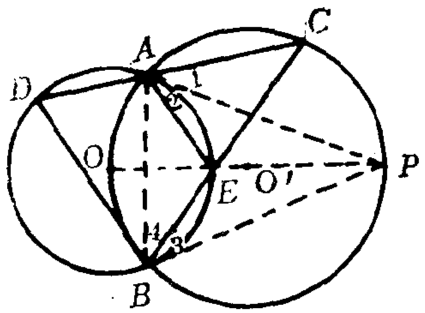


图 1.1.14

$\odot O$于D和E。

求证：$AE \parallel DB$。

分析：要证 $AE \parallel DB$。只要求得 $\angle CAE = \angle D$ 就可以了。但只靠原图难以求得，应设法添置辅助线。为此必须认真分析题目中给出的条件：$\odot O'$过$\odot O$的圆心是本题的特殊条件，也是重要条件，仔细联想，就会发现$\odot O'$实际上就是"从圆外一点作已知圆的切线"时所用的辅助圆，连结OO'并延长交$\odot O'$于P。则P就是$\odot O$外的一点。PA、PB是$\odot O$的两条切线，发掘出这些隐含的条件后，要证明$\angle CAE = \angle D$，就可转证$\angle 1 + \angle 2 = \angle D$，为此，再连公共弦 AB，可知$\angle 1 = \angle 3$，$\angle 2 = \angle 4$，得

$\angle 3 + \angle 4 = \angle 1 + \angle 2$，　　又因为$\angle 3 + \angle 4 = \angle D$，

所以$\angle CAE = \angle D$。　即　$AE \parallel DB$。

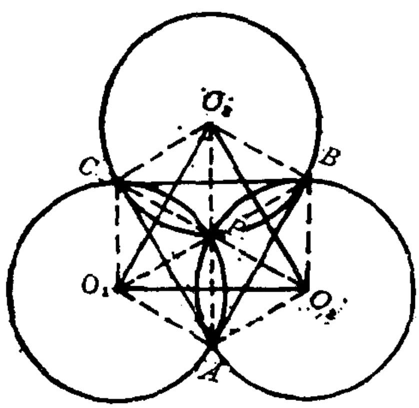


图　1.1.15

【例11】　三个等圆O_1、O_2、O_3，有一个公共点P、且两两相交的另一交点是A、B、C，如图1.1.15所示。求证：$\triangle ABC \cong \triangle O_1O_2O_3$

分析：猛然一看，线条错综复杂，使人眼花缭乱，觉得如同狗咬刺猬、难以下口。仔细琢磨，三个等圆两两相交，根据连心线和公共弦的关系，就会知道，条件中还