大学数学学习方法指导丛书（II 辑）

空间解析几何与微分几何

黄宣国 编著

复旦大学数学系主编

复旦大學 出版社

www.fudanpress.com.cn

大学数学学习方法指导丛书（Ⅱ辑）

空间解析几何与微分几何

复旦大学数学系 主编

黄宣国 编著

復旦大學出版社

图书在版编目(CIP)数据

空间解析几何与微分几何/黄宣国编著.—上海:复旦大学出版社,2003.9
(大学数学学习方法指导丛书(第Ⅱ辑))
ISBN 7-309-03628-X

Ⅰ.空… Ⅱ.黄… Ⅲ.几何:空间解析几何-高等学校-自学参考资料②微分几何-高等学校-自学参考资料
Ⅳ.①O182.2②O186.1

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 034887 号

空间解析几何与微分几何

黄宣国 编著

出版发行 复旦大学出版社
上海市国权路 579 号 邮编 200433
86-21-65118853(发行部) 86-21-65109143(邮购)
fupnet@fudanpress.com http://www.fudanpress.com

责任编辑 范仁梅
装帧设计 周 进
总 编 辑 高若海
出 品 人 贺圣遂

印 刷	复旦大学印刷厂
开 本	787×960 1/16
印 张	27
字 数	514 千
版 次	2003 年 9 月第一版 2003 年 9 月第一次印刷
印 数	1—5 100
书 号	ISBN 7-309-03628-X/O·308
定 价	39.00 元

内 容 提 要

在大学数学、物理类本科生阶段，空间解析几何与微分几何是两门重要的几何类课程.

本书空间解析几何部分包含向量，平面与直线，二次曲面，等距变换、正交变换与仿射变换，射影平面等内容；微分几何部分包含局部曲线论，整体曲线论，局部曲面论等内容. 全书分为两部分，共 10 章，每章内容为：基本要求与主要内容；基本题型；深入思考. 全书由浅入深地介绍了空间解析几何与微分几何的主要内容，对于现今流行的国内相关教材中的难题大都作了解答，另外对一些较深入的内容也有涉及. 每部分后面有相当数量的模拟考题，供读者练习. 此书不但对初进大学校门的学生学习空间解析几何有用，对大学高年级学生学习微分几何有益，而且对有志于报考数学、物理类研究生的大学生也有帮助.

序　　言

10 多年前，我系几位教师编写了一套《大学数学学习指导》丛书．丛书出版后颇受欢迎，不久书市即告售罄．其后，兄弟院校的同行和不少青年学子纷纷来函求购，出版社也多次与我们联系再版事宜，只是作者们长期承担着繁重的教学和科研任务，无暇顾及修订工作．近年来，随着学科的发展，课程建设又提上了议事日程．我系一些重要基础课的新教材陆续问世，与此同时，不少教师再次萌发了重新整理、总结在教学工作中积累起来的心得的意愿．在复旦大学出版社的促进下，推出这套全新的丛书也时机成熟、水到渠成了．

数学科学的发展正处于一个不平凡的时期．科学技术的进步、实践应用的增多、计算机的影响以及数学科学自身的进展，大大拓广了数学科学的范围和领域．在不少场合，数学已经从科学研究的幕后，大步跨上了技术应用的前台，成为打开众多机会大门的钥匙．这就导致社会对其成员数学能力要求的指标不断提高，期望涌现出更多的数学基础扎实、创新能力较强、知识面宽广、综合素质上佳的数学人才．相应地，数学教育的目标，也就不仅在于为学生提供一种专业知识的传授，更重要的在于引导学生掌握一种科学的语言，学到一种理性思维的模式，接受包括演绎、归纳、分析和类比等各项数学素质的训练．卓有成效的数学训练将为学生充分参与未来世界的竞争作好准备．

数学的理论是美妙的，引人入胜；数学的方法是精巧的，丰富多彩；但学好数学却必须付出艰辛的劳动．在教学过程中，我们经常遇到这样的学生：他们能背出一些基本的公式，却做不了略有变化的演算，他们能记得住一些基本的定理，却给不出稍分层次的推理．有些学生依然留恋早年接受的、为应试而被不恰当地夸大了的"题型教学"，不理解这种训练手段怎么在大学课堂里销声匿迹了．这些学生学习数学的方法大多较为稚嫩，他们对数学知识只停留于形式的理解，并未达到实质的掌握．其实，与大多数其他学科相比，数学能为学生提供更多的学习独立思考的机会．在任何一门数学课程的学习过程中，起主导作用的并非教师，而是学生．学生学习数学的过程应当是一个再创造的过程．学生应当按自己的认识去解释、分析所学的内容，用新的观点去改造原有的理解，从而在个人数学知识的库藏中打上自己特有的烙印．只有通过深入的思考，将吸收的新知识有机地融入原有知识结

构中，用心灵的创造来体验数学，对抽象的对象建立起直观的理解，才能真正地学好数学. 我们希望这套丛书能在方法上为学生学习数学提供有益的借鉴与启迪.

虽然，学习数学的方法因人而异，但是，数学课程的一些基本环节却是值得共同注意的. 首先，要学好一门数学课程，毋庸置疑应掌握它所包含的最基本的数学思想. 这就是说，既要深入理解有关主要对象的概念和性质，又必须把一系列的定义和定理科学地融合在一起，从整体上把握这个知识体系的发端、推进和提升，融会贯通地领悟贯穿于课程中的数学思想与精神. 其次，数学思想是通过特定的数学方法来实现的，每门课程所蕴含的数学方法提供了构筑相应理论框架的主要工具，也提供了作出分析、判断、转化、求解等具体策略的依据. 从猜想的形成、分析的展开，到计算、推理的实施、提炼、拓广的升华，数学方法在解决问题的过程中处处体现着自身的价值. 再次，每门数学课程都有不少特殊的数学技巧. 它们不仅显示了运算与论证的灵活性，而且是各种成功的数学方法所不可缺少的重要因素. 一个有相当深度的技巧往往来自丰富的想像和敏锐的观察. 数学技巧的介绍与训练，对学生思维的引发、开拓和深化有十分重要的意义. 总之，数学思想、数学方法和数学技巧三位一体，共同构成了有血有肉的一门门数学课程. 因此，要学好数学，也就必须在领会思想、掌握方法、熟练技巧上多下功夫.

正是基于上述认识，在这套丛书中，每一册大体包括概念和性质的简介与提要、主要方法与典型例题的分析与讨论，同时，还配置了一定数量的习题. 希望读者可参照这个内容的三部曲，通过对数学思想、方法和技巧的思考与消化，把解决数学问题的能力提高到一个新的台阶.

编写这套丛书的作者们都具有丰富的教学经验，他们在编写时还注意到兼顾读者的多种需要：无论是学生在学习相应课程时同步使用，还是在学完一门课程后作总复习的参考，抑或为报考研究生而作考前准备，都将从中获得较大的收获. 我们也愿意借助这套丛书与兄弟院校的同行们作广泛的教学交流.

复旦大学数学系将这套丛书的编写列入加强本科教学工作的计划之中. 数学系、所的许多教授对如何编好这套丛书提出一系列中肯的建议，为提高丛书质量创造了有利条件. 复旦大学出版社的范仁梅女士对这套丛书的策划和编辑倾注了大量的心血. 我们对以上诸位在此一并致以诚挚的谢意.

限于水平，这套丛书的错误与缺陷在所难免，殷切地期望广大读者不吝指正. 希望通过作者与读者的共同努力，经日后修订，使这套丛书日趋成熟.

复旦大学数学系
教学指导委员会
2002 年 4 月

前　　言

在大学数学、物理类本科生阶段，空间解析几何与微分几何是两门重要的几何类课程.

空间解析几何部分包含向量，平面与直线，二次曲面，等距变换、正交变换与仿射变换，射影平面等内容. 作者集 10 多年来执教空间解析几何的教学经验，深知向量的外积、二次曲面、射影平面是初学空间解析几何者的三大难点. 本书第一部分空间解析几何紧紧围绕这 3 个难点，参考了大量的国内外空间解析几何教材，将有关学习上的难题，由浅入深地作了叙述与解答，在这部分内容的后面将近 7 年来复旦大学数学系的空间解析几何考题汇集作为模拟考题，供读者练习.

微分几何是基础数学的核心内容之一，自创立至今 200 年来蓬勃发展. 大学本科生阶段学习的曲线论与曲面论是学习现代微分几何的一个基础. 作者的专业方向是微分几何，曾执教过本科生《微分几何》课程. 作者集微分几何课程教学和微分几何研究的一些想法，选择局部曲线论、整体曲线论和局部曲面论作为本书微分几何部分的内容. 初学微分几何的人往往有一个困惑，教材中所述内容不难理解，但许多习题不易解答. 实际上，教材中许多习题是前人论文的结果，当然不易解答. 作者查阅了大量国内外有关微分几何的教材，对许多教材中共有的典型(较难)习题作了详细的解答. 另外，对与现代微分几何有关联的一些内容也通过习题、内容叙述等形式向读者作了部分介绍.

本书微分几何这部分内容不但对初学微分几何的读者有益，对有志于进一步学习微分几何的读者更是很有帮助的.

最后，值得一提的是全书基本上覆盖了大学空间解析几何和微分几何教材中重要的内容，另外，在本书中，作者也自编了部分习题. 对于一些难度较高的著名的空间解析几何和微分几何的定理，本书也有涉及.

由于编者水平，书中恐有不妥之处，敬请同行指正.

编者

2003 年 4 月

目　　录

第一部分　空间解析几何

第 1 章

向　　量

§1.1　基本要求与主要内容

1. 基本要求

掌握向量的加法、减法、实数乘向量、向量的内积(又称数量积)、向量的外积(又称向量积)和混合积的定义,运算规则等. 特别是向量的外积,要仔细阅读教材,才能牢牢掌握.

2. 主要内容

向量加法、减法的性质

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$;

(2) $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$;

(3) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$;

(4) $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$;

(5) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$;

(6) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$,这里 $|\boldsymbol{a}|,|\boldsymbol{b}|,|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|$ 分别表示向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的长度.

实数乘向量的性质

(1) $\lambda(\mu\,\boldsymbol{a})=\lambda\mu\,\boldsymbol{a}$;

(2) $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$;

(3) $\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$,这里 λ,μ 是任意实数,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 是任意向量.

A,B,C 是一条直线上的3个不同点,如果$\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BC}$;则对于空间任意一点$O$,有

$$\overrightarrow{OB}=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{OA}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{OC}.$$

这一公式非常有用,读者要牢记.

向量内积的定义和性质　定义两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的内积

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}),$$

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是一个实数. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时,内积 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}$ 是零.

(1) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a}$;

(2) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 有 3 种可能:或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$,或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量,但 $\boldsymbol{a}$ 垂直于 $\boldsymbol{b}$;

(3) $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|^2$;

(4) $\pi_c(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\pi_c\boldsymbol{a}+\pi_c\boldsymbol{b}$,这里 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 都是非零向量,$\pi_c\boldsymbol{a}$ 表示非零向量 $\boldsymbol{a}$ 在非零向量 $\boldsymbol{c}$ 上的有向投影等,即 $\pi_c\boldsymbol{a}=|\boldsymbol{a}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{c})$;

(5) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\lambda\,\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}$,这里 λ,μ 是任意实数;

(6) $|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$,等号当且仅当 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$ 时成立,这里约定零向量与任一向量平行.

向量外积的定义和性质　定义两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 的外积 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是一个向量,$\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 构成右手系.

$|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\sin\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})$. 当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中有一个是零向量时,规定 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ 是零向量.

(1) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=-\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{a}$ (反称性,这一性质一定要牢记);

(2) $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ 有 3 种可能:或 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ 或 $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$,或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量,但 $\boldsymbol{a}$ 平行于 $\boldsymbol{b}$,特别有 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$;

(3) $|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2+|\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2|\boldsymbol{b}|^2$;

(4) $(\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=\lambda\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{c}+\mu\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}$,这里 λ,μ 是实数;

(5) $\triangle ABC$ 的面积 $S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|$.

向量的坐标表示　取一定点 O 作为原点,以点 O 为起点,作 3 个互相垂直的单位向量 $\boldsymbol{e}_1,\boldsymbol{e}_2,\boldsymbol{e}_3$,满足 $\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2$,以 $\boldsymbol{e}_1$ 方向为 x 轴的正方向,$\boldsymbol{e}_2$ 方向为 y 轴的正方向,$\boldsymbol{e}_3$ 方向为 z 轴的正方向,建立空间直角坐标系,对于空间任一点 P,有惟一的分解式:

$$\overrightarrow{OP}=x_1\boldsymbol{e}_1+x_2\boldsymbol{e}_3+x_3\boldsymbol{e}_3=(x_1,x_2,x_3).$$

当 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3)$,$\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3)$ 时,有

$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1,a_2+b_2,a_3+b_3)$;

$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1,a_2-b_2,a_3-b_3)$;

$\lambda\boldsymbol{a}=(\lambda a_1,\lambda a_2,\lambda a_3)$;

$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\cdot(b_1,b_2,b_3)=a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3$;

$|\boldsymbol{a}|=\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}$;

$$\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=\frac{a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}};$$

$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}=(a_1,a_2,a_3)\times(b_1,b_2,b_3)=(a_2b_3-a_3b_2,a_3b_1-a_1b_3,a_1b_2-a_2b_1)$.

当 $\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$ 时，有

$$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\text{（向量 }\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}\text{ 的混合积）}.$$

双重外积公式　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{a}$.

Jacobi 恒等式　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times\boldsymbol{c}+(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$.

Lagrange 恒等式　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})(\boldsymbol{b}\cdot\mathbf{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\mathbf{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.

§1.2　基 本 题 型

例 1.1　已知 3 点 $A(1,2,3)$，$B(2,3,4)$，$C(3,4,6)$，求 $\triangle ABC$ 的面积.

解　$\overrightarrow{AB}=(1,1,1)$，$\overrightarrow{AC}=(2,2,3)$，$\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(1,-1,0)$，

$$S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}|=\frac{1}{2}\sqrt{2}.$$

例 1.2　已给两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)$，$\boldsymbol{\beta}=(3,5,\lambda)$，求实数 λ 的值，使得

(1) $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 间的夹角是锐角；　(2) $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 间的夹角是钝角；　(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直.

解

$$\cos\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}}{|\boldsymbol{\alpha}||\boldsymbol{\beta}|}=\frac{3+10+3\lambda}{\sqrt{14}\sqrt{34+\lambda^2}}=\frac{13+3\lambda}{\sqrt{14(34+\lambda^2)}}.$$

(1) $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角是锐角，当且仅当 $13+3\lambda>0$，即 $\lambda>-\dfrac{13}{3}$；

(2) 当 $\boldsymbol{\alpha}$，$\boldsymbol{\beta}$ 的夹角是钝角，当且仅当 $13+3\lambda<0$，即 $\lambda<-\dfrac{13}{3}$；

(3) $\boldsymbol{\alpha}$ 与 $\boldsymbol{\beta}$ 垂直，当且仅当 $13+3\lambda=0$，即 $\lambda=-\dfrac{13}{3}$.

例 1.3　求与两个向量 $\boldsymbol{\alpha}=(3,2,1)$ 与 $\boldsymbol{\beta}=(4,5,3)$ 同时垂直的单位向量.

解　设所求的单位向量是 $\boldsymbol{\gamma}=(a_1,a_2,a_3)$，这里 a_1,a_2,a_3 是实数，且 $a_1^2+a_2^2+a_3^2=1$，则 $\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\alpha}=0$，$\boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\beta}=0$，从而有下述方程组：

$$\begin{cases}3a_1+2a_2+a_3=0,\\ 4a_1+5a_2+3a_3=0,\\ a_1^2+a_2^2+a_3^2=1.\end{cases}\tag{①}$$

由上述方程组的前两个方程，得

$$a_1=\frac{1}{7}a_3,a_2=-\frac{5}{7}a_3, \qquad ②$$

代入方程组的第三个方程，有

$$\frac{75}{49}a_3^2=1,a_3=\pm\frac{7\sqrt{3}}{15}. \qquad ③$$

从而 $\gamma=\left(\frac{\sqrt{3}}{15},-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{7\sqrt{3}}{15}\right)$，或 $\gamma=\left(-\frac{\sqrt{3}}{15},\frac{\sqrt{3}}{3},-\frac{7\sqrt{3}}{15}\right)$. ①

例 1.4 设 α,β 为两个不共线的向量，已知 $\overrightarrow{AB}=\alpha+2\beta$, $\overrightarrow{BC}=-4\alpha-\beta$, $\overrightarrow{CD}=-5\alpha-\lambda\beta$，问：当且仅当实数 λ 是何值时，四边形 $ABCD$ 是梯形？

解 当 $\overrightarrow{AB}$ 平行于 $\overrightarrow{CD}$ 时，应当有

$$\frac{1}{-5}=\frac{2}{-\lambda},\quad 即\ \lambda=10,$$

这时四边形 $ABCD$ 是梯形.

向量 $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=(\alpha+2\beta)+(-4\alpha-\beta)+(-5\alpha-\lambda\beta)$
$=-8\alpha+(1-\lambda)\beta.$

当向量 $\overrightarrow{BC}$ 与 $\overrightarrow{AD}$ 平行时，应当有

$$\frac{-4}{-8}=\frac{-1}{1-\lambda},\quad -4(1-\lambda)=8,\lambda=3,$$

这时，四边形 $ABCD$ 也是梯形.

例 1.5 已知在三角形 ABC 中，点 D,E,F 依次是边 BC,CA,AB 的内点，求 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$ 的充分必要条件是什么(用点 D,E,F 的位置关系式来表示)？

解 设 $\frac{BD}{DC}=\lambda,\frac{CE}{EA}=\mu,\frac{AF}{FB}=\upsilon$，则

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB})$$
$$=\frac{1}{1+\lambda}\overrightarrow{AB}+\frac{\lambda}{1+\lambda}\overrightarrow{AC},$$
$$\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AE}=-\overrightarrow{AB}+\frac{1}{1+\mu}\overrightarrow{AC}, \qquad ①$$
$$\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AF}=-\overrightarrow{AC}+\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\overrightarrow{AB}.$$

因而 $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$ 当且仅当

$$\left(\frac{1}{1+\lambda}-1+\frac{\upsilon}{1+\upsilon}\right)\overrightarrow{AB}+\left(\frac{\lambda}{1+\lambda}+\frac{1}{1+\mu}-1\right)\overrightarrow{AC}=\mathbf{0}.$$

由于$\overrightarrow{AB}$,$\overrightarrow{AC}$ 是两个不平行的向量,因此有

$$\begin{cases}\dfrac{1}{1+\lambda}-1+\dfrac{\nu}{1+\nu}=0,\\[2mm] \dfrac{\lambda}{1+\lambda}+\dfrac{1}{1+\mu}-1=0.\end{cases}$$

从而
$$\frac{\nu}{1+\nu}=\frac{\lambda}{1+\lambda}=\frac{\mu}{1+\mu}. \qquad ②$$

这导出
$$\lambda=\mu=\nu. \qquad ③$$

这是必要条件. 当上述等式成立时,从 ① 式有$\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BE}+\overrightarrow{CF}=\mathbf{0}$,因而 ③ 式是充要条件,即当$\dfrac{BD}{DC}=\dfrac{CE}{EA}=\dfrac{AF}{FB}$时,题目中结论成立.

例 1.6 设$\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta}$与$7\boldsymbol{\alpha}-5\boldsymbol{\beta}$垂直,$\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta}$与$7\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta}$也垂直,求两个单位向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$间的夹角以及实数$\lambda$的值.

解 从题意有
$$\begin{cases}(\boldsymbol{\alpha}+3\boldsymbol{\beta})\cdot(7\boldsymbol{\alpha}-5\boldsymbol{\beta})=0,\\(\boldsymbol{\alpha}-3\boldsymbol{\beta})\cdot(7\boldsymbol{\alpha}+\lambda\boldsymbol{\beta})=0.\end{cases}$$

很容易得到
$$\begin{cases}7|\boldsymbol{\alpha}|^2+16\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}-15|\boldsymbol{\beta}|^2=0,\\7|\boldsymbol{\alpha}|^2+(\lambda-21)\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}-3\lambda|\boldsymbol{\beta}|^2=0.\end{cases}$$

由于 $|\boldsymbol{\alpha}|=1$,$|\boldsymbol{\beta}|=1$,从前一式,有 $16\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}-8=0$,

$$\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta}=\frac{1}{2},\quad \cos\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{1}{2},$$

$$\angle(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta})=\frac{\pi}{3}.$$

代入方程组的第二式,有
$$\lambda=-\frac{7}{5}.$$

例 1.7 写出向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$的关系式,已知:

(1) $\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$共线;

(2) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$共面.

解 (1) $\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$共线当且仅当
$$(\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})\times\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0}.$$

利用双重外积公式,有
$$(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}-(\boldsymbol{\alpha}\cdot\boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\alpha}=\mathbf{0},$$
即向量$\boldsymbol{\alpha}$与$\boldsymbol{\beta}$平行.

(2) $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta}$ 3 个向量共面,当且仅当其混合积为零,即
$$(\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\boldsymbol{\alpha}\times\boldsymbol{\beta})=0.$$

上式等价于 $$(\alpha\times\beta)\cdot(\alpha\times\beta)=0,$$
即 $$\alpha\times\beta=\mathbf{0}.$$
向量 α 平行于向量 β.

例 1.8 问关系式：(1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(2) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(3) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(4) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$；(5) $|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|$ 分别在什么条件下成立？

解 (1) $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，当且仅当 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})>(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})$，
即 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}+2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}>\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a}-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b}.$$
上式等价于 $$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}>0.$$
换言之，在 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，且 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角是锐角时，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|>|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(2) 完全类似于(1)，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 等价于 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}<0$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都不是零向量，但 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 间的夹角是钝角时，有 $|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|<|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$.

(3) 完全类似于(1)，$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 当且仅当 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0$，即或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量，或者非零向量 $\boldsymbol{a}$ 垂直于非零向量 $\boldsymbol{b}$.

(4) $|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$ 当且仅当
$$(|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|)^2=(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$
展开上式，有 $$|\boldsymbol{a}|^2+2|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|+|\boldsymbol{b}|^2=|\boldsymbol{a}|^2-2\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}+|\boldsymbol{b}|^2,$$
$$-\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,\ -|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|,$$
或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量，当 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 都是非零向量时，从上式，向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 共线且 $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=-1$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 恰好反方向.

(5) $|\boldsymbol{a}|-|\boldsymbol{b}|=|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|$，类似(4)，有 $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|$，或 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 中至少有一个是零向量，或者两个非零向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}$ 满足 $\cos\angle(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b})=1$，即两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 及 $\boldsymbol{b}$ 共线且恰好同方向.

例 1.9 (1) 设 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r},\boldsymbol{s}$ 为任意向量，求证：$\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s}$ 共面；

(2) 求证：3 个向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 共面的充要条件是 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 共线.

证明： (1)
$$\begin{aligned}(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})&=((\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{s})\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s}))\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\\&=[(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s}))\boldsymbol{s}-(\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s}))\cdot\boldsymbol{p}]\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})\\&=(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{s}))[\boldsymbol{s}\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{s})]=0,\end{aligned}$$
于是结论成立.

(2) 如果 3 个向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 共面，不妨设存在实数 a,b，使得
$$\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{p}+b\boldsymbol{q},$$
则 $$\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}=-a\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},\quad \boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}=-b\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},$$
则 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}$ 共线.

反之，如果 $\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q},\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}$ 共线，有

$$(\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q})\times(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r})=\mathbf{0},$$

有
$$(\boldsymbol{p}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}))\boldsymbol{q}-(\boldsymbol{q}\cdot(\boldsymbol{q}\times\boldsymbol{r}))\boldsymbol{p}=\mathbf{0},$$

有
$$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})\boldsymbol{q}=\mathbf{0}.$$

当 $\boldsymbol{q}$ 是零向量时，$\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 当然共面；当 $\boldsymbol{q}$ 不是零向量时，$(\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r})=0$，3 个向量 $\boldsymbol{p},\boldsymbol{q},\boldsymbol{r}$ 共面.

例 1.10 求证：3 个向量 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}=0.$$

证明 记 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2,a_3),\boldsymbol{b}=(b_1,b_2,b_3),\boldsymbol{c}=(c_1,c_2,c_3)$，从内积的定义可以得到

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c}\\ \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{a} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{b} & \boldsymbol{c}\cdot\boldsymbol{c}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\begin{vmatrix}a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}=((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}))^2.$$

因而，题目中行列式等于零的充要条件是$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0$，即 $\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}$ 共面.

例 1.11 求证：$((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),$
$(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))=((\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c}))^4.$

证明 利用双重外积公式，有

$$\begin{aligned}&((\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a})\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\\ &=((\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{b}-(\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{a},(\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c}-(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{b},\\ &\quad(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{a}-(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{c})\\ &=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^3(\boldsymbol{b},\boldsymbol{c},\boldsymbol{a})=(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})^4.\end{aligned}$$

例 1.12 已知$(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\boldsymbol{c})=0,(\boldsymbol{a}_1,\boldsymbol{b}_1,\boldsymbol{c}_1)=0$，求证：

$$((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}_1)\times(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_1)\times(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)\times(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))=0.$$

证明 利用双重外积公式，有

$$\begin{aligned}&((\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}_1)\times(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}),(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{a}_1)\times(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}),(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}_1)\times(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\\ &=((\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{c}_1-(\boldsymbol{c}_1\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{b},(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c},\\ &\quad(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{b}_1-(\boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{a})\\ &=((\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{c}_1,(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c},\\ &\quad(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{b}_1-(\boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{a})-((\boldsymbol{c}_1\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}))\boldsymbol{b},\\ &\quad(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c},(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{b}_1-(\boldsymbol{b}_1\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{a})\\ &=(\boldsymbol{b}\cdot(\boldsymbol{b}_1\times\boldsymbol{c}))[(\boldsymbol{c}_1,(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c},\\ &\quad(\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{a}_1\times\boldsymbol{b}))\boldsymbol{b}_1)-(\boldsymbol{c}_1,(\boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{a}_1-(\boldsymbol{a}_1\cdot(\boldsymbol{c}_1\times\boldsymbol{a}))\boldsymbol{c},\end{aligned}$$