

研究生规划教材

数学计算方法与 软件的工程应用

● 马正飞 殷翔 编著



化学工业出版社
教材出版中心

研究生规划教材

数学计算方法与软件的工程应用

马正飞 殷翔 编著

化学工业出版社
教材出版中心
·北京·

(京)新登字 039 号

图书在版编目 (CIP) 数据

数学计算方法与软件的工程应用/马正飞, 殷翔编著.
北京: 化学工业出版社, 2002.12
研究生规划教材
ISBN 7-5025-4208-6

I. 数… II. ①马…②殷… III. ①数值计算-计算方法-高等学校-教材②应用软件工程-高等学校-教材 IV. ①0241②TP311.5

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2002) 第 086380 号

研究生规划教材
数学计算方法与软件的工程应用

马正飞 殷翔 编著

责任编辑: 唐旭华

责任校对: 蒋宇

封面设计: 于兵

*

化学工业出版社 出版发行
教材出版中心

(北京市朝阳区惠新里 3 号 邮政编码 100029)

发行电话: (010)64982530

<http://www.cip.com.cn>

*

新华书店北京发行所经销

北京市彩桥印刷厂印刷

北京市彩桥印刷厂装订

开本 787 毫米×1092 毫米 1/16 印张 21 $\frac{3}{4}$ 字数 542 千字

2002 年 12 月第 1 版 2002 年 12 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-5025-4208-6/G·1098

定 价: 36.00 元

版权所有 违者必究

该书如有缺页、倒页、脱页者, 本社发行部负责退换

序

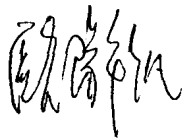
21 世纪, 人类进入信息新时代。科学技术出现了前所未有的发展, 其中数学应用的广泛性和深入性已成为现代科技发展的重要特征, 数学与科学计算已和理论研究、科学实验并列为科学研究的三大支柱。另一方面, 计算机已成为科学与工程技术等各学科领域不可缺少的工具。因此, 注重数学教育, 特别是学习应用数学方法、用计算机作为工具, 提高解决各种实际问题的能力是适应新世纪现代化建设的需要, 也是知识更新的必要环节。为适应这样的形势, 本书作者在几年教改经验的基础上, 编写出了《数学计算方法与软件的工程应用》一书。

本书的作者分别从事工程技术与科学研究和应用数学专业工作, 在应用计算机解决各种实际问题有多年的经验。因此作者的经历形成了本书下面几方面的特色。

以目前流行的数学工具软件 MAPLE, MATLAB, VISUAL FORTRAN, STATISTICA 的介绍为基础, 采用非数学专业人员易接受的方式, 对线性代数、数理统计、最优化方法、数值计算、数理方程等课程的内容进行有机的结合, 阐述原理、概念和算法, 突出方法的特点和适用范围; 在篇幅不大的范围内, 对解决实际问题行之有效的方法都有所涉及, 有的还具有一定的深度, 为需要做进一步深入应用的人员提供了必要的条件; 针对实际问题常常只有数值解的情况, 重点放在数值计算及其计算结果的分析上, 以提高应用数学方法与科学计算处理工程和科学研究中实际问题的能力; 将常用的多种数学软件工具与数学方法和问题的处理相结合, 既体现软件的功能, 又学习应用的方法; 针对复杂程度不同的问题, 强调用不同的软件工具和算法来实现; 将工程技术与科学研究工作中所遇到的一些典型问题(特别是与化学和化工相关的问题)提炼出来, 作为实例, 充分体现了实用性。

本书是在南京工业大学化学工程与工艺、生物工程、应用化学、材料、机械等专业的研究生授课讲义的基础上, 吸收众多有益建议而形成的。相信本书对希望应用数学方法与科学计算来处理工程和科学研究中实际问题的广大科技工作者会很有帮助。

中国工程院院士
欧阳平凯



前 言

编写本书的目的是根据应用数学的内容,介绍矩阵理论、数值计算方法、最优化方法、应用数理统计和数理方程等方面的基本数学理论和方法,以数学软件 MAPLE, MATLAB, STATISTICA 和 FORTRAN 编写、调用专用程序作为典型工具,来理解数学方法的特点,掌握分析与解决各种实际问题的能力。

随着科学技术,尤其是计算机技术的飞速发展,数学在科学研究与工程技术中的作用不断增强,应用范围已覆盖了目前几乎所有的学科分支。其中科学计算,已经与理论研究和科学实验并列,成为科学研究的三大方法。这就要求大学生、研究生、工程技术人员、科研人员不仅要了解应用数学的基本方法和特点,还要能够熟练地掌握现有的重要数学软件(如 MAPLE, MATLAB, STATISTICA)和运用 FORTRAN 语言编写、调用专用程序进行计算和分析,从而解决工程实际问题。

数学软件 MATLAB 具有强大的数值计算功能,但符号计算能力较弱。MAPLE 具有强大的符号计算功能,而数值计算能力较弱。本书以 MATLAB、MAPLE 为主要处理问题的工具,使学习者能运用这两软件的交互平台,解决一般的工程数学计算问题。本书强调熟悉与掌握运用 FORTRAN 语言编写和调用 IMSL 数学程序库和其他专用程序包的重要性。这样在解决较复杂的问题时,就可尽可能地运用已有的软件工具,将精力主要放在计算方法的构造上,而不是放在计算方法的实现上,从而提高了运用数学方法的能力。由于实验设计和数据处理与分析在各个领域中得到越来越广泛的应用,本书介绍应用 STATISTICA 统计软件来建立实验设计和数据处理与分析的基本方法和过程。

本书正文为十章。基本数学理论其内容基本涵盖了矩阵理论、数值计算方法、最优化方法、应用数理统计、数理方程等方面,强调概念、数学思想与方法的特点,包括线性代数与矩阵论基础,介绍了线性空间与线性映射、特征值理论和范数理论、矩阵分解等内容;线性方程组的数值方法,其中有线性方程组的矩阵分解方法和迭代方法等内容;非线性方程组的数值方法,讲述了不动点迭代法、牛顿型迭代法和拟牛顿迭代法等内容;数值逼近方法,介绍了多项式插值和三次样条插值、离散数据的曲线拟合、数值微分和数值积分等内容;最优化方法,有线性规划、无约束最优化和约束最优化方法等内容;应用统计方法,有参数估计与假设检验、方差分析与正交试验设计、回归分析、多元判别分析等内容;微分方程的数值方法,有常微分方程初值问题和边值问题求解、刚性方程的数值方法、偏微分方程数值解法等内容。综合应用部分,内容是选择具有代表性的问题来进行,并结合问题的解决与分析,介绍数学理论方法及其计算机实现。具体包括多元数据模型回归与分析,介绍实验设计与数据的处理方法与分析以及智能化数据计算处理方法(如人工神经网络的 BP 算法、模拟退火算法和遗传算法);方程组数值解问题,介绍了求解非线性方程组的微分同伦算法;微分方程(组)的一些实用算法,有半隐式 R-K 方法、微分代数方程的解法和偏微分方程组的配置解法等内容。在这部分,课程教学内容重点放在如何运用数学方法解决问题和结合专业知识

分析问题结果上,以期达到学以致用效果。为方便读者学习与掌握本书内容,另准备光盘一张,其内容包括正文中所有例题和相关的 MAPLE, MATLAB 和 FORTRAN 程序,供读者参考。需要此光盘的读者请与南京工业大学化工学院计算机模拟中心作者联系。(E-mail: mazf@njuct.edu.cn)

本书的特点是:①适应不同专业的需要,内容选取起点低、范围大。说起点低是本书读者只需具备基本的大学数学知识,就可以进行学习。范围大是指涉及的内容广泛,基本涵盖了应用数学方法解决问题所面临的数学知识;既有经典的数学理论与方法,又有现代的新理论与高效算法。②突出思想性和应用性。本书突出朴素的数学思想与数学方法的阐述,根据非数学类专业的要求,不片面强调数学的严谨性,略去定理的证明、公式的推导以及算法的具体描述;在综合应用部分中,通过对众多来自工程实际问题的分析与处理,介绍应用数学手段解决实际问题的方法,使研究生在学习数学知识的同时,逐步掌握应用数学方法的能力。③强化计算机应用。为适应科学研究和工程实践的需要,将数学工具软件的应用贯穿到每一部分中,读者经本书内容的学习和练习,具有熟练掌握 MAPLE, MATLAB, STATISTICA 这三个数学工具软件和 FORTRAN 语言编程、调用的应用能力。

国内外虽有一些介绍应用数学方法和数学软件应用的教材,但这些书均侧重某个工具软件的简单应用,不涉及软件工具的综合应用,对实际问题的解决缺乏分析处理。本书的对象是工科各专业学习应用数学方法的高年级学生、一年级研究生以及社会上各领域中需要应用数学方法分析处理问题的科研和工程技术人员。本书适用讲课学时为 120 学时,上机时间为 120 小时的教学情况。书中有些内容可供任课教师酌情选用。

欧阳平凯院士热情为本书作序,南京工业大学研究生部和信息中心的有关专家和领导对本书的编写,自始至终给予了大力的支持和鼓励,在此表示衷心的感谢。本书的出版得到了“南京工业大学研究生重点课程建设基金”的资助,在此特表谢意。

编者
2002 年 9 月

内 容 提 要

本书以数学工具软件 MAPLE, MATLAB, VISUAL FORTRAN, STATISTICA 的使用为基础, 介绍科学和工程中应用数学方法的内容, 包括线性代数与矩阵论基础、线性方程组和非线性方程组的数值方法、数值逼近方法(插值和拟合、数值积分和数值微分)、线性规划以及无约束和有约束的最优化方法等内容、应用统计方法和实验设计以及数据的处理与分析、智能化数据计算处理方法(人工神经网络的 BP 算法、模拟退火算法和遗传算法)、微分方程组的一些实用算法及程序(微分代数方程的解法和偏微分方程组的配置解法等)。各章都有应用数学工具软件, 解决工程技术与科学研究工作中所遇到的一些典型问题(特别是与化学和化工相关的问题)作为实例。

本书采用非数学专业人员易接受的方式, 对线性代数、数理统计、最优化方法、数值计算、数理方程等课程的内容进行有机地结合, 阐述原理、概念和算法, 突出方法的特点和适用范围; 针对实际问题常常只有数值解的情况, 重点放在数值计算及其计算结果的分析上, 以提高应用数学方法与科学计算处理工程和科学研究中实际问题的能力。

本书可作为理工科各专业学习应用数学方法的高年级学生、研究生作为教材, 也可供各领域需要应用数学方法分析处理问题的科研和工程技术人员参考。

目 录

第一章 应用数学工具软件	1	二、矩阵的范数	61
第一节 概述	1	第四节 矩阵分解	63
第二节 MAPLE 软件介绍	2	一、矩阵的三角分解 (或 LU 分解)	63
一、工作表界面	2	二、矩阵的满秩分解	65
二、基本数学运算	2	三、矩阵的 QR 分解	66
三、作图	7	四、矩阵的奇异值分解	66
四、微分方程	10	评注与进一步阅读	69
第三节 MATLAB 软件基础	13	参考文献	69
一、MATLAB 的命令窗口和编程窗口	14	习题	70
二、MATLAB 的数据结构与基本运算	17	第三章 线性方程组的数值方法	72
三、MATLAB 的矩阵表示与运算	20	第一节 线性方程组的基本概念	72
四、MATLAB 的绘图	24	第二节 Gauss 消去法与三角分解法	73
五、MATLAB 的程序设计	27	一、Gauss 顺序消去法	73
第四节 FORTRAN 及 IMSL 数学库的		二、Gauss 选主元消去法	76
使用	30	三、矩阵的直接三角分解法	79
一、IMSL 数学库	31	第三节 矩阵的条件数与病态方程组	82
二、IMSL 数学库的调用	33	一、右端项扰动对解的影响和矩阵的条件	
三、Visual Fortran 中使用 IMSL 数学库和		数	82
统计库	35	二、系数矩阵扰动对解的影响和病态方程	
四、数值计算误差	35	组概念	83
第五节 统计分析软件 STATISTICA	36	三、病态方程组的求解	84
一、STATISTICA6.0 的统计分析功能	36	第四节 线性方程组的迭代方法	85
二、STATISTICA 软件的基本操作	37	一、迭代法的基本概念	86
三、STATISTICA6.0 的基本操作过程	38	二、Jacobi 迭代法与 Gauss-Seidel 迭代法	87
四、应用实例	39	三、逐次超松弛迭代法	89
参考文献	43	第五节 利用数学软件求解线性方程组	90
第二章 矩阵分析基础	44	一、用 MATLAB 软件求解线性方程组	90
第一节 线性空间与线性变换	44	二、调用 IMSL 程序库求解线性方程组	94
一、线性空间	44	评注与进一步阅读	98
二、线性子空间	46	参考文献	98
三、内积空间	48	习题	99
四、线性变换及其矩阵	50	第四章 非线性方程组的数值方法	102
第二节 特征值与特征向量	53	第一节 非线性方程组的基本概念	102
一、特征值与特征向量概念与性质	53	第二节 一元非线性方程的迭代法	103
二、线性变换矩阵的化简	55	一、非线性方程的搜索法	103
三、矩阵多项式	59	二、非线性方程的不动点迭代	104
第三节 向量范数与矩阵范数	60	三、非线性方程的 Newton 迭代	108
一、向量范数及其性质	60	第三节 非线性方程组的迭代法	111

一、向量值函数的导数	111	一、线性规划的标准形式和基本性质	174
二、非线性方程组的不动点迭代	112	二、线性规划的单纯形方法	176
三、非线性方程组的 Newton 迭代	114	三、线性规划的对偶理论	179
四、非线性方程组的拟 Newton 迭代	115	第三节 无约束最优化方法	182
第四节 利用数学软件求解非线性方		一、无约束最优化问题的概念	182
程组	118	二、一维搜索方法	183
一、用 MATLAB 软件求解非线性方		三、最速下降法与牛顿法	185
程组	118	四、拟牛顿方法	186
二、用 IMSL 数学库求解非线性方		五、共轭梯度法	187
程组	120	第四节 约束最优化方法	188
第五节 非线性方程组的同伦算法	122	一、约束最优化问题	188
评注与进一步阅读	134	二、可行方向法	189
参考文献	135	三、惩罚函数法	191
习题	135	第五节 利用数学软件求解最优化问题	192
第五章 数值逼近方法	137	一、用 MATLAB 软件求解最优化	
第一节 拉格朗日插值与牛顿插值	137	问题	192
一、函数插值的基本概念	137	二、调用 IMSL 程序库求解最优化	
二、拉格朗日插值多项式	137	问题	194
三、牛顿插值多项式	139	评注与进一步阅读	195
第二节 分段多项式插值与样条插值	140	参考文献	196
一、多项式插值的局限性	140	习题	196
二、分段线性插值和三次厄尔米特		第七章 应用统计方法	199
插值	141	第一节 常用的随机变量与统计量	199
三、三次样条插值	143	一、离散型随机变量	199
第三节 离散数据的最小二乘拟合	145	二、连续型随机变量	200
一、最小二乘拟合的基本概念	145	三、统计量及其分布	201
二、广义逆矩阵与多项式拟合	146	第二节 参数估计与假设检验方法	203
三、正交多项式与正交多项式拟合	150	一、参数点估计方法	204
第四节 数值积分和数值微分	151	二、参数区间估计方法	205
一、数值积分的基本概念	152	三、参数检验方法	206
二、数值积分的基本方法	153	四、非参数检验方法	208
三、正交多项式与高斯型积分	156	第三节 回归分析方法	210
四、数值微分	158	一、一元线性回归方法	210
第五节 利用数学软件进行数值逼近	161	二、多元线性回归方法	213
一、用 MATLAB 软件解决数值逼近		三、可化为线性模型的非线性回归	214
问题	161	第四节 方差分析与正交设计方法	215
二、调用 IMSL 程序库求解数值逼近		一、单因素方差分析	215
问题	166	二、双因素方差分析	217
评注与进一步阅读	170	三、正交设计方法	219
参考文献	170	评注与进一步阅读	223
习题	171	参考文献	223
第六章 最优化方法	173	习题	223
第一节 最优化的基本概念	173	第八章 实验设计与数据分析处理	225
第二节 线性规划方法	174	第一节 正交实验设计与分析	225

一、 $2^k \times 6$ 全析因实验设计及分析	226	五、微分代数方程组	281
二、中心复合或响应曲面的实验设计与分析	229	六、微分代数方程组求解程序 BESIRK	282
三、稳健实验设计及分析的田口 (Taguchi) 方法	233	第三节 边值问题的数值方法	287
第二节 多元数据模型回归与分析	239	一、边值问题的差分法	287
一、实验数据分析	239	二、边值问题的打靶法	288
二、回归模型的选择	240	第四节 微分方程数值方法的软件实现	290
第三节 数据处理与分析的智能化计算		一、用 MATLAB 软件求解微分方程	290
问题	244	二、用 IMSL 程序库求解微分方程	292
一、BP 神经网络	245	评注与进一步阅读	299
二、BP 网络的模型结构	246	参考文献	300
三、BP 神经网络计算	247	习题	300
四、BP 神经网络计算程序	248	第十章 偏微分方程数组数值解法	305
五、STATISTICA 神经网络计算软件	251	第一节 线上法	306
六、模拟退火 (Simulated Annealing, SA) 算法	255	第二节 加权余量法	309
七、遗传算法 (Genetic Algorithm, GA)	260	第三节 有限元法	312
评注与进一步阅读	265	一、离散化	312
参考文献	266	二、有限元方程	312
习题	266	三、残差最小化	313
第九章 常微分方程的数值方法	269	四、整合求解	313
第一节 微分方程数值方法的有关概念	269	第四节 正交配置法	316
第二节 初值问题的数值方法	270	一、非对称正交配置法	317
一、初值问题的 Euler 法	270	二、对称正交配置法	318
二、初值问题的 Runge-Kutta 方法	274	第五节 正交配置法的拓展	330
三、线性多步法	277	评注与进一步阅读	337
四、刚性微分方程组	280	参考文献	337
		习题	337
		附录 正交多项式	338

第一章 应用数学工具软件

本章介绍计算机上的数学工具软件,了解如何用数学工具软件来做数学,特别是在计算机上用数学方法来解决各种问题。这样在学习了应用数学方法后,就能利用前人的智慧结晶——数学工具软件,来解决问题。

第一节 概 述

可以用计算机来进行各种工作,但要如此做,需相应的软件工具,数学也不例外,现在计算机上已有多种数学工具软件可供使用。主要通用的数学软件工具有下面几种:侧重数学符号运算的 MAPLE 和 MATHEMATICA 与具有强大数值计算功能的 MATLAB,这些软件同时都是图形可视化和交互式操作的;完成各种计算的编程语言 FORTRAN、C 或 C++ 语言等;进行相对专业处理的工具,如完成数理统计与数据分析的统计软件 STATISTICA 和 SPSS 等。在这些软件中,有的具有基本相同的功能与作用,如 MAPLE 与 MATHEMATICA、STATISTICA 与 SPSS;有的则是侧重不同,如 MAPLE 和 MATHEMATICA 的符号运算与 MATLAB 的数值计算。下面分别作一简介。

MAPLE 是由加拿大的 Waterloo 推出的,现在的版本为 MAPLE 7。它以便捷的交互方式,实现符号推演和数值计算,范围涉及数学的各个分支,如代数、几何、微积分、离散数学、微分方程、数值计算、各种图形绘制,几乎无所不包。正因如此,可以用它来解决从初等数学直到近代数学的各类问题。

MAPLE 与 MATHEMATICA 在形式和功能上都基本相同,但在数值计算分析方面远不及 MATLAB。为克服此方面的不足,MAPLE 软件在其工作环境中设置了与 MATLAB 建立连接的功能,这样在 MAPLE 中也可以调用 MATLAB 函数进行快速的数值计算。

MATLAB 名称由 MATrix 和 LABoratory 两词缩合而成,为 Math Works 的产品,现在已有 MATLAB 6.x 版。MATLAB 是数值计算、分析最强的数学类科技应用软件,拥有丰富的数据类型和结构、友好的面向对象、快速的可视图形、众多的数学和数据分析资源及应用开发工具,实现了 MATLAB 与 Word 的无缝连接,集科学计算、图形可视与文字处理于一体,在应用代数、自动控制、信号处理、模拟与通信、时间序列分析、动态仿真中都有广泛应用。

MATLAB 除了强大的数值计算能力外,符号运算的功能也不断得到加强。它不仅具有符号计算工具包 Symbolic Math Toolbox,而且可以同 MAPLE 连接,进一步利用 MAPLE 的符号计算能力。正因如此,掌握 MAPLE 和 MATLAB 软件的使用,并能将两者结合,应用数学计算的能力定会出现质的提高。

FORTRAN 语言是世界上广泛流行的、最适于数值计算的一种计算机语言,是世界上最早出现的高级程序设计语言。从 1954 年第一个 FORTRAN 语言版本问世至今,已有近 50 年的历史,但它并不因为古老而显得过时,随着时间的推移它也在不断发展,现已出现 FORTRAN 95 语言版本。另一方面,这么多年来,在各个领域,特别是在科学工程计算领域,积累了大量成熟可靠的 FORTRAN 语言代码。因此在未来相当长的一段时间里,使用

FORTRAN 语言进行复杂科学与工程计算与分析的程序设计和软件开发，仍然有着其独特的优势。现在许多过程模拟计算、有限元分析、分子模拟等大型软件程序，都以 FORTRAN 语言编写的程序作为软件的核心程序。

现在常用的 FORTRAN 语言的编译版本是 Fortran PowerStation 4.0 或 Compaq Visual Fortran 6.5。它们与各 FORTRAN 语言版本的兼容性好，有 IMSL 数学和统计库可供直接调用，为开发和处理大型复杂计算提供了便利的手段。

STATISTICA 同 SPSS (Statistics Package for Social Science) 一样，是统计分析 with 数据处理软件，通过对话框和交互图形方式完成各种操作及输出。但两者相比，侧重有所不同，前者更适用自然科学各领域，而后者如其名称，更适合用于社会科学的统计分析。现在 StatSoft 已推出了 STATISTICA 6.0。

下面分别介绍 MAPLE, MATLAB, FORTRAN 和 STATISTICA。

第二节 MAPLE 软件介绍

MAPLE 是 Waterloo 公司发行的一种数学运算软件，是目前世界上最为通用的符号计算软件之一。它提供了强大的数学计算功能和一些强大的程序包。在命令行用户交互界面，用户可以输入一条命令，MAPLE 执行后将结果显示给用户，然后等待用户进一步的输入。

为了满足不同领域的用户的实际需要，MAPLE 将不同功能封装在不同的程序包中，并提供给不同的用户。在使用时用户可以根据自己的需要加载相应功能的程序包来完成相应的计算任务。MAPLE 提供的十几种完成特定功能的程序包，如线性代数程序包、微积分程序包、统计程序包、偏微分程序包以及画图程序包等，这些程序包可以满足各种应用计算的需求。除了 MAPLE 提供的各种程序包，还允许用户构建自己的自定义程序包，完成更为复杂的特定需要。

一、工作表界面

MAPLE 工作表包含一组丰富的文档结：运算组、表格、段落、节以及超链接。运算组和表格帮助你与 MAPLE 的运算引擎交互。这两种基本结构提供了直接途径来让 MAPLE 执行命令、显示结果。MAPLE 命令的输出结果可以是数字型的、符号型的，也有可能是图像型的。

命令序列（运算组）是解决具体数学问题过程的规则描述，是工作表中最基本的可计算结构。它的首要目的是将一条或多条 MAPLE 命令结合在一个可再次执行的组中，命令结束符为分号或冒号。通过左侧的方括号迅速辨认运算组。将光标置于运算组的任意命令行按回车，全组命令将依次执行，并将结果显示于运算组的末尾。同时光标将自动跳至下一运算组的首条命令行。

```
> solve(a * x^2 = 4, {x});
```

$$\left\{ x = 2 \frac{1}{\sqrt{a}} \right\}, \left\{ x = -2 \frac{1}{\sqrt{a}} \right\}$$

二、基本数学运算

MAPLE 可视为功能强大的计算器。计算 32×12^{13} ，只需键入：

```
> 32 * 12^13;
```

3423782572130304

MAPLE 内置大量各类特殊运算，如：阶乘、最大公约数、最小公倍数、模、同余运算

等。一个阶乘的例子如下：

>200!;

```
788657867364790503552363213932185062295135977687173263294742533244359
449963403342920304284011984623904177212138919638830257642790242637
105061926624952829931113462857270763317237396988943922445621451664
240254033291864131227428294853277524242407573903240321257405579568
660226031904170324062351700858796178922222789623703897374720000000
000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000000
```

MAPLE 的威力首先表现在它的精确运算能力。无论是分数还是无理数，都不会在运算过程中自动取近似的十进制小数，这样避免了误差的叠加，同时 MAPLE 可给出任意精度的近似小数。

考察 $\frac{2^{30}}{3^{20}}\sqrt{3}$ ：

>(2^30/3^20)*sqrt(3);

$$\frac{1073741824}{3486784401}\sqrt{3}$$

使用 evalf 命令，就得到近似的浮点数：

>evalf(%);

.5333783739

其中“%”表示为上一次的结果。

MAPLE 是一种非常强大的代数运算工具。它可以用符号运算来解析地解决和处理许多问题。定义与使用变量，可解决“如果……那么”等类问题。Maple 使用不同的方法让数学表达式更便于处理、使用。这种变通的特性允许进行诸如多项式展开、因式分解、三角式化简、用运算结果给变量赋值、恒等变换等操作。定义并展开多项式 $(x+y)^{15}$ ：

>expr:=(x+y)^15;

$$expr:=(x+y)^{15}$$

>expand(expr);

$$x^{15} + 15yx^{14} + 105y^2x^{13} + 455y^3x^{12} + 1365y^4x^{11} + 3003y^5x^{10} + 5005y^6x^9 + 6435y^7x^8 + 6435y^8x^7 + 5005y^9x^6 + 3003y^{10}x^5 + 1365y^{11}x^4 + 455y^{12}x^3 + 105y^{13}x^2 + 15y^{14}x + y^{15}$$

可以用 factor 命令对上面结果进行因式分解来验证：

>factor(%);

$$(x+y)^{15}$$

MAPLE 可以使用包括三角恒等式在内的恒等关系对复杂的表达式进行化简。考虑 $\cos(x)^5 + \sin(x)^4 + 2\cos(x)^2 - 2\sin(x)^2 - \cos(2x)$ ：

>simplify(cos(x)^5 + sin(x)^4 + 2*cos(x)^2 - 2*sin(x)^2 - cos(2*x));

$$\cos(x)^5 + \cos(x)^4$$

normal 命令是另一种化简的方法，它对分式进行通分和约分。

可以用变量代替运算结果。当处理大量的表达式和函数时变量的使用将不可缺少，特别是中间结果需要重复使用时。例如将 expr1 定义为 $(41x^2 + x + 1)^2(2x - 1)$

>expr1:=(41*x^2+x+1)^2*(2*x-1);

$$\text{expr1} := (41x^2 + x + 1)^2(2x - 1)$$

将 expr1 用 expand 命令展开的结果保存在 exper2:

> **expr2 := expand(expr1);**

$$\text{expr2} := 3362x^5 - 1517x^4 + 84x^3 - 79x^2 - 1$$

求 exper2 在 $x = 1$ 的值:

> **eval (expr2, x = 1);**

$$1849$$

下例中将对 top, bottom 表达式进行通分, 结果保存于 answer:

> **top := expr2;**

$$\text{top} := 3362x^5 - 1517x^4 + 84x^3 - 79x^2 - 1$$

> **bottom := expand((3 * x + 5) * (2 * x - 1));**

$$\text{bottom} := 6x^2 + 7x - 5$$

> **answer := normal(top/bottom);**

$$\text{answer} := \frac{1681x^4 + 82x^3 + 83x^2 + 2x + 1}{3x + 5}$$

命令 convert 允许将表达式在各种形式间进行互换。有效形式请参阅在线帮助。

MAPLE 提供多种方法定义函数。其一是使用箭头定义符 (如同数学中映射的定义符),

如定义函数 $x \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}$:

> **f := x -> x^2 + 1/2;**

$$f := x \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}$$

对函数求值 (自变量为数或代数式):

> **f(2);**

$$\frac{9}{2}$$

> **f(a + b);**

$$(a + b)^2 + \frac{1}{2}$$

其二是使用 unapply 命令, 将表达式转化为函数:

> **g := unapply(x^2 + 1/2, x);**

$$g := x \rightarrow x^2 + \frac{1}{2}$$

MAPLE 可被用于求解多种代数方程 (组)。求解如下代数方程:

$$x^3 - \frac{ax^2}{2} + \frac{13x^2}{3} = \frac{13ax}{6} + \frac{10x}{3} - \frac{5a}{3}$$

> **eqn := x^3 - 1/2 * a * x^2 + 13/3 * x^2 = 13/6 * a * x + 10/3 * x - 5/3 * a;**

$$\text{eqn} := x^3 - \frac{1}{2}ax^2 + \frac{13}{3}x^2 = \frac{13}{6}ax + \frac{10}{3}x - \frac{5}{3}a$$

> **solve(eqn, {x});**

$$\{x = \frac{2}{3}\}, \{x = -5\}, \{x = \frac{1}{2}a\}$$

为检验, 计算方程在特殊点 x 的值:

> eval(eqn, x = 1/2 * a);

$$\frac{13}{12}a^2 = \frac{13}{12}a^2$$

求解如下五元方程组:

> eqn1 := a + 2 * b + 3 * c + 4 * d + 5 * e = 41;

$$\text{eqn1} := a + 2b + 3c + 4d + 5e = 41$$

> eqn2 := 5 * a + 5 * b + 4 * c + 3 * d + 2 * e = 20;

$$\text{eqn2} := 5a + 5b + 4c + 3d + 2e = 20$$

> eqn3 := 3 * b + 4 * c - 8 * d + 2 * e = 125;

$$\text{eqn3} := 3b + 4c - 8d + 2e = 125$$

> eqn4 := a + b + c + d + e = 9;

$$\text{eqn4} := a + b + c + d + e = 9$$

可以用变量 e 来表示其他未知数 a, b, c, d 得到一组解。如果 5 个未知数一起求, MAPLE 将任选其一作为自由变量。

> solve({eqn1, eqn2, eqn3, eqn4}, {a, b, c, d});

$$\{a = 2, d = -\frac{79}{13} - \frac{4}{13}e, c = \frac{483}{13} - \frac{31}{13}e, b = -\frac{313}{13} + \frac{22}{13}e\}$$

使用所得解验证: eqn1, eqn2

> eval({eqn1, eqn2}, %);

$$\{41 = 41, 20 = 20\}$$

下例是关于其他 MAPLE 可解的方程, 如含三角函数与绝对值符号的方程。

解含三角函数的方程:

> solve(arccos(x) - arctan(x) = 0, {x});

$$\left\{x = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{-2 + 2\sqrt{5}}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}\right)^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{5}}}\right\}$$

解含绝对值符号的方程: $|(z + |z + 2|)^2 - 1|^2 = 9$

> solve(abs((z + abs(z + 2))^2 - 1)^2 = 9, {z});

$$\{z = 0\}, \{z \leq -2\}$$

> abs((z + abs(z + 2))^2 - 1)^2 = 9;

$$|(z + |z + 2|)^2 - 1|^2 = 9$$

下例演示在 MAPLE 中可方便地解不等式。

解不等式组: $x^2 < 1, y^2 \leq 1, x + y < \frac{1}{2}$

> solve({x^2 < 1, y^2 <= 1, x + y < 1/2}, {x, y});

$$\{-1 < x, x < 1, x + y < \frac{1}{2}, -1 \leq y, y \leq 1\}$$

解以 y 为参量的关于 x 的不等式: $x + y + \frac{4}{x + y} < 10$

> ineq := x + y + 4/(x + y) < 10;

$$\text{ineq} := x + y + \frac{4}{x + y} < 10$$

> solve(ineq, {x});

$$\{x < -y\}, \{5 - \sqrt{21} - y < x, x < 5 + \sqrt{21} - y\}$$

MAPLE 同样可解复数不等式如: $2\sqrt{-1-I}\sqrt{-1+I} \neq 0$ 并用命令 is 表示其布尔值。

> expr := 2 * sqrt(-1-I) * sqrt(-1+I);

$$\text{expr} := 2\sqrt{-1-I}\sqrt{-1+I}$$

> is(expr < 0);

true

MAPLE 对每类数学对象都提供了大量适当的函数。右击一种数学对象都将显示相关的右键菜单。

MAPLE 中最常用的工具包就是线性代数工具包: linalg 该工具包提供了一组用于处理向量、矩阵的强力工具。MAPLE 可求矩阵标准型、特征值、特征向量, 可定义曲线坐标, 进行各种矩阵分解如: Cholesky, LU 和 QR 分解。

首先使用 with(linalg) 命令载入该工具包, 出现使用工具包的各种命令:

> restart;

> with(linalg);

[BlockDiagonal, GramSchmidt, JordanBlock, LUdecomp, QRdecomp, Wronskian, addcol, addrow, adj, adjoint, angle, augment, backsub, band, basis, bezout, blockmatrix, charmat, charpoly, cholesky, col, coldim, colspace, colspan, companion, concat, cond, copyinto, crossprod, curl, definite, delcols, delrows, det, diag, diverge, dotprod, eigenvals, eigenvalues, eigenvectors, eigenvects, entermatrix, equal, exponential, extend, ffgausselim, fibonacci, forwardsub, frobenius, gausselim, gaussjord, geneqns, genmatrix, grad, hadamard, hermite, hessian, hilbert, htranspose, ihermite, indexfunc, innerprod, intbasis, inverse, ismith, issimilar, iszero, jacobian, jordan, kernel, laplacian, leastsqrs, linsolve, matadd, matrix, minor, minpoly, mulcol, mulrow, multiply, norm, normalize, nullspace, orthog, permanent, pivot, potential, randmatrix, randvector, rank, ratform, row, rowdim, rowspace, rowspan, rref, scalarmul, singularvals, smith, stackmatrix, submatrix, subvector, subbasis, swapcol, swaprow, sylvester, toeplitz, trace, transpose, vandermonde, vecpotent, vectdim, vector, wronskian]

定义 3×3 矩阵 A 如下:

> A := matrix(3, 3, [1/2, -1/3, 2, -5, 14/3, 9, 0, 11, -5/6]);

$$A := \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 2 \\ -5 & \frac{14}{3} & 9 \\ 0 & 11 & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}$$

使用 det 命令计算其行列式值:

> det(A);

$$\frac{-2881}{18}$$

由于行列式不为 0 (可逆), 可用 `inverse` 命令求其逆矩阵:

`>inverse(A);`

$$\begin{bmatrix} \frac{1852}{2881} & -\frac{391}{2881} & \frac{222}{2881} \\ \frac{75}{2881} & \frac{15}{5762} & \frac{261}{2881} \\ \frac{990}{2881} & \frac{99}{2881} & -\frac{12}{2881} \end{bmatrix}$$

定义另一矩阵 B 含有变量 θ, ϕ :

`>B:=matrix(3,3,[1/2,0,-2,sin(theta),1,phi^2,0,phi-1,3/4]);`

$$B:=\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & -2 \\ \sin(\theta) & 1 & \phi^2 \\ 0 & \phi-1 & \frac{3}{4} \end{bmatrix}$$

求矩阵 A, B 的积并存于 C .

`>C:=multiply(A,B);`

$$C:=\begin{bmatrix} \frac{1}{4}-\frac{1}{3}\sin(\theta) & -\frac{7}{3}+2\phi & \frac{1}{2}-\frac{1}{3}\phi^2 \\ -\frac{5}{2}+\frac{14}{3}\sin(\theta) & -\frac{13}{3}+9\phi & \frac{67}{4}+\frac{14}{3}\phi^2 \\ 11\sin(\theta) & \frac{71}{6}-\frac{5}{6}\phi & -\frac{5}{8}+11\phi^2 \end{bmatrix}$$

再求行列式:

`>det(C);`

$$-\frac{2881}{48}-\frac{2881}{36}\phi^2+\frac{2881}{36}\phi^3-\frac{2881}{9}\sin(\theta)+\frac{2881}{9}\sin(\theta)\phi$$

使用 `eigenvects` 命令可求矩阵的特征向量。返回结果列表中的第一分量是特征值, 第二分量是它的代数重数, 最后一个分量是该特征值对应的特征空间的基向量组成的集合。

`>M:=matrix(3,3,[1,-3,3,3,-5,3,6,-6,4]);`

$$M:=\begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -5 & 3 \\ 6 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

`>eigenvects(M);`

$$[4,1,\{[1,1,2]\}], [-2,2,\{[1,1,0],[-1,0,1]\}]$$

三、作图

MAPLE 支持 2D、3D 图像, 它可以对显式、隐式、参数型函数及数据集作图。缺省情况图形将在行内 (文档中) 显示。首先用 `with` 命令载入两个作图工具包, 系统列出可用的函数:

`>with(plots);`

`[animate, animate3d, animatecurve, arrow, changecoords, complexplot, complexplot3d, conformal, conformal3d, contourplot, contourplot3d, coordplot, coordplot3d, cylinderplot, densityplot, display, display3d, fieldplot, fieldplot3d, gradplot, gradplot3d, implicitplot, implicitplot3d, inequal, listcontplot, listcontplot3d,`