初等数学研究丛书

方程与不等式

四川人民出版社

初中数学研究丛书《方程与不等式》

四川人民出版社出版　（成都盐道街三号）
四川省新华书店发行　国营五二三厂印刷

开本 787×1092 毫米 1/32 印张 13.125 字数 279 千
1984 年 12 月第一版　1984 年 12 月第 1 次印刷
印数：1—14,500 册

书号：7118·819　定价：1.30 元

内 容 简 介

本书共八章，前五章讲方程：内容有方程的基本概念与变形定理、代数方程、超越方程、方程组及列方程解应用问题；后三章是不等式的性质、解法、证明以及用初等方法求极值的技巧．全书用集合与函数的观点来对方程与不等式的基础理论给以阐发，同时重视解题的技能与技巧．编写中，编者注意吸取国内外有关这方面的经验与资料．书末附有习题解答，便于有志于自学的人阅读、查对．

这是一本中学数学教师良好的教学参考书，也是师范院校学生阅读中学数学的好资料和中学生的提高读物，也可作为师范院校与教师进修学院开设中学数学课程的教材．

前　言

“精简、增加和渗透”是中学数学教学大纲中提出的一条原则。在这原则下，以传统数学为形，现代数学为实，实现中学数学内容的现代化，是当前我们面临的重要课题。四川省数学会普及工作委员会主编了一套“初等数学研究丛书”，邀请了四川师范学院数学系中学数学教研组同志从事编写工作，我觉得很有意义。这对中学数学教师和师范院校学习数学的学生，用现代数学的观点和方法，来研究传统数学内容，可供参考。

编好这样的小册子，不是一件很容易的事。这套“初等数学研究丛书”自然还会有一些缺点，我相信在广大教师和学生的帮助下定会使它逐步完善的。

我希望有更多的数学普及小册子问世。

四川省数学会理事长　柯　召

一九八三年一月

目　次

第一章　方程的基本概念与方程的变形定理 ········（1）
1,1.　方程的基本概念 ········（1）
1,2.　解方程的基本步骤 ········（5）
1,3.　方程的变形定理 ········（6）
习题一 ········（22）
第二章　代数方程 ········（23）
2,1.　整式方程 ········（23）
习题二(1) ········（55）
2,2.　分式方程 ········（65）
2,3.　无理方程 ········（75）
2,4.　简易不定方程 ········（89）
习题二(2) ········（96）
第三章　代数方程组 ········（99）
3,1.　方程组中的基本概念 ········（99）
3,2.　方程组的同解性 ········（99）
3,3.　二元二次方程组 ········（107）
习题三 ········（126）
第四章　初等超越方程 ········（129）
4,1.　指数方程与对数方程 ········（129）
4,2.　三角方程 ········（137）
4,3.　反三角方程与三角方程组 ········（157）

4,4. 三角方程解的等价性问题 …………………… (166)
习题四 …………………………………………… (169)
第五章 列方程（组）解应用问题 …………………… (173)
5,1. 列方程（组）解应用问题的一般步骤 …… (173)
5,2. 例题 ………………………………………… (178)
5,3. 关于解应用问题研究中的几点说明………… (184)
习题五 …………………………………………… (189)
第六章 不等式的基本性质与解法 …………………… (191)
6,1. 复习实数中一些性质 ……………………… (191)
6,2. 不等式中的一些概念 ……………………… (192)
6,3. 不等式的基本性质 ………………………… (193)
6,4. 利用不等式给出常见的数集与点集 ……… (197)
6,5. 不等式的同解定理 ………………………… (200)
6,6. 一元代数不等式的解法 …………………… (202)
6,7. 二元一次不等式与混合组 ………………… (225)
6,8. 初等超越不等式 …………………………… (232)
6,9. 列不等式解应用问题 ……………………… (245)
习题六 …………………………………………… (249)
第七章 不等式的证明 ……………………………… (254)
7,1. 证明不等式的基本方法 …………………… (254)
7,2. 论证不等式中常用的技巧 ………………… (263)
7,3. 几个重要不等式 …………………………… (278)
7,4. 初等超越不等式的证明 …………………… (282)
习题七 …………………………………………… (290)
第八章 求函数极值的初等方法 …………………… (292)
8,1. 配方法 ………………………………………… (294)

8,2. 判别式法…………………………………………………… (300)
8,3. 用不等式求极值法…………………………………………… (308)
8,4. 用图象法求极值…………………………………………… (318)
习题八 ……………………………………………………………… (322)
[附] 本书习题解答…………………………………………………… (326)
习题一解答 ……………………………………………………… (326)
习题二解答（1） ……………………………………………… (328)
习题二解答（2） ……………………………………………… (334)
习题三解答 ……………………………………………………… (347)
习题四解答 ……………………………………………………… (352)
习题五解答 ……………………………………………………… (363)
习题六解答 ……………………………………………………… (371)
习题七解答 ……………………………………………………… (390)
习题八解答 ……………………………………………………… (397)

第一章 方程的基本概念与方程的变形定理

1,1. 方程的基本概念

在讲方程这个概念之前，先回顾式与等式这两个概念：式是指用运算符号将数或用字母所表示的数连接起来；等式是用等号将两个式连接起来的。下面这些都是等式：

$$2+3=5, \tag{1}$$

$$7+8=18, \tag{2}$$

$$a^2+2ab+b^2=(a+b)^2, \tag{3}$$

$$x+3=x+5, \tag{4}$$

$$x+y=5, \tag{5}$$

$$2x+1=x+4, \tag{6}$$

$$4\sin x=1, \tag{7}$$

$$5x-2x=x+2x, \tag{8}$$

$$x^2+3x+5=0. \tag{9}$$

一般把等式作如下分类：

等式
- 真等式（又称恒等式）如①、③、⑧。
- 假等式（又称矛盾等式）如②、④。
- 有时真、有时假的等式（又称条件等式）如⑤、⑥、⑦、⑨。

在中学里把等式中含有未知数的叫做方程，如上面④、

⑤、⑥、⑦、⑧、⑨. 而方程的实质是要求当未知数取何值时，这个等式才成立。

另一方面，中学里谈的式实际上就是解析式，它是函数的表达形式之一，所以从函数观点来看方程又可作如下定义：

定义1 若解析表达式 $f(x,y,\cdots\cdots,z)$ 及 $g(x,y,\cdots z)$ 中变数 $x,y,\cdots\cdots,z$ 是定义在某数集组成的数组集 w 上的函数，对于形如下的等式：

$$f(x,y,\cdots\cdots,z)=g(x,y,\cdots\cdots,z) \tag{1}$$

叫做方程；又若 $f(x,y,\cdots\cdots,z)$ 与 $g(x,y,\cdots\cdots,z)$ 的定义域分别为 M_1 及 M_2，设 $M=M_1\cap M_2$，此 M 叫做方程（1）的未知数允许值集（或称为方程的定义域）；变数 $x,y,\cdots\cdots,z$ 叫做方程（1）的未知数。

以上定义，由于函数 f 与 g 可以同时为常值函数，因此从函数观点来研究方程的外延与中学里等式的外延（它包含①至⑨）是相同的。为了讨论方程时，使之与中学方程概念外延的一致，我们以下所谈方程里通常假定 f 与 g 中至少有一个不是常值函数的情况。

定义2 若数组 $\alpha=(a,b,\cdots,c)\in M$，并使得

$$f(a,b,\cdots\cdots,c)=g(a,b,\cdots,c) \tag{2}$$

成立，那么称数组 α 是方程（1）的一个解。又方程所有解的集合叫做方程的解集。设方程(1)的解集为 S，显然 $S\subseteq M$。求方程解集 S 的过程叫做解方程（在中学里解方程定义为求方程所有解或证明其无解的过程，方程无解时即其解集为空集 Φ，故中学的解方程的定义是包含在这个定义之中的）。

由于方程解集 S 与 M 的关系，可把方程按函数观点定义下的外延加以分类如下：

（1）若 $S=M$，则称方程（1）为恒等方程（即等式中的恒等式）。

（2）若 $S=\Phi$，则称方程（1）为矛盾方程（即等式中的矛盾等式）。

（3）若 $S\subset M$，则是中学里常见的一般方程（即等式中的条件等式）。

由上可见，过去传统的中学代数里称方程为条件等式，虽不全面，但确实包括了所研究方程的主要部分。又当方程（1）中仅含一个未知数时，其形式如下：

$$f(x)=g(x). \tag{3}$$

这样方程的解特称为方程的根。又若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 同为整式时，方程（3）有 k 个相同的根 α 时，就称 α 为方程(3)的 k 重根，k 是根 α 的重数。

例 1 若方程 $\dfrac{6}{(x-1)(x-2)}=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$ 是定义在实数集 R 上，则 $f(x)=\dfrac{6}{(x-1)(x-2)}$，

$g(x)=\dfrac{1}{(x-3)(x-4)}$，$M_1=\{x|\ x\in R$ 且 $x\neq 1,2\}$，

$M_2=\{x|\ x\in R$ 且 $x\neq 3,4\}$，故未知数允许值集 M 为：

$M=M_1\cap M_2=\{x|\ x\in R$ 且 $x\neq 1,2,3,4\}$，其解集 $S=\left\{5,\ 2\frac{4}{5}\right\}$，可知 $S\subset M$。

例 2 若所给方程为：$(x+5)(x^2-6)(x^2+7)=0$

（1）当方程定义在有理数集上时，此方程的解集 $S=\{-5\}$；

(2) 当方程定义在实数集上时，此方程的解集 $S=\{-5,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6}\}$；

(3) 当方程定义在复数集上时，此方程的解集 $S=\{-5,\ -\sqrt{6},\ \sqrt{6},\ -\sqrt{7}\,i,\ \sqrt{7}\,i\}$。

由例 2 可知方程的解集与方程定义在所给数集 w 密切相关。

为了对方程的概念更好地明确起见，除了对它的内涵研究外，还应当对其外延加以讨论。这就要涉及到方程分类的各种标准：

1. 按方程的解集与未知数允许值集间的关系为标准，把方程分为恒等方程、矛盾方程、条件方程。

2. 按方程中所含未知数个数的多少来作标准，可将方程分为一元方程、二元方程、三元方程……等。

3. 按组成方程两边 f 与 g 的函数类别为标准，方程又可作下表所示分类：

- 方程
  - 代数方程
    - 有理方程
      - 整式方程
        - 一次方程
        - 二次方程
        - ……
      - 分式方程
    - 无理方程
  - 超越方程
    - 指数方程
    - 对数方程
    - 三角方程
    - 反三角方程
    - ……

注意方程的分类主要着眼点在其形式上。例如下列方程

$$\frac{(x+2)(x-1)}{x-1}=5. \quad ①$$

将方程①简化，可变形为整式方程

$$x+2=5. \quad ②$$

对于方程①我们只称为分式方程而不称为整式方程。

1,2. 解方程的基本步骤

由于解方程的一般步骤常常容易被人忽视，今以解一元一次方程为例来加以说明。

例 解方程 $\frac{5x+1}{6}=\frac{9x+1}{8}-\frac{1-x}{3}$.

解 (1) 解法 用 24 乘方程的两边得

$$4(5x+1)=3(9x+1)-8(1-x).$$

去括号 $20x+4=27x+3-8+8x$.

移项 $20x-27x-8x=3-8-4$

合并同类项 $-15x=-9$.

两边各除以 -15， $x=\frac{3}{5}$.

(2) 验算 用 $x=\frac{3}{5}$代入原方程

$$左边=\frac{2}{3}，右边=\frac{2}{3}.$$

∵ 方程左边值 = 方程右边值，

∴ $x=\frac{3}{5}$ 是原方程的解。

今把上面解法步骤的理由，说明如下：

在 (1) 步骤是解决若方程有解时，它的解应是什么？

这时把未知数 x 当成已知数看待（即若其解就是 x），然后方程看成是数值等式，再通过数值等式的变形法则，最后得出 $x=\frac{3}{5}$ 这个最简等式。不难看出当 x 用 $\frac{3}{5}$ 代替后即得到 $\frac{3}{5}=\frac{3}{5}$，从而肯定了若方程有解，那么它的解应是 $x=\frac{3}{5}$。

第(1)步骤只完成了一半，因原方程是否有解还不能最后肯定，使得解方程第(2)步骤所谓"验算"(就是论证方程解的存在性)成为必要了。这两个步骤，从理论上看它们是有机地联系着，这就是初中讲代数方程里为什么要讲这两个步骤的理由。

由于解方程的第(1)步骤中有时可能出现有客解或解的遗失情况，对后一种情况出现时虽然完成第(2)步验算，也不能肯定已求出了方程的所有解。另一方面如果解方程中的第一步是可逆的，这时第二步骤是否可以略去等等问题的提出，这就要求我们应该掌握下面解方程的一些变形定理。

1,3. 方程的变形定理

定义 1 下列两个方程

$$F_1(x,y\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots z),\qquad (F)$$

$$\Psi_1(x,y,\cdots,z)=\Psi_2(x,y,\cdots,z),\qquad (\Psi)$$

若它们在某指定数集上研究，设方程 (F)、(Ψ) 的解集分别为 S_1、S_2，亦即

$$S_1=\{(x,y,\cdots,z)\mid F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)\}.$$

$$S_2=\{(x,y,\cdots,z)\mid \Psi_1(x,y,\cdots,z)=\Psi_2(x,y,\cdots,z)\}.$$

(1) 若 $S_1=S_2$（亦即 $S_1\supseteq S_2$ 及 $S_1\subseteq S_2$），则称方程 (F) 与方程 (Ψ) 是同解方程（或称为等价方程）。用符号记为： $(F)\Longleftrightarrow(\Psi)$。

(2) 若 $S_1\subseteq S_2$，则称方程 (Ψ) 是方程 (F) 的结果方程，用符号记为： $(F)\Longrightarrow(\Psi)$。

由上面这些定义中应注意到下列几点：

(i) 二方程同解这一概念具有相对性，它不能脱离两个方程所指定的数集上来谈，当所指定研究的数集变动后，原来同解的二方程就可能不一定是同解了。例如下列所给二方程：

$$x-5=0, \tag{①}$$

$$x(x^2+2)=5(x^2+2), \tag{②}$$

①、②两方程在指定的实数集上，它们的解集都同为 $\{5\}$，故是同解的；但当所指定的数集是复数集时，①方程解集仍为 $\{5\}$，②方程解集是 $\{5,\ -\sqrt{2}i,\ \sqrt{2}i\}$，这时二方程就不同解了。

(ii) 凡空集都是相等的，故任意两个矛盾方程都是同解的。又由于空集是任何集合的子集，因而任意方程都是矛盾方程的结果方程。

(iii) 在下列二整式方程

$$x-\frac{2}{3}=0, \tag{③}$$

$$\left(x-\frac{2}{3}\right)^3=0, \tag{④}$$

它们的解集都是 $\left\{\frac{2}{3}\right\}$，按我们同解的定义它们应是同解方程。但一般在研究整式方程的同解时，相同的根还应考虑到

若是重根时，重数应相同。由于方程④的根 $x=\frac{2}{3}$ 是三重根，一般认为是不同解的，这是我们目前定义无法解决的例外，但我们只要注意到这种情况，不难在原有基础上加以补救的。

(*iv*) 因方程与方程间解集相同定义为同解，则此概念可以推广到方程与方程组之间。

例如　在实数集上方程

$$(x+y-3)^2+(3x+y-5)^2=0 \text{ 与方程组} \begin{cases} x+y-3=0, \\ 3x+y-5=0 \end{cases}$$

同解。

同解方程具有下列性质：

今设 (F)，(Ψ)，(δ) 分别表示方程

(1) $(F)\Longleftrightarrow(F)$　　(同解方程间的自反性)；

(2) 若 $(F)\Longleftrightarrow(\Psi)$，则 $(\Psi)\Longleftrightarrow(F)$ (同解方程间的对称性)；

(3) 若 $(F)\Longleftrightarrow(\Psi)$，$(\Psi)\Longleftrightarrow(\delta)$，则 $(F)\Longleftrightarrow(\delta)$ (同解方程间的传递性)。

若二方程是互为结果方程时，应该是同解的。

若 $(F)\Longrightarrow(\Psi)$，$(\Psi)\Longrightarrow(F)$，则 $(F)\Longleftrightarrow(\Psi)$。

定义 2　若原方程的两边施行恒等变形，或施行某种数学运算后得到一个新的方程，此新方程叫做原方程的导出方程。

在以后方程变形中，不管原方程与新方程是同解的，或非同解的（前者是后者的结果方程；或后者是前者的结果方程；或二者根本谈不上结果方程的关系），新方程都是原方

程的导出方程。

定理 1 恒等变形同解定理：

将方程 $F_1(x,y,\cdots,z)=F_2(x,y,\cdots,z)$ (F)

的函数分别作恒等变形，即

$F_1(x,y,\cdots,z)\equiv\Psi_1(x,y,\cdots,z)$；

$F_2(x,y,\cdots,z)\equiv$
$\Psi_2(x,y,\cdots,z)$。

得新方程 $\Psi_1(x,y,\cdots,z)=\Psi_2(x,y,\cdots,z)$。 (Ψ)

若方程（F）与（Ψ）的未知数允许值集相同，则方程（F）与方程（Ψ）同解。

证 设方程（F）、（Ψ）的未知数允许值集与解集分别为 M_1，S_1；M_2，S_2，原命题的已知条件是 $M_1=M_2$，且 $F_1\equiv\Psi_1$，$F_2\equiv\Psi_2$。求证 $S_1=S_2$。今分两步论证：

（1）若任一 $\alpha=(a,b,\cdots,c)\in S_1$，则

$F_1(a,b,\cdots,c)=F_2(a,b,\cdots,c)$ ① （解的定义）

由于 $\alpha\in S_1\subseteq M_1$，而 $M_1=M_2$，故 $\alpha\in M_2$，因此 $\Psi_1(a,b,\cdots,c)$ 与 $\Psi_2(a,b,\cdots,c)$ 有确定的值。

又由已知 $F_1\equiv\Psi_1$，$F_2\equiv\Psi_2$，故有

$$\left.\begin{array}{ll} F_1(a,b,\cdots,c)=\Psi_1(a,b,\cdots,c) & ② \\ F_2(a,b,\cdots,c)=\Psi_2(a,b,\cdots,c) & ③ \end{array}\right\}\text{（函数恒等的定义）},$$

由①、②、③可得：

$\Psi_1(a,b,\cdots,c)=\Psi_2(a,b,\cdots,c)$（相等的传递性）。

$\therefore\ \alpha\in S_2$，则 $S_1\subseteq S_2$。

（2）若任一 $\beta=(a'b'\cdots,c')\in S_2$，则

$\Psi_1(a',b',\cdots,c')=\Psi_2(a',b',\cdots,c')$ ④ （解的定义）。由

于 $\beta\in S_2\subseteq M_2$，而 $M_1=M_2$，故 $\beta\in M_1$，因此 $F_1(a',b',\cdots,c')$ 与 $F_2(a',b',\cdots,c')$ 有确定的值。又由已知 $F_1\equiv\Psi_1$，$F_2\equiv\Psi_2$，故有

$$\left.\begin{aligned}&F_1(a',b',\cdots,c')=\Psi_1(a',b',\cdots,c') \quad ⑤\\&F_2(a',b',\cdots,c')=\Psi_2(a',b',\cdots,c') \quad ⑥\end{aligned}\right\}\text{（函数恒等的定义），}$$

由④、⑤、⑥可得

$F_1(a',b',\cdots,c')=F_2(a',b',\cdots,c')$ （相等的传递性），

$\therefore$ $\beta\in S_1$，由此可知 $S_2\subseteq S_1$。

由（1）、（2）， $\therefore S_1=S_2$。

今用下列表来举例说明，表中设方程（F）经过恒等变形后为方程（Ψ），并设它们的未知数允许值集与解集各为 M_1，M_2；S_1，S_2。再从下表中可以看出：定理的条件是充分性的；满足条件未知数允许值集相同（$M_1=M_2$）则同解（$S_1=S_2$）。但条件不是必要性的，即具有同解（$S_1=S_2$）的，不一定未知数允许值集相同（$M_1=M_2$）。

两个方程未知数允许值集 M_1 与 M_2 的关系	原方程 (F) (M_1，S_1)	新方程 (Ψ) (M_2，S_2)	S_1 与 S_2 间的关系
（一）$M_1=M_2$ 	$\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\frac{x-2}{(x-2)^2}$	$\frac{x+1}{x-1}=\frac{1}{x-2}$	同解 $S_1=S_2$