考研辅导班指定用书

北京大学教授编著

2000年研究生入学考试复习指南与模拟试题

数学（经济学类）

北京大学数学科学学院教授 邵士敏 主编

北京大学出版社

考研辅导班指定用书

2000年研究生入学考试
复习指南与模拟试题
数学(经济学类)

主　编　邵士敏

撰稿人　邵士敏　娄元仁　文　丽

　　　　周建莹　庄大蔚　张立昂

北京大学出版社

北　京

图书在版编目(CIP)数据

2000年研究生入学考试复习指南与模拟试题 数学：经济学类/邵士敏主编. — 北京：北京大学出版社，1999.4

ISBN 7-301-04126-8

Ⅰ.20… Ⅱ.邵… Ⅲ.高等数学-研究生教育-入学考试-自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆CIP数据核字（1999）第10706号

书　　名：**2000年研究生入学考试复习指南与模拟试题 数学（经济学类）**
著作责任者：邵士敏
责 任 编 辑：刘金海
标 准 书 号：ISBN 7-301-04126-8/O·0438
出　版　者：北京大学出版社
地　　址：北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　址：http://cbs.pku.edu.cn/cbs.htm
电　　话：出版部62752015　发行部62754140　编辑室62752027
电 子 信 箱：zpup@pup.pku.edu.cn
印　刷　者：北京飞达印刷厂
发　行　者：北京大学出版社
经　销　者：新华书店
787毫米×1092毫米　16开本　10.75印张　270千字
1999年4月第一版　1999年4月第一次印刷
定　　价：16.00元

前　言

为了帮助参加研究生入学数学考试的考生复习和应考，我们按照教育部制定的全国经济学硕士研究生入学考试数学大纲的要求，编写了这本书.

本书包括“内容提要”与“模拟试题”两部分.“内容提要”部分叙述了数学大纲的全部内容，目的是为了帮助考生复习回忆要考的基本概念，基本定理和解题方法.“模拟试题”部分则对Ⅲ类、Ⅳ类(经济学类)数学，每类选编了4套题，共提供了8套模拟试题及解答.每套题中各部分所占比例及题型结构均按大纲的要求编排，题目内容基本上覆盖了大纲的要求.

在编写过程中，我们研究了数学大纲中对各部分内容要求的深度.“内容提要”侧重于叙述基本概念，基础知识，典型例题，并使之尽量符合大纲要求的深度.为了使“模拟试题”更接近实战的需要，我们参考了近几年的试题.并且在选题时，既注意选编一些基本题，也选一些较难的、需要经过思考的题，以提高考生的解题能力，使他们能较顺利地应考并进一步得到提高.本书中的概念、符号等均采用一般教科书的习惯用法，书中就不另作说明.

由于时间仓促，难免有疏误之处，望读者提出宝贵意见.

编　者

1999年3月于北京大学

主 编 简 介

邵士敏（女），北京大学数学科学学院教授。1953年毕业于上海复旦大学数学系，后到北京大学任教。曾担任过北大数学系高等数学教研室副主任、主任职务。1993年被评为北京市优秀教师，并获得集体优秀教学成果奖（主持人）。

1979年至1984年担任中央电视大学高等数学课主讲教师。编写了电大教材《高等数学讲义》，撰写了一系列与教学有关的文章，还为北大出版社合编了物理类高等数学习题课教材等。

目　　录

第一部分　内容提要

微积分

一　函数、极限、连续……1
二　一元函数微分学……7
三　一元函数积分学……17
四　多元函数微积分学……30
五　无穷级数……38
六　常微分方程与差分方程……42

线性代数

一　行列式……52
二　矩阵……54
三　向量……61
四　线性方程组……64
五　矩阵的特征值与特征向量……67
六　二次型……70

概率论与数理统计

一　随机事件和概率……73
二　随机变量及其概率分布……77
三　二维随机变量及其概率分布……81
四　随机变量的数字特征……84
五　大数定律和中心极限定理……88
六　数理统计的基本概念……89
七　参数估计……93
八　假设检验……98

第二部分　模拟试题

数学Ⅲ　模拟试题

数学Ⅲ　第1套题……104
数学Ⅲ　第2套题……107

数学Ⅲ　第 3 套题 ……………………………………………………………………110
数学Ⅲ　第 4 套题 ……………………………………………………………………113
数学Ⅲ　模拟试题解答
数学Ⅲ　第 1 套题解答 ………………………………………………………………116
数学Ⅲ　第 2 套题解答 ………………………………………………………………122
数学Ⅲ　第 3 套题解答 ………………………………………………………………127
数学Ⅲ　第 4 套题解答 ………………………………………………………………133
数学Ⅳ　模拟试题
数学Ⅳ　第 1 套题 ……………………………………………………………………140
数学Ⅳ　第 2 套题 ……………………………………………………………………143
数学Ⅳ　第 3 套题 ……………………………………………………………………145
数学Ⅳ　第 4 套题 ……………………………………………………………………147
数学Ⅳ　模拟试题解答
数学Ⅳ　第 1 套题解答 ………………………………………………………………149
数学Ⅳ　第 2 套题解答 ………………………………………………………………153
数学Ⅳ　第 3 套题解答 ………………………………………………………………157
数学Ⅳ　第 4 套题解答 ………………………………………………………………162

第一部分　内容提要

微　积　分

一　函数、极限、连续

1. 函数

(1) 函数的定义

设在同一过程中有两个变量 x、y, x 的变化域是 X. 若对 X 中每一个 x 值,依照某一规律,变量 y 都有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y=f(x),\quad x\in X.$$

x 称为自变量,y 称为因变量, X 称为函数的定义域. 因变量 y 的变化域称为函数的值域,可以记作

$$y=f(X)=\{y\mid y=f(x),\quad x\in X\}.$$

在函数定义中,应注意对应关系 f 和定义域 X, 它们是函数定义中的两个要素.

(2) 函数的图形

函数 $y=f(x)\quad(x\in X)$ 的图形是指点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),\quad x\in X\},$$

一般情形下,它是 xy 平面上的一条或几条曲线, 且任何一条平行于 y 轴的直线,与曲线 $y=f(x)$ 至多相交于一点.

(3) 函数的几种常见特性

有界性　若 $\exists\ M>0,\quad \ni\cdot\ |f(x)|\leqslant M,\quad \forall x\in X,$[①] 则称 $f(x)$ 在 X 上有界.

有界函数 $f(x)$ 的图形 $y=f(x)$ 的特点是它界于二直线 $y=M$ 与 $y=-M$ 之间.

奇偶性　设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$, 其中 X 关于原点对称(即:若 $x\in X$, 则 $-x\in X$).

若 $f(-x)=-f(x),\quad \forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的奇函数.

若 $f(-x)=f(x),\quad \forall x\in X$, 则称 $y=f(x)$ 为 X 上的偶函数.

奇函数的图形对称于原点,偶函数的图形对称于 y 轴.

单调性　若 $\forall x_1,\ x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\qquad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上单调上升(或单调下降). 此处的上升亦称递增,下降亦称递减.

若 $\forall x_1,\ x_2\in X$, 当 $x_1<x_2$ 时,有

$$f(x_1)<f(x_2)\qquad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2)),$$

则称 $y=f(x)$ 在 X 上严格单调上升(或严格单调下降).

---

① 符号 $\exists$ 表示"存在", $\ni\cdot$ 表示"使得", $\forall$ 表示"对于任意的",或"任给".

周期性 设有函数 $y=f(x)$, $x\in X$. 若 $\exists$ 常数 $T>0$, $\ni\cdot$ $\forall x\in X$, 都有 $x+T\in X$, 且有

$$f(x+T)=f(x),$$

则称 $f(x)$ 为周期函数, T 称为周期.

显然,任何周期函数都有无穷多个周期,若其中有一个最小的正数,则称它为最小正周期,亦称周期.

“周期”通常指最小正周期. 但周期函数未必都有最小正周期.

(4) 复合函数

设有函数

$$y=f(u) \qquad u\in U,$$

$$u=\varphi(x) \qquad x\in X \quad \text{值域为 } U',$$

若 $U'\subseteq U$, 则在 X 上确定了一个新函数

$$y=f[\varphi(x)] \qquad x\in X,$$

称为 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 的复合函数, u 称为中间变量.

(5) 反函数

设函数 $y=f(x)$ 的值域为 Y. 若对 Y 中每一个 y 值,都可由方程 $y=f(x)$ 唯一确定出 x 值,则得到一个定义在 Y 上的函数,称为 $y=f(x)$ 的反函数,记作

$$x=f^{-1}(y) \qquad y\in Y,$$

易知,严格单调函数必有反函数,并且其反函数也是严格单调的.

函数 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 与其反函数 $x=f^{-1}(y)$ $(y\in Y)$ 的图形相同.

在习惯上,为了强调对应规律 f^{-1}, 并将因变量仍记作 y, 通常将反函数写为

$$y=f^{-1}(x) \qquad x\in Y,$$

它的图形与 $y=f(x)$ $(x\in X)$ 的图形关于直线 $y=x$ 对称.

(6) 初等函数

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数,称为初等函数.

基本初等函数是指以下六类函数:常数函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数.

2. 极限

(1) 数列极限的定义

设有数列 $\{x_n\}$ 及常数 a. 若 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists$ 号码(即正整数) N, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n-a|<\varepsilon,$$

则称当 n 趋向于无穷时, $\{x_n\}$ 以 a 为极限,记作

$$\lim_{n\to+\infty} x_n=a,$$

或
$$x_n\to a \qquad (n\to+\infty).$$

“$n\to+\infty$”称为极限过程.

(2) 数列极限的几何意义

$\forall$点 a 的 ε 邻域 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, $\exists N$, 当 $n>N$ 时,所有的点

$$x_{N+1},\ x_{N+2},\ \cdots,\ x_n,\ \cdots$$

全部落在邻域 $(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$ 之内.

(3) 函数极限的定义

定义 1 ($\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 x 充分大时有定义，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\ni\cdot$ 当 $x>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于正无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to+\infty).$$

"$x\to+\infty$"称为极限过程．

可类似给出极限 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=A$ 的定义．

定义 2 ($\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在 $|x|$ 充分大时有定义，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists X>0$, $\ni\cdot$ 当 $|x|>X$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于无穷时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to\infty).$$

"$x\to\infty$"称为极限过程．

定义 3 ($\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 x_0 附近有定义(点 x_0 本身可能除外)，A 为常数．若 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\ni\cdot$ 当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称当 x 趋向于 x_0 时，$f(x)$ 以 A 为极限，记作

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A,$$

或

$$f(x)\to A\qquad(x\to x_0).$$

极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$ 的几何意义是：$\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 当点 $x\in(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$ 但 $x\neq x_0$

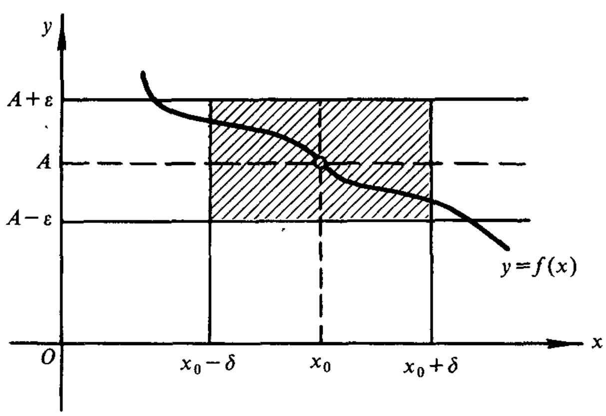

图 0-1-1

时,相应的点 $(x, f(x))$ 全部落在图 0-1-1的带形区域(图中带斜线部分)内.

定义 4 (右极限 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=A$) 设 $f(x)$ 在点 x_0 的右近旁有定义, A 为常数. 若 $\forall \varepsilon>0$, $\exists \delta>0$, ∍· 当 $0<x-x_0<\delta$ (即 $x_0<x<x_0+\delta$) 时,恒有

$$|f(x)-A|<\varepsilon,$$

则称 $f(x)$ 在点 x_0 处的右极限为 A, 记作

$$\lim_{x \to x_0+0} f(x)=A,$$

或

$$f(x) \to A \qquad (x \to x_0+0),$$

有时也记作 $f(x_0+0)=A$.

可类似定义左极限 $f(x_0-0)=\lim\limits_{x \to x_0-0}=A$.

左、右极限统称为单侧极限.

以上"$x \to x_0$"等,均称为极限过程.

(4) 定理 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)=A$.①

类似地有

$$\lim_{x \to \infty} f(x)=A \Longleftrightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x)=A.$$

(5) 无穷小量与无穷大量

定义 1 在某一极限过程中,以 0 为极限的变量(数列或函数)称为无穷小量.

无穷小量的阶的比较:

设 α, β 是同一极限过程中的两个无穷小量.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=K \neq 0$, 则称 α 与 β 是同阶(或同级)无穷小量. 特别地,

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=1$, 则称 α 与 β 是等价无穷小量,记作 $\alpha \sim \beta$.

若 $\lim \dfrac{\alpha}{\beta}=0$, 则称 α 是比 β 更高阶的无穷小量,记作

$$\alpha=o(\beta).$$

定义 2 设有数列$\{x_n\}$. 当 $n \to +\infty$ 时,若绝对值 $|x_n|$ 无限变大,即 $\forall M>0$, $\exists N$, ∍· 当 $n>N$ 时,恒有

$$|x_n|>M,$$

则称$\{x_n\}$当 $n \to +\infty$ 时为无穷大量,记作

$$\lim_{n \to +\infty} x_n=\infty.$$

可类似定义 $\lim\limits_{n \to +\infty} x_n=\pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\infty$,

以及 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=\pm\infty$, $\lim\limits_{x \to x_0 \pm 0} f(x)=\infty$, $\pm\infty$.

① 记号"$\Longleftrightarrow$"指充分必要条件.

(6) 极限的四则运算

定理 若 $\lim f(x)$ 和 $\lim g(x)$ 都存在，则

(i) $\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)$,

(ii) $\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)$,

特别地，$\lim K\cdot f(x)=K\lim f(x)$, K 为常数，

(iii) 当 $\lim g(x)\neq 0$ 时，有

$$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}.$$

(7) 极限存在准则

准则Ⅰ(夹逼定理) 若在点 x_0 的某邻域内(点 x_0 本身可能除外)恒有

$$f(x)\leqslant h(x)\leqslant g(x),$$

且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$,

则

$$\lim_{x\to x_0}h(x)=0.$$

夹逼定理的数列形式为：若 $\exists N$, $\ni\cdot$ 当 $n>N$ 时，恒有

$$x_n\leqslant z_n\leqslant y_n,$$

且 $\lim\limits_{n\to+\infty}x_n=\lim\limits_{n\to+\infty}y_n=A$,

则

$$\lim_{n\to+\infty}z_n=A.$$

准则Ⅱ 单调上升(或下降)且有上界(或下界)的数列必有极限.

(8) 两个重要极限

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1.$

(ii) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$

或

$$\lim_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=\mathrm{e}.$$

(9) 极限的不等式性质

(i) 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=B$, 且 $A<B$, 则必 $\exists$ 正数 r, $\ni\cdot$ 当 $0<|x-x_0|<r$ 时，恒有

$$f(x)<g(x).$$

(ii) 若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=A$, $\lim\limits_{x \to x_0} g(x)=B$, 且 ∃ 正数 r, ∍· 当 $0<|x-x_0|<r$ 时, 恒有 $f(x)<g(x)$, 则

$$A \leqslant B.$$

3. 连续性

(1) 函数在某一点处连续

定义 1 设 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 若极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处连续. 否则称 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续, 此时 x_0 称为 $f(x)$ 的间断点.

定义 2 若 $\lim\limits_{x \to x_0+0} f(x)=f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

可类似定义左连续. 左、右连续统称为单侧连续.

(2) 间断点的分类

(i) 可去(或可改)间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处无定义, 但极限 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在; 或 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义, 且 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ 存在, 但 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的可去间断点.

(ii) 第一类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限都存在, 但不相等: $f(x_0-0) \neq f(x_0+0)$, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第一类间断点.

可去间断点有时也称为第一类间断点.

(iii) 第二类间断点

若 $f(x)$ 在点 x_0 处的左、右极限至少有一个不存在, 则称 x_0 为 $f(x)$ 的第二类间断点.

(3) 函数在某一区间连续

定义 3 若 $f(x)$ 在区间 (a, b) 内每一点处都连续, 则称 $f(x)$ 在 (a, b) 内连续, 记作 $f \in C(a, b)$.

定义 4 若 $f \in C(a, b)$, 且在点 a 处右连续, 在点 b 处左连续, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上连续, 记作 $f \in C[a, b]$.

(4) 连续函数的运算

定理 1(四则运算) 若 $f(x)$, $g(x)$ 在点 x_0 处连续, 则

在点 x_0 处连续.

定理 2(复合函数的连续性) 设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x_0 处连续,且 $y=f(u)$ 在对应点 $u_0=\varphi(x_0)$ 处连续,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x_0 处连续.

定理 3(反函数的连续性) 若 $y=f(x)$ 在$[a, b]$上严格单调上升(或下降),并且连续,则其反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在值域区间$[f(a), f(b)]$(或$[f(b), f(a)]$)上也严格单调上升(或下降),并且连续.

对于开区间(a, b)或无穷区间,有类似定理.

(5) 初等函数的连续性

一切初等函数在各自的定义域内都是连续的.

(6) 闭区间上连续函数的性质

定理 1(最大值、最小值定理) 若 $f\in C[a, b]$,则 $f(x)$ 在$[a, b]$上有最大值和最小值,即 $\exists x_1, x_2\in[a, b]$, $\ni\cdot$ $f(x_1)=\max\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$, $f(x_2)=\min\limits_{x\in[a, b]}\{f(x)\}$.

推论 闭区间上的连续函数是有界的.

定理 2(中间值定理,或介值定理) 若 $f\in C[a, b]$,且 $f(a)\neq f(b)$, μ 是介于 $f(a)$ 与 $f(b)$ 之间的任一实数,则在(a, b)内部至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=\mu$.

推论 1(零点存在定理) 若 $f\in C[a, b]$,且 $f(a)\cdot f(b)<0$,则在(a, b)内部至少存在一点 ξ,使得 $f(\xi)=0$.

推论 2 若 $f\in C[a, b]$,则 $f(x)$ 可以取到介于其最大值 M 与最小值 m 之间的一切实数.

二 一元函数微分学

1. 导数与微分

(1) 导数的概念

定义 1 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 给 x_0 以改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$,使 $x_0+\Delta x$ 仍属于上述邻域,便得到 y 的相应改变量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$,作比值

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x},$$

令 $\Delta x\to 0$,若极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}$$

存在,则称此极限值为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的导数(或微商),记作

$$f'(x_0),\quad 或\ y'(x_0),\quad y'|_{x=x_0},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}.$$

这时,称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导.

几何意义 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处可导,就是曲线 $y=f(x)$ 在点 $M_0(x_0, f(x_0))$ 处有不垂直于 x 轴的一条切线,且此切线的斜率等于 $f'(x_0)$(图 0-1-2).

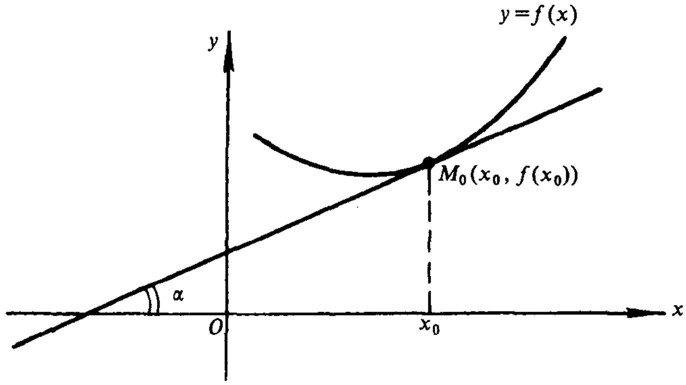

图 0-1-2

即 $$f'(x_0)=\tan\alpha \quad \left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}\right).$$

易知，曲线 $y=f(x)$ 在点 M_0 处的切线方程为

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)$$

法线方程为

$$y-y_0=\frac{1}{f'(x_0)}(x-x_0) \qquad (当\ f'(x_0)\neq 0).$$

定义 2 若 $y=f(x)$ 在开区间 X(有限或无穷)的每一点 x 处都可导，则在 X 内确定了一个新函数 $y'=f'(x)$，称为 $y=f(x)$ 的导函数.

(2) 可导与连续的关系

若 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导，则必在该点处连续.

(3) 单侧导数

左导数是指：$f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$，

右导数是指：$f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

左、右导数统称为单侧导数.

定理 $f(x)$ 在点 x_0 处可导 $\Longleftrightarrow f'_+(x_0)=f'_-(x_0)$.

(4) 导数的运算法则

(i) 四则运算法则

若 $u(x)$, $v(x)$ 在点 x 处可导，则它们的和、差、积、商(此时分母 $\neq 0$)在点 x 处可导，且有公式

$$[u(x)\pm v(x)]'=u'(x)\pm v'(x),$$
$$[u(x)\cdot v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x),$$

特别地，$[K\cdot u(x)]'=K\cdot u'(x)$　　K 为常数，

$$\left[\frac{u(x)}{v(x)}\right]'=\frac{u'(x)\cdot v(x)-u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)} \qquad v(x)\neq 0.$$

(ii) 复合函数求导法则

设 $y=f(u)$ 与 $u=\varphi(x)$ 构成复合函数 $y=f[\varphi(x)]$. 若 $u=\varphi(x)$ 在点 x 处可导, $y=f(u)$ 在对应点 $u(=\varphi(x))$ 处可导,则 $y=f[\varphi(x)]$ 在点 x 处可导,且有公式

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

(iii) 隐函数求导法则

若方程 $F(x, y)=0$ 确定 y 为 x 的可导函数,则可在恒等式 $F[x, y(x)]=0$ 两边对 x 求导(这时要用到复合函数求导法则),再解出 y' 即可.

(iv) 反函数求导法则

若函数 $y=f(x)$ 在开区间 X(有限或无穷)内严格单调,并且连续;又, $y=f(x)$ 在 X 的点 x_0 处可导,且 $f'(x_0)\neq 0$, 则 $y=f(x)$ 的反函数 $x=f^{-1}(y)$ 在对应点 $y_0(y_0=f(x_0))$ 处可导,且有公式

$$\left.\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\right|_{y=y_0}=\frac{1}{f'(x_0)}.$$

(5) 导数的基本公式

$$C'=0 \qquad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$$

$$(a^x)'=a^x\ln a \qquad (\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$$

$$(\mathrm{e}^x)'=\mathrm{e}^x \qquad (\ln x)'=\frac{1}{x}$$

$$(\sin x)'=\cos x \qquad (\cos x)'=-\sin x$$

$$(\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x} \qquad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (\arccos x)'=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$(\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \qquad (\mathrm{arc}\cot x)'=-\frac{1}{1+x^2}.$$

(6) 高阶导数

设 $y=f(x)$ 在区间 X 内存在导函数 $y'=f'(x)$. 若 $f'(x)$ 在点 $x_0\in X$ 处可导,则称此导数为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的二阶导数,记作

$$f''(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x},$$

或 $y''(x_0)$, $\left.\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}$.

可类似定义 $f(x)$ 在点 x_0 处的 n 阶导数

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f^{(n-1)}(x_0+\Delta x)-f^{(n-1)}(x_0)}{\Delta x}.$$

一阶、二阶导数的物理意义:设物体的运动规律为 $s=s(t)$, 则 $s'(t)=v(t)$ 为物体的瞬时速度, $s''(t)=v'(t)=a(t)$ 为物体的瞬时加速度.

(7) 微分的概念

定义 设 $y=f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义. 给 x_0 以微小改变量 $\Delta x(\Delta x\neq 0)$, 使 $x_0+\Delta x$ 仍在上述邻域内,便得到

$$\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0),$$

若 ∃ 常数 A(与 Δx 无关), 使得

$$\Delta y=A\cdot\Delta x+o(\Delta x)\qquad(\text{当 }\Delta x\to 0),\tag{2.1}$$

则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微,且称 $A\cdot\Delta x$ 为 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的微分,记作

$$dy=A\cdot\Delta x,$$

或 $df(x_0)=A\cdot\Delta x.$

定理(可微与可导的关系) $y=f(x)$ 在点 x_0 处可微的充要条件是 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导,且 $A=f'(x_0)$, 即有

$$dy=f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

几何意义 在图 0-1-3 中, $f'(x_0)=\tan\alpha$, $\overline{PQ}=(\Delta x)\tan\alpha=f'(x_0)\cdot\Delta x=dy$, 这就是微分,它是切线纵坐标的改变量.

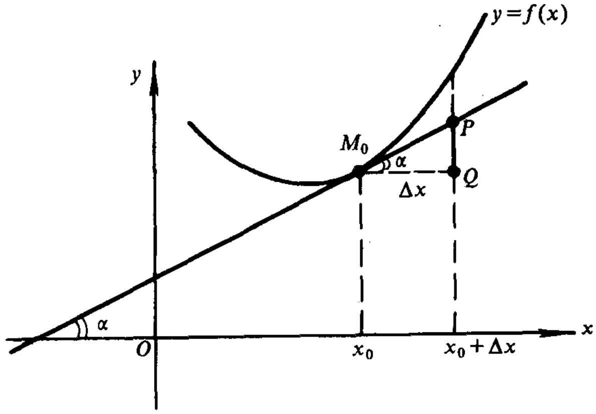

图 0-1-3

(8) 微分的计算

(i) 微分的基本公式

由 $\Delta x=dx$ 知

$$dC=0\qquad d(x^\alpha)=\alpha x^{\alpha-1}dx$$

$$d(a^x)=a^x\ln a\,dx\qquad d(\log_a x)=\frac{1}{x\ln a}dx$$

$$d(e^x)=e^x dx\qquad d(\ln x)=\frac{1}{x}dx$$

$$d(\sin x)=\cos x\,dx\qquad d(\cos x)=-\sin x\,dx$$

$$d(\tan x)=\frac{1}{\cos^2 x}dx\qquad d(\cot x)=-\frac{1}{\sin^2 x}dx$$

$$d(\arcsin x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx\qquad d(\arccos x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx$$

$$d(\arctan x)=\frac{1}{1+x^2}dx\qquad d(\operatorname{arccot} x)=-\frac{1}{1+x^2}dx$$