

8651
WLC

1952

梁桥立体計祿向題

Б. Е. 烏里茨基 著

黃 潤 韶 譯

人民交通出版社

本書敘述了肋形結構與管形結構作為空間體系的計算方法，用這一方法能簡易地求出結構各部分的應力與變形。在橋梁建築、工業與民用建築、船舶建造以及其他工程中都能遇到上述類似的結構。

鋼筋混凝土橋梁上部構造與鋼梁及鋼筋混凝土板聯合工作的結構，實際上也是採用本書的方法來進行計算的。

梁橋立體計算問題

Б. Е. УЛИЦКИЙ

ВОПРОСЫ

ПРОСТРАНСТВЕННОГО

РАСЧЕТА

БАЛОЧНЫХ МОСТОВ

АВТОТРАНСИЗДАТ МОСКВА 1956

本書根據蘇聯汽車運輸與公路部出版社1956年莫斯科俄文版本譯出

黃潤韶譯

人民交通出版社出版

(北京定安門外和平里)

北京市書刊出版業營業許可証出字第〇〇六號

新華書店發行

人民交通出版社印刷廠印刷

1957年11月北京第一版 1960年5月北京第2次印刷

開本：850×1168 1/32 印張：1 1/2張

全書：68,000字 印數：1301—2300冊

統一書號：15044·1217-京

定價(10)：0.30元

目 录

序 言

計 算 理 論	4
肋形結構的計算	4
管形結構的計算	20
肋形結構的計算 例	23
例 1	23
例 2	30
例 3	33
例 4	37
桥梁上部構造結構的計算 例	39
例 5	41
例 6	52
結論和 推 荐	58
附录 函数数值表	

序 言

钢筋混凝土桥梁以及同钢筋混凝土板联合而起共同作用的钢梁^①桥的上部构造有板式的、盒形的或箱形的。在设计实践中，对于这些结构的计算是极为近似的，没有充分考虑到结构的立体工作，这就使结构加重，而造成材料的浪费。文献中有更为精确的计算方法，但由于这些方法过于复杂，没有得到普遍的推广。

建设事业采取了使用钢筋混凝土结构的方针，引起了盒形结构和箱形结构的普遍推广。如用更加完善的计算方法来设计这些结构，就可以节省建筑材料，并扩大钢筋混凝土的应用范围。

盒形结构和箱形结构的计算由二个阶段组成：

1. 求算所研究的梁内的弯矩和剪力，考虑到由于有隔膜或横梁而荷载在横向的分布。

2. 求算由于梁内弯矩和剪力作用所产生的应力和变形。

在桥梁计算中，荷载的横向分布，用“杠杆”法和“偏心受压”等方法求出。近年来，公路桥上部构造各梁间的荷载分布，常用技术科学院士B.Γ. 顿钦科^②所制订的更为完善的方法来计算。

求算由于梁内弯矩和剪力作用而产生的应力和变形，是用非常原始的方法进行的。

在桥梁构造物设计实践中，通常将肋形结构分解成独立的丁字梁，每个丁字梁中含有一根肋和同它紧接的板段。在公路人工构造物设计规范中指示，如在梁的受压区有板，则这板的一部分可加入丁形截面的组成部分中去，其宽度为在肋轴的每边不得超过：梁轴间距离的 $\frac{1}{4}$ ，或肋形梁本身计算跨径的 $\frac{1}{4}$ 。梁翼自由悬出长度不应超出板厚度的6倍，承托厚度不计在内。如板支承托在内的厚度小于梁全部高度的 $\frac{1}{10}$ ，则在计算中根本不考虑板的作用^③。

① 钢梁同钢筋混凝土板为了共同工作而联合在一起的结构，以下简称联合结构。
(用这种结构的桥墩联合称梁——译者)。

② B.Γ. 顿钦科。公路梁桥的立体计算。道路出版社，1953年。(中译本人民交通出版社1954年出版——译者)。

③ “公路钢筋混凝土、金属、钢筋混凝土和石砌人工构造物设计规范”。道路出版社，1948年。

事实上，板参加結構工作的性質和程度，除与跨徑長度、板的厚度和肋与肋之間的距离有关外，还同一系列其他因素有关。其中最重要的是：結構的靜力图（不連續的，連續的，懸臂的），荷載种类和位置，肋的总数，以及計算截面的位置。

有許多苏联和外国專家們的專談如何求算肋形結構中板的“有效”寬度問題的科學報告；其中可以指出卡尔曼、密哲尔、巴浦郭維奇等的著作。在这些著作中，板的“有效”寬度的研究都是为个别情况而进行的，主要是为單肋梁（丁字梁）。由于最后結果过于复杂，这些著作难以实地应用。

本書基本上也是專談板参加肋的工作的問題。但这里研究的并不是从多肋式結構中分割出来的一根隔离的肋連同紧接着的板段的工作，而是全部肋和板成为一个总体的工作，这样更正确地反映結構的真实工作。

必須指出，隔膜对于板参加肋工作的程度的影响是极微的。但如在第二阶段計算中考虑有隔膜的話，將使計算大为复杂。因此，在本書中当确定板参加肋工作的程度时，隔膜不加入計算，而計算图成为肋形結構或管形結構，这种結構由仅用板連結在一起的主梁構成。

所述肋形結構和管形結構的計算方法，能使考虑到結構成为空間体系来工作的特点。这个方法十分簡單，已推演到便于在設計实践中使用的阶段，并用具体例子說明。附录內提供一些計算上用到的輔助資料——相当于双曲线函数的数值表。

計 算 理 論

肋形結構的計算

当計算由一排平行梁（其上復有与梁剛性連結的蓋板）所組成的結構（圖 1, a）时，要分別：

- a) 按施于肋上面的力的作用計算；
- 6) 按施于肋間板上面的局部荷載計算。

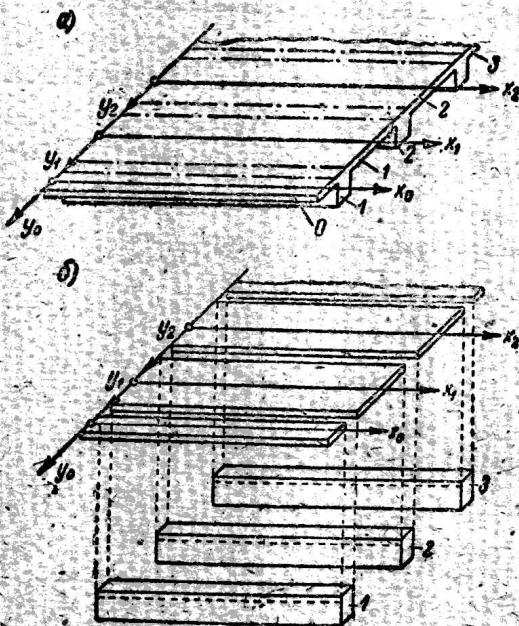


圖 1 多肋式結構

a—概示圖；6—計算示意圖

本章中將根據外力加在肋上面时所起的作用來討論結構的計算。計算的實質如下。

用与肋的側面重合的豎向平面將結構分割成一系列肋和矩形板（圖 1,

。如板有承托，則在板上承托开始处切开，承托作为肋的組成部分。在切割处的两个鄰接面上施加方向相反的切向力和法向力。考慮到在桥梁結構中板的厚度要比肋的高度小得多，而外来荷載是直接施于肋上的，所以板內的弯矩和剪力可以不計。

在切割面兩边鄰接面上，板的纖維与肋的纖維的縱向变形和水平向曲率都是相等的。根据这种板和肋的纖維变形相等的条件可以編列若干方程式，由这些方程式就可求算切割面上切向力和法向力的值。纖維的变形概以板厚度一半处作为研討的标准。

肋纖維的变形是通过与各該肋有关的外来荷載、切向力和法向力来表示的。考慮到在桥梁結構中肋的尺寸的比例（肋的高度远比它的長度为小），这些变形可按照材料力学中所述的方法算出，不致发生大的誤差。

板纖維的变形是通过相当的切向力和法向力来表示的。当板的寬度与它的長度比較起来显得很大时，为了避免大的誤差起見，板的变形必須計算得較為精確——用彈性理論的方法。

我們采用下列符号：

N 和 M —由于外来荷載作用，在肋內产生的法向力和弯矩；

F —肋的横截面面积；

I^B 和 I^r —相对于截面的水平向和豎向中和軸的肋截面慣性矩；

b^p —肋的寬度；

b^{mn} —板的寬度（兩肋之間）；

l —板（肋）的長度；

δ —板的厚度；

α —从肋截面中和軸到板厚度一半处的距离；

λ —考慮切向应力在板的縱向側面上沿厚度方向分布不均匀而采用的系数；

E_p —肋的彈性模量；

E_{mn} —板的彈性模量；

μ —板的波桑系数；

$\tau(x)$ —表示切向应力沿板縱向側面分布特性的函数；

$p(x)$ —表示法向应力沿板縱向側面分布特性的函数。

坐標軸直按图 1 所示那样布置。每一板和肋有各自的坐標軸：橫坐標軸与板和肋的縱軸重合，縱坐標軸則通过結構的支承截面。板和肋各自分別依次編号。

我們現在來求离坐标原点距离 x 处任意截面中肋纖維的縱向变形。所有变形都以板厚度一半处作为計算依据。

由外来荷載所产生的拉伸（或压縮）而造成的变形为 $\frac{N}{F E_p}$ 。

由外来荷載所产生的豎向平面內弯曲而造成的变形为 $\frac{M a}{I^B E_p}$ 。

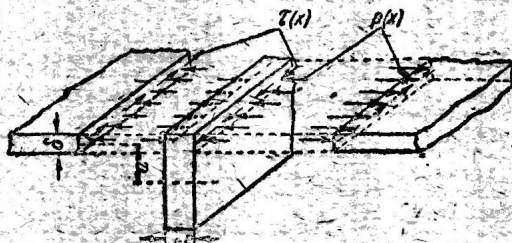


圖 2 作用在板与肋之間的力的分布示意图

施于切割面上的切向力和法向力对于肋的作用可从图 2 看出。在切向力的影响下，肋內出現法向应力以及在豎向平面和水平面內的弯矩。在法向力的影响下，肋內出現水平面內的弯矩，并发生扭轉。

切割面上切向力和法向力的方向是先行假定的。

因切向力而在肋中产生的拉伸所造成的变形为：

$$\frac{a}{F E_p} \int_0^x \tau(x) dx;$$

因切向力而产生的豎向平面內弯矩所造成的变形为：

$$\frac{k b a^2}{I^B E_p} \int_0^x \tau(x) dx;$$

因切向力而产生的水平面內弯矩所造成的变形为：

$$\frac{b b^2}{4 I^B E_p} \int_0^x \tau(x) dx;$$

因法向力而产生的水平面内弯曲所造成的变形为:

$$\frac{\delta b p}{2I_1^r E_p} \left[x \int_0^x p(x) dx - \int_0^x x p(x) dx \right] \quad (1)$$

外力和肋截面尺寸可能沿着跨径长度内是变量。如果这样, 则这些量应以 x 的函数来表示, 并放入积分符号以内。

第 i 号肋与第 i 号板拟合面上的纖維纵向总变形为:

$$\begin{aligned} \Delta_{i,1} = & \frac{F_1}{F_1 E_p} - \frac{M_1 a_1}{I_1^3 E_p} + \frac{\delta_{i-1}}{F_1 E_p} \int_0^x \tau_{i,i-1}(x) dx + \\ & + \frac{\delta_i}{F_1 E_p} \int_0^x \tau_{i,i}(x) dx + \frac{k_1 \delta_{i-1} a_1^2}{I_1^3 E_p} \int_0^x \tau_{i,i-1}(x) dx + \\ & + \frac{k_1 \delta_i a_1^2}{I_1^3 E_p} \int_0^x \tau_{i,i}(x) dx - \frac{\delta_{i-1} b_1^2}{4I_1^r E_p} \int_0^x \tau_{i,i-1}(x) dx + \\ & + \frac{\delta_i b_1^2}{4I_1^r E_p} \int_0^x \tau_{i,i}(x) dx + \frac{\delta_{i-1} b_1^0}{2I_1^r E_p} \left[x \int_0^x p_{i,i-1}(x) dx - \right. \\ & \left. - \int_0^x x p_{i,i-1}(x) dx \right] - \frac{\delta_i b_1^0}{2I_1^r E_p} \left[x \int_0^x p_{i,i}(x) dx - \right. \\ & \left. - \int_0^x x p_{i,i}(x) dx \right]. \end{aligned}$$

字母上的附标代表肋和板的号数; 双重附标说明所讨论的截面位于那个肋和那个板之间。

① 原文为 $\frac{\delta b p}{2I_1^r E_p} \left[x \int_0^x p(x) dx - \int_0^x x p(x) dx \right]$ ——译者。

由于水平面内弯矩作用而沿纖維产生的曲率从下面条件求出

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M \textcircled{1}}{E \rho I^2}。$$

因水平面内弯曲所致的曲率:

由于切向力者为

$$\frac{\delta b \rho}{2 I_1^2 E_p} \int_0^x \tau(x) dx;$$

由于法向力者为

$$\frac{\delta}{I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x p(x) dx - \int_0^x x p(x) dx \right]。$$

除此以外, 由于肋受到扭转, 将产生一点附加的扭曲。在肋形结构中, 这种附加扭曲比起由弯矩所引起的基本变形来是微不足道的, 因此可以不計。計算管形結構时, 由于肋的扭转所引起的附加扭曲必須考慮在內。

第*i*号肋纖維在水平面內的計算曲率为:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{i,i-1}} = \frac{1}{\rho_{i,i}} = & \frac{\delta_{i-1} b \rho}{2 I_1^2 E_p} \int_0^x \tau_{i,i-1}(x) dx + \frac{b_i b \rho}{2 I_1^2 E_p} \int_0^x \tau_{i,i}(x) dx + \\ & + \frac{\delta_{i-1}}{I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x p_{i,i-1}(x) dx - \int_0^x x p_{i,i-1}(x) dx \right] - \\ & - \frac{\delta_i}{I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x p_{i,i}(x) dx - \int_0^x x p_{i,i}(x) dx \right]。 \end{aligned}$$

凸向右方的曲率作为正值。

由于切向力 $\tau(x) \cdot \delta$ 和法向力 $p(x) \cdot \delta$ 的作用所致的板的縱向侧面的变形用发龙氏解法求出, 这一方法在П. Ф. 巴浦郭維奇教授的著作內获得了发展。

① 原文为 $\frac{M}{E \rho I^2}$ 应改为 $\frac{M}{I^2 E_p}$ 誤。

板的縱向側面上切向力和法向力用三角級數表示:

$$\delta \tau(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \cos \frac{n\pi x}{l},$$

$$\delta p(x) = \delta \sum_{n=1}^{\infty} \beta \sin \frac{n\pi x}{l},$$

式中: $\gamma = \frac{2}{l} \int_0^l \tau(x) \cos \frac{n\pi x}{l} dx,$

$$\beta = \frac{2}{l} \int_0^l p(x) \sin \frac{n\pi x}{l} dx.$$

同時板內應力用下列各式表示:

1. 在縱向側面上所加荷載為與 x 軸成對稱的情形:

a) 由於切向力 $\tau(x) \cdot \delta$ 所引起者 (圖3, 參見第12頁):

$$X_x = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \theta(n, y) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$Y_y = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \varphi(n, y) \sin \frac{n\pi x}{l},$$

$$X_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma \chi(n, y) \cos \frac{n\pi x}{l},$$

式中:

$$\theta(n, y) = \frac{(4 \operatorname{ch} u_n - 2 u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} + 2 \frac{n\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n},$$

$$\varphi(n, y) = \frac{2u_n \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \operatorname{sh} u_n - 2 \frac{n\pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l} \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n},$$

$$\chi(n, y) = \frac{2 \frac{n\pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n\pi y}{l} \operatorname{ch} u_n + (2 \operatorname{ch} u_n - 2u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh} \frac{n\pi y}{l}}{\operatorname{sh} 2u_n + 2u_n},$$

$$u_n = \frac{n\pi \delta n\pi}{2l};$$

6) 由于法向力 $p(x) \cdot \delta$ 所引起者 (图 3, 6)

$$X_x = \sum_{n=1}^{\infty} \beta \eta(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$Y_y = \sum_{n=1}^{\infty} \beta \psi(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$X_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \beta \xi(n, y) \cos \frac{n \pi x}{l},$$

式中:

$$\eta(n, y) = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n - 2 u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} + 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n + 2 u_n}$$

$$\psi(n, y) = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n + 2 u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} - 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n + 2 u_n}$$

$$\xi(n, y) = \frac{2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n - 2 u_n \operatorname{ch} u_n \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l}}{\operatorname{sh} 2 u_n + 2 u_n}$$

2. 在纵向侧面上所加荷载为与 x 轴成逆对称的情形:

a) 由于切向力 $\tau(x) \cdot \delta$ 所引起者 (图 4, a 见第 12 页)

$$X_x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma} \bar{\theta}(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$Y_y = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma} \bar{\varphi}(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$X_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma} \bar{\chi}(n, y) \cos \frac{n \pi x}{l},$$

式中:

$$\bar{\theta}(n, y) = \frac{(4 \operatorname{sh} u_n - 2 u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} + 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n}$$

$$\bar{\varphi}(n, y) = \frac{2 u_n \operatorname{ch} u_n \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} - 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n}$$

$$\bar{\chi}(n, y) = \frac{(2 \operatorname{sh} u_n - 2 u_n \operatorname{ch} u_n) \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} + 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n}$$

6) 由于法向力 $p(x) \cdot \delta$ 所引起者 (图 4, 6)

$$X_x = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta} \bar{\eta}(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$Y_y = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta} \bar{\psi}(n, y) \sin \frac{n \pi x}{l},$$

$$X_y = - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta} \bar{\xi}(n, y) \cos \frac{n \pi x}{l},$$

式中:

$$\bar{\eta}(n, y) = \frac{(2 \operatorname{ch} u_n - 2 u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} + 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n}$$

$$\bar{\psi}(n, y) = \frac{(2 \operatorname{ch} u_n + 2 u_n \operatorname{sh} u_n) \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} - 2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} u_n}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n}$$

$$\bar{\xi}(n, y) = \frac{2 \frac{n \pi y}{l} \operatorname{sh} \frac{n \pi y}{l} \operatorname{ch} u_n - 2 u_n \operatorname{sh} u_n \operatorname{ch} \frac{n \pi y}{l}}{\operatorname{sh} 2 u_n - 2 u_n} \quad ①$$

$$u_n = \frac{n \pi \delta n \pi}{2l}$$

① 由于板的侧面上施加了切向力和法向力, 板内即产生应力。计算这些应力的公式的导出过程, 载在 И. Ф. 巴甫利维奇教授所著“弹性理论”内。国家国防工业出版社, 1939 年。

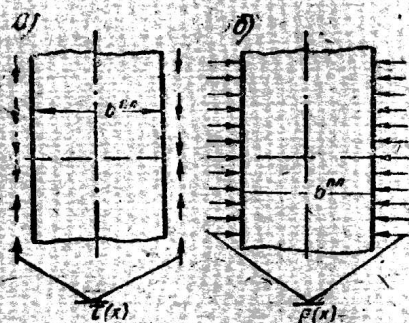


圖 3 板的縱向側面上的對稱荷載:

a—由於切向力 $\tau(x) \cdot \delta$;

b—由於法向力 $p(x) \cdot \delta$ 。

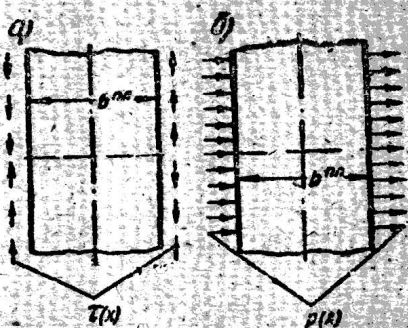


圖 4 板的縱向側面上的逆對稱荷載:

a—由於切向力 $\tau(x) \cdot \delta$;

b—由於法向力 $\bar{p}(x) \cdot \delta$ 。

板的兩個相反的側面上如受到不對稱荷載或單邊荷載時，可用對稱和逆對稱荷載的組合來代替。

我們採取對稱力與逆對稱力的方向在肋的右邊是相符的，在肋的左邊是相反的（圖 5）。

上面所列各公式適合於板的受荷載的側面上的邊界條件，並要求與受載面垂直的側面上沒有法向應力而有切向應力。在橋梁結構中，板的兩端雖有橫隔膜，但這種隔膜在水平方向是相當柔弱的，所以上面這些邊界條件是接近於真實情況的。如果要更為嚴格地適合板的不受荷載的側面上的邊界條件，對於計算結果影響不大，但卻大大增加計算的複雜程度。

第 i 號板受荷載的側面上位於厚度中部的纖維縱向變形，通過板內應力、板的彈性模量和波桑系數來表示。

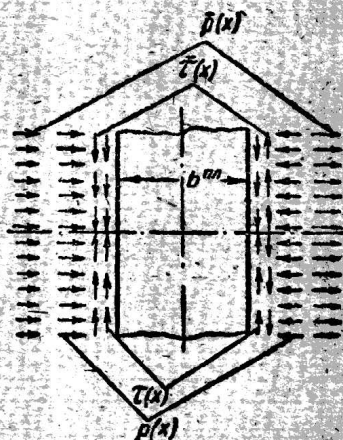


圖 5 作用在板的側面上的力的假定方向

或 $\Delta_{1,1} = \epsilon_{xx} = -\frac{1}{E_{nn}}(X_x - \mu Y_y)$

$$\begin{aligned} \Delta_{1,1} = & -\frac{1}{E_{nn}} \left[\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,1} \theta_1 \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \right. \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,1} \bar{\theta}_1 \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,1} \eta_1 \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,1} \bar{\eta}_1 \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,1} \sin \frac{n\pi x}{l} - \\ & \left. - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,1} \sin \frac{n\pi x}{l} \right]. \end{aligned}$$

网上纖維在水平面内的曲率可通过板内应力的导数来表示:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\partial \epsilon_{xx}}{\partial y} = \frac{1}{E_{nn}} \left(\frac{\partial X_x}{\partial y} - \mu \frac{\partial Y_y}{\partial y} \right)$$

或

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho_{1,1}} = & \frac{1}{E_{nn}} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,1} \frac{\partial \theta_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,1} \frac{\partial \bar{\theta}_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \right. \\ = & + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,1} \frac{\partial \varphi_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,1} \frac{\partial \bar{\varphi}_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \\ & + \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,1} \frac{\partial \eta_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,1} \frac{\partial \bar{\eta}_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \\ & \left. - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,1} \frac{\partial \psi_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,1} \frac{\partial \bar{\psi}_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} \right]. \end{aligned}$$

预先使肋和板的相应纖維的变形相等时, 每肋得出四个方程式:

$$\begin{aligned}
& \frac{N_1}{F_1 E_p} - \frac{M_1 a_1}{I_1^2 E_p} + \frac{\delta_{1,-1}}{E_p} \left[\frac{1}{F_1} + \frac{k_1 a_1^2}{I_1^3} \right] \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,i-1} - \bar{\gamma}_{1,i-1}) \cos \frac{n \pi x}{l} dx + \\
& + \frac{\delta_{1,1}}{E_p} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{k_1 a_1^2}{I_1^3} \right) \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,i} + \bar{\gamma}_{1,i}) \cos \frac{n \pi x}{l} dx + \\
& + \frac{\delta_{1,-1} \delta_1^p}{4 I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,i-1} - \bar{\gamma}_{1,i-1}) \cos \frac{n \pi x}{l} dx - \\
& - \frac{\delta_{1,1} \delta_1^p}{4 I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,i} + \bar{\gamma}_{1,i}) \cos \frac{n \pi x}{l} dx - \\
& - \frac{\delta_{1,-1} \delta_1^p}{2 I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,i-1} - \bar{\beta}_{1,i-1}) \sin \frac{n \pi x}{l} dx - \right. \\
& - \left. \int_0^x x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,i-1} - \bar{\beta}_{1,i-1}) \sin \frac{n \pi x}{l} dx \right] + \\
& + \frac{\delta_{1,1} \delta_1^p}{2 I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,i} + \bar{\beta}_{1,i}) \sin \frac{n \pi x}{l} dx - \right. \\
& - \left. \int_0^x x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,i} + \bar{\beta}_{1,i}) \sin \frac{n \pi x}{l} dx \right] = \\
& = \frac{1}{E_{nn}} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,i-1} \delta_{1,-1} \left(n, \frac{\delta_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l} + \right. \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,i-1} \delta_{1,-1} \left(n, \frac{\delta_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,i-1} \gamma_{1,-1} \left(n, \frac{\delta_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l} + \\
& + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,i-1} \bar{\gamma}_{1,-1} \left(n, \frac{\delta_{nn}}{2} \right) \sin \frac{n \pi x}{l} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,i-1} \sin \frac{n \pi x}{l} - \\
& \left. - \mu \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,i-1} \sin \frac{n \pi x}{l} \right]; \quad (1)
\end{aligned}$$

$$\frac{N_1}{F_1 E_p} - \frac{M_1 a_1}{I_1^2 E_p} + \frac{\delta_{1,-1}}{E_p} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{k_1 a_1^2}{I_1^3} \right) \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,i-1} - \bar{\gamma}_{1,i-1}) \cos \frac{n \pi x}{l} dx +$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\partial_1}{E_p} \left(\frac{1}{F_1} + \frac{a_1 a_1^2}{I_1^2} \right) \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,n} + \bar{\gamma}_{1,n}) \cos \frac{n\pi x}{l} dx - \\
& - \frac{\partial_{1-1} b_1^2}{4I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,n-1} - \bar{\gamma}_{1,n-1}) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \\
& + \frac{\partial_1 b_1^2}{4I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\gamma_{1,n} + \bar{\gamma}_{1,n}) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{\partial_{1-1} b_1^2}{2I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n-1} - \right. \\
& - \bar{\beta}_{1,n-1}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^x x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n-1} - \bar{\beta}_{1,n-1}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Big] - \\
& - \frac{\partial_1 b_1^2}{2I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n} + \bar{\beta}_{1,n}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^x x \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,n} + \right. \\
& + \bar{\beta}_{1,n}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Big] = \frac{1}{E_{na}} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,n} \partial_1 \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \right. \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,n} \bar{\partial}_1 \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,n} \gamma_{1,n} \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} - \\
& - \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,n} \bar{\gamma}_{1,n} \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \beta_{1,n} \sin \frac{n\pi x}{l} + \mu \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\beta}_{1,n} \sin \frac{n\pi x}{l} \Big]; (2) \\
& \frac{\partial_{1-1} b_1^2}{2I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (-\gamma_{1,n-1} + \bar{\gamma}_{1,n-1}) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{\partial_1 b_1^2}{2I_1^2 E_p} \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,n} + \\
& + \bar{\gamma}_{1,n}) \cos \frac{n\pi x}{l} dx + \frac{\partial_{1-1}}{I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n-1} - \bar{\beta}_{1,n-1}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \right. \\
& - \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n-1} - \bar{\beta}_{1,n-1}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Big] - \frac{\partial_1}{I_1^2 E_p} \left[x \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n} + \right. \\
& + \bar{\beta}_{1,n}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx - \int_0^x x \sum_{n=1}^{\infty} (\beta_{1,n} + \bar{\beta}_{1,n}) \sin \frac{n\pi x}{l} dx \Big] = \\
& = \frac{1}{E_{na}} \left[- \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_{1,n} \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\gamma}_{1,n} \frac{\partial \bar{\beta}_1}{\partial y} \left(n, \frac{b_{na}}{2} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} + \right.
\end{aligned}$$