

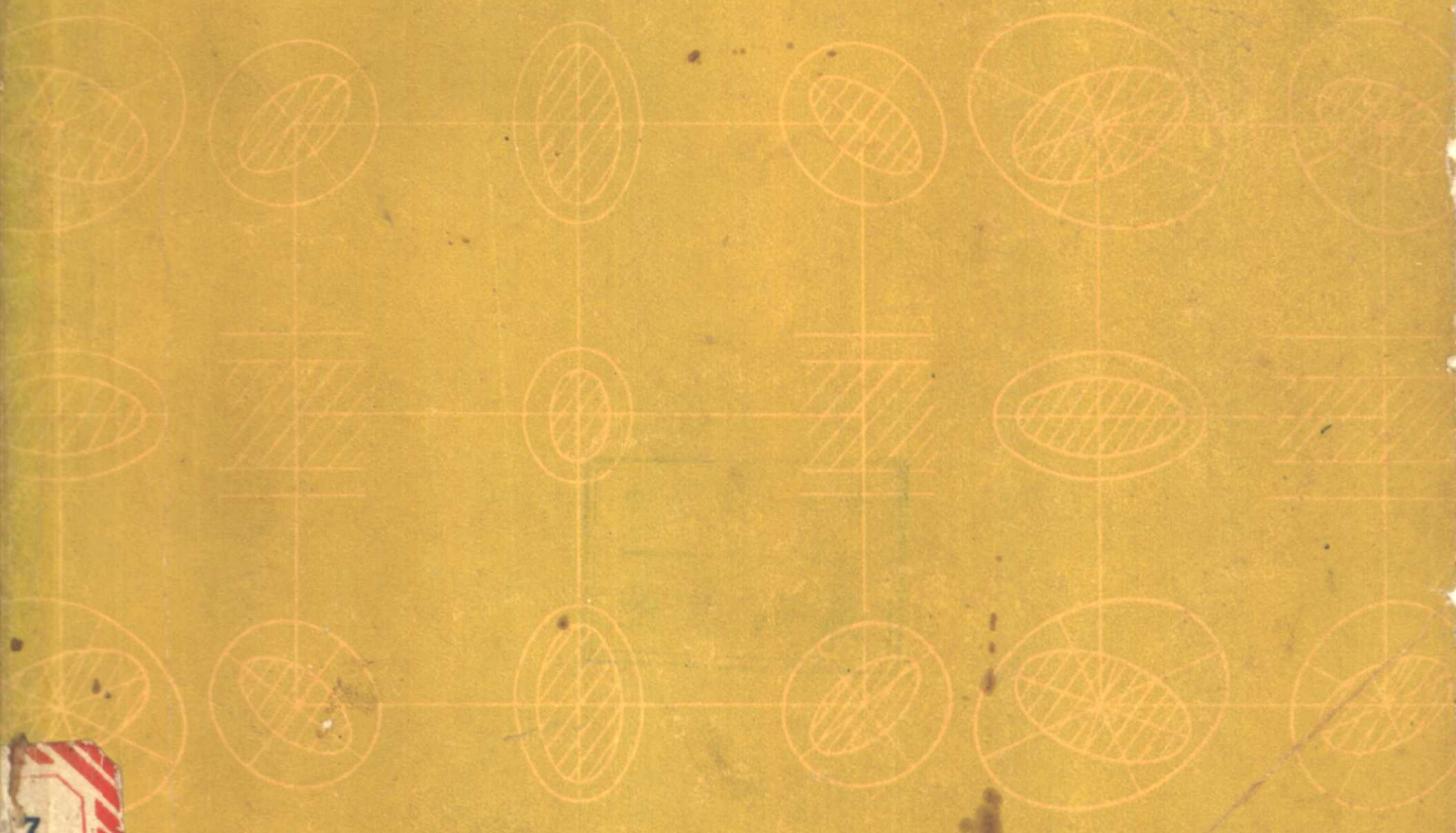
659846

高等院校研究生教材

# 误差处理和可靠性理论

——摄影测量平差的近代发展——

李德仁 著



测绘出版社

# **误差处理和可靠性理论**

**—摄影测量平差的近代发展—**

**李德仁 著**

**测绘出版社**

## 内 容 简 介

本书以作者在联邦德国斯图加特大学完成的博士论文为基础，系统地讲述了以数理统计理论为基础的测量平差系统的误差处理、假设检验和可靠性理论，介绍了当代摄影测量平差在理论和技术发展中的新成就和主要动向。如摄影测量和非摄影测量观测值的联合平差；最小二乘自动相关技术在空中三角测量中的应用；在线空中三角测量等。书中重点讨论了偶然误差的减小、系统误差的补偿、粗差的检测以及不同类型误差的区分等问题，它既有较完整的理论阐述，又有较具体的应用实例。为了便于读者深入研究，每章后均列出主要中外文参考文献。为了便于更好地理解本书，在附录中则补充了必要的矩阵代数和数理统计知识。本书虽是高等院校测绘专业研究生教学用书，亦可供摄影测量、大地测量和工程测量专业的科技人员与高等院校有关专业师生学习参考。

## 误差处理和可靠性理论

李德仁 著

\*

测绘出版社出版

测绘出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

\*

开本 787×1092 1/16 · 印张 21.5 · 字数 479 千字

1988 年 6 月第一版 · 1988 年 6 月第一次印刷

印数 0.001—1,500 册 · 定价 3.60 元

ISBN 7-5030-0048-1/P · 17

统一书号： 15039 · 新 502

## 前　　言

众所周知，摄影测量学是应用大地测量理论，采用摄影测量手段来测绘地形图而发展起来的一门学科。传统的摄影测量平差，在相当长的时期内，由于原始像片观测值的精度低( $20\sim50\mu m$ )，由于像片系统误差的存在和在航带中的累积，由于观测值粗差难于利用简单几何条件加以检测，再由于受计算工具的限制，人们只能采用近似的平差模型和小范围的分段平差办法，因而它只能为摄影测量测图提供必要的定向控制点，即仅局限于测图目的的应用，所以在平差处理上远不如大地测量平差那样严密。

然而，随着电子计算机的问世，随着计算技术和数据获取手段的发展，近二十多年来，摄影测量平差观测值不仅可以通过计算机控制的在线量测系统直接输入计算机，而且可以达到像片上几个微米的精度。从这个基础出发，在近景摄影测量、航空摄影测量到卫星摄影测量与遥感的广阔范围内，严格的平差模型，扩展的联合平差系统，顾及到系统误差补偿和粗差定位的平差方法，在线空中三角测量的质量控制和摄影测量平差系统的最优化设计等，都得到了具体的应用。

今日，摄影测量平差不仅用于测图目的，而且，在确保原始量测值高精度的前提下，亦可用于三、四等大地测量网加密、数字地籍测量、非地形摄影测量和变形测量等方面。卫星大地测量、地面大地测量、摄影测量和遥感信息的整体联合平差将使上述各学科在发展中更加紧密配合和日趋一致。当今平差理论的种种发展已日益深入到摄影测量学和遥感的各个领域，而摄影测量学的发展又在一定程度上推动了平差理论和实践的发展。在摄影测量领域中开展的误差处理和可靠性理论的研究正是这种特点的反映。

本书是根据作者多年来从事解析摄影测量平差研究工作，尤其是近两年多来赴联邦德国进修之所得，在所完成的博士论文基础上扩充而成。从处理不同类型的误差着手，叙述了平差的可靠性和可区分性理论，介绍了当代摄影测量平差技术发展的成就和动向，希望能对我国测量平差理论和实践的发展有所裨益。理论是针对一般测量平差系统的，而应用则主要针对摄影测量平差的，因此，本书既可作为高等院校测绘专业研究生用书，亦可供摄影测量专业、大地测量专业和工程测量专业人员和广大师生参考。

王之卓教授审阅了本书原稿，并提出许多宝贵意见，作者在此深表感谢。此外，本书中§5.6节的内容由郑肇葆副教授提供，在此亦致谢意。

由于作者水平限制，文中如有错误和不当之处，敬请读者批评指正。

著　者

1986年12月于武昌

# 目 录

<b>第一章 测量平差中的误差处理概述</b> .....	( 1 )
§1.1 数学模型和模型误差.....	( 1 )
一、函数模型和随机模型.....	( 1 )
二、统计学意义的误差(模型误差)与假设检验.....	( 1 )
三、测量学意义的误差(观测误差)及其分类.....	( 2 )
§1.2 测量平差中处理不同类型误差的发展阶段.....	( 4 )
<b>第二章 基于偶然误差的解析摄影测量平差的若干扩展</b> .....	( 6 )
§2.1 概述.....	( 6 )
一、电子计算机与摄影测量.....	( 6 )
二、空中三角测量发展的历史回顾.....	( 6 )
三、解析空中三角测量当前的现状和发展趋势.....	( 8 )
§2.2 摄影测量和非摄影测量观测值的联合平差.....	( 9 )
一、概述.....	( 9 )
二、较有代表性的联合平差系统.....	( 10 )
三、联合平差中各类观测值误差方程式的建立.....	( 12 )
四、联合平差中法方程式的构建和求解.....	( 20 )
五、目前的可能发展.....	( 26 )
六、导航数据在空中三角测量中的应用——联合平差的效果例一.....	( 29 )
七、利用 GPS 数据进行无地面控制的空中三角测量——联合平差的效果例二.....	( 33 )
八、用近景摄影测量方法测定大型冷却塔的形状——联合平差的效果例三.....	( 34 )
§2.3 方差-协方差分量估计及其在航测中的应用 .....	( 37 )
一、概述.....	( 37 )
二、方差分量估计的几种方法及其关系.....	( 38 )
三、赫尔默特型方差-协方差分量的估计 .....	( 50 )
四、验后方差估计的应用举例.....	( 53 )
§2.4 像片连接点的转刺.....	( 59 )
一、人工转刺点.....	( 59 )
二、标志化点.....	( 59 )
三、利用地面明显地物点(自然点) .....	( 60 )
四、利用转点仪转刺点.....	( 61 )

五、利用解析测图仪转点.....	( 63 )
六、利用高精度在线数字相关进行转点.....	( 65 )
<b>第三章 解析摄影测量平差中系统误差的补偿.....</b>	<b>( 71 )</b>
§3.1 摄影测量数据中的系统误差源.....	( 71 )
§3.2 补偿系统误差的方法分类.....	( 75 )
§3.3 试验场检校法.....	( 76 )
一、试验场的设立与试验场摄影.....	( 76 )
二、试验场检校法.....	( 76 )
三、与附加参数自检校法之精度比较.....	( 77 )
四、对该方法的评价.....	( 78 )
§3.4 利用附加参数的自检校法.....	( 78 )
一、基本解算过程.....	( 79 )
二、系统误差模型的选择.....	( 83 )
三、自检校平差的效果与信噪比.....	( 92 )
四、自检校区域网平差中各类观测值权的确定.....	( 95 )
五、对附加参数的统计检验.....	( 95 )
六、克服自检校平差中过度参数化的方法.....	( 102 )
七、对该方法的评价.....	( 107 )
§3.5 验后补偿法.....	( 108 )
一、验后补偿法的基本步骤.....	( 108 )
二、验后补偿法的效果.....	( 109 )
三、不同信噪比下验后补偿法的试验结果.....	( 110 )
四、对该方法的评价.....	( 111 )
§3.6 改善随机模型以顾及像片坐标误差的相关特性.....	( 111 )
一、系统误差的随机(相关)特性.....	( 111 )
二、同时改善平差函数模型和随机模型的自检校区域网平差.....	( 114 )
<b>第四章 摄影测量平差系统的可靠性理论.....</b>	<b>( 120 )</b>
§4.1 测量平差系统可靠性研究概述.....	( 120 )
一、可靠性研究的必要性.....	( 120 )
二、可靠性研究的发展概况.....	( 122 )
§4.2 观测值误差对平差改正数的影响.....	( 123 )
一、概述.....	( 123 )
二、观测值误差和改正数之间的关系.....	( 124 )
三、 $Q_{vv}P_{11}$ 矩阵的特性 .....	( 127 )
四、数据探测法(Data Snooping)的简单推导.....	( 128 )
五、粗差的估计.....	( 129 )
六、多余观测分量的计算方法.....	( 129 )

七、两个简单的例子.....	(130)
§4.3 测量平差结果可靠性的数理统计基础.....	(132)
一、概述.....	(132)
二、评价观测值的基本假设.....	(132)
三、统计假设检验.....	(135)
四、内部可靠性的概念.....	(139)
§4.4 单个备选假设下的可靠性理论.....	(141)
一、单个备选假设下的假设检验.....	(141)
二、单个备选假设下的内部可靠性理论.....	(146)
三、单个备选假设下的外部可靠性.....	(147)
四、测量平差系统内部和外部可靠性研究示例.....	(148)
§4.5 基本摄影测量平差问题的内部可靠性.....	(153)
一、研究的范围、基本假设和研究的方法.....	(153)
二、直线拟合的内部可靠性.....	(154)
三、空间后方交会的内部可靠性.....	(154)
四、相对定向的内部可靠性.....	(155)
五、单模型高程置平的内部可靠性.....	(157)
六、二维线性正形变换的内部可靠性.....	(161)
七、三维相似变换的内部可靠性.....	(162)
§4.6 摄影测量区域网平差的内部可靠性.....	(164)
一、概述及研究区域的几何条件.....	(164)
二、可靠性数值的模拟计算.....	(166)
三、摄影测量点的内部可靠性.....	(168)
四、控制点的内部可靠性.....	(172)
§4.7 摄影测量区域网平差的外部可靠性.....	(176)
一、概述.....	(176)
二、地面坐标未知数的外部可靠性.....	(176)
三、区域网平差之外部可靠性的基本特点.....	(178)
四、外部可靠性与区域网设计参数的关系.....	(180)
五、对区域网平差测区设计的建议.....	(183)
<b>第五章 粗差检测和定位.....</b>	(187)
§5.1 粗差定位及其方法分类.....	(187)
一、粗差定位的概念.....	(187)
二、方法分类.....	(187)
§5.2 粗差归入函数模型时的粗差检测方法.....	(188)
一、单个粗差的检测方法.....	(188)
二、多个粗差的检测方法.....	(190)

§5.3	粗差归入随机模型时的粗差定位方法	(192)
一、	选择权迭代法的基本思路	(192)
二、	Robust (稳健) 估计法原理简介	(194)
三、	从验后方差估计原理导出的选择权迭代法	(200)
四、	不同的选择权迭代法进行粗差定位的一个对比试验	(201)
§5.4	汉诺威大学光束法区域网平差程序 BLUH 中检测粗差的方法	(204)
一、	程序简介和基本结构	(204)
二、	程序中的粗差检测方法	(206)
§5.5	斯图加特大学独立模型法平差程序 PAT-M43 中的自动粗差 定位	(210)
一、	程序简介	(210)
二、	PAT-M43 中的自动粗差定位	(211)
§5.6	线性规划在粗差检测中的应用	(214)
一、	概述	(214)
二、	线性规划解求最佳可行解的基本思想	(214)
三、	单纯形法求最佳可行解的示例	(216)
四、	在解析摄影测量领域中的应用	(219)
§5.7	在线空中三角测量	(221)
一、	概述	(221)
二、	在线空中三角测量的发展过程	(221)
三、	在线空中三角测量系统的组成部分和基本功能	(222)
四、	在线空中三角测量算法的考虑	(224)
<b>第六章</b>	<b>两种模型误差可区分性的理论及其可靠性</b>	(229)
§6.1	问题的提出	(229)
§6.2	含两个多维备选假设时的假设检验	(231)
一、	两个多维备选假设的提出与统计检验量	(232)
二、	两个备选假设时的统计抉择和三类统计错误	(233)
§6.3	作为可区分性尺度的相关系数	(234)
一、	二次型检验量 $T_1$ 和 $T_2$ 之间的相关系数	(234)
二、	两个一维检验量 $w_1$ 和 $w_2$ 之间的相关系数	(235)
三、	相关系数 $\rho_{T_1, T_2}$ 和 $\rho_{w_1, w_2}$ 之关系	(235)
四、	两个多维备选假设之间的最大相关系数	(236)
五、	小结	(238)
§6.4	两个备选假设时检验的几何解释	(238)
一、	检验的几何解释	(239)
二、	两个检验量的相关系数与三类统计错误的概率	(240)
§6.5	可区分性放大倍数	(242)

一、相关系数上界值 $D_{\rho_1}$ 和 $D_{\rho_2}$ .....	( 242 )
二、非中心化参数的下界值 $\delta_{0,\rho_1}$ 和 $\delta_{0,\rho_2}$ .....	( 244 )
三、非中心化参数公共下界值和可区分性放大倍数.....	( 246 )
<b>§6.6 两个备选假设下的可靠性理论.....</b>	( 248 )
一、两个备选假设下的内部可靠性.....	( 248 )
二、两个备选假设下的外部可靠性.....	( 249 )
<b>§6.7 应用可能性.....</b>	( 250 )
<b>第七章 粗差和系统误差可区分性研究.....</b>	( 252 )
<b>§7.1 平面相似变换中粗差和系统误差的可区分性.....</b>	( 252 )
一、四点平面相似变换.....	( 252 )
二、四点组平面相似变换.....	( 256 )
<b>§7.2 单航带多项式平差时粗差和系统误差的可区分性.....</b>	( 259 )
一、五个控制点.....	( 259 )
二、六个控制点.....	( 260 )
三、十个控制点.....	( 265 )
四、六个双控制点.....	( 269 )
五、单航带多项式平差中粗差和系统误差可区分性与控制点数的关系.....	( 272 )
<b>§7.3 光束法区域网平差中控制点粗差和像片系统误差的可区分性.....</b>	( 273 )
一、研究中采用的公式和方法.....	( 273 )
二、控制点粗差和像片系统误差的相关系数和充分可区分性数值的计算结果.....	( 278 )
三、粗差和系统误差的可区分性与平差区域几何条件的关系.....	( 282 )
四、控制点坐标粗差和像片系统误差的可区分性与区域大小的关系.....	( 285 )
五、像点坐标粗差和像片系统误差的可区分性.....	( 286 )
六、小结.....	( 287 )
<b>第八章 粗差的可区分性(可定位性)研究.....</b>	( 289 )
<b>§8.1 研究粗差可定位性的方法.....</b>	( 289 )
<b>§8.2 基本摄影测量平差问题中粗差的可定位性.....</b>	( 290 )
一、立体像对的相对定向.....	( 290 )
二、平面相似变换.....	( 299 )
<b>§8.3 光束法区域网平差中控制点粗差的可定位性.....</b>	( 302 )
一、所研究光束法区域的几何条件.....	( 302 )
二、多个控制点坐标粗差的可发现性.....	( 302 )
三、控制点坐标粗差的可定位性.....	( 305 )
<b>附录 A 有关的矩阵代数知识.....</b>	( 309 )
<b>A.1 矩阵的秩.....</b>	( 309 )
<b>A.2 矩阵的迹.....</b>	( 309 )

A.3 特特征值和特征向量.....	( 309 )
A.4 广义特征值和特征向量.....	( 311 )
A.5 矩阵的分解.....	( 312 )
一、矩阵的秩分解.....	( 312 )
二、矩阵的三角形分解.....	( 312 )
三、对称方阵的谱分解.....	( 312 )
四、任意矩阵的奇异值分解.....	( 314 )
A.6 幂等矩阵.....	( 315 )
A.7 矩阵恒等式.....	( 317 )
A.8 矩阵的范数和状态.....	( 318 )
一、向量范数和矩阵范数.....	( 318 )
二、矩阵的状态.....	( 319 )
<b>附录 B 向量和矩阵的微分运算</b> .....	( 321 )
B.1 矩阵对变量的微分.....	( 321 )
B.2 函数对于向量的微分.....	( 321 )
B.3 矩阵的迹对于矩阵的偏导数.....	( 322 )
B.4 特殊函数的微分.....	( 323 )
<b>附录 C 非中心化的 <math>\chi^2</math> 分布和 F 分布</b> .....	( 324 )
C.1 $\chi^2$ 分布.....	( 324 )
C.2 非中心化 $\chi^2$ 分布 .....	( 324 )
C.3 F 分布 .....	( 326 )
C.4 非中心化 F 分布 .....	( 326 )
<b>附录 D 二次型及有关定理</b> .....	( 326 )
D.1 二次型定义.....	( 326 )
D.2 二次型及二次型矩阵的正定性.....	( 326 )
D.3 正定等的判别法.....	( 326 )
D.4 二次型定理.....	( 327 )
<b>附录 E 两个备选假设下出现第Ⅰ类、第Ⅱ类错误的概率表</b> .....	( 328 )

# 第一章 测量平差中的误差处理概述

## § 1.1 数学模型和模型误差

### 一、函数模型和随机模型

从所要研究的客观母体取得的一组观测值可以用来估计表征该客观母体的有关未知参数。在数理统计学中称之为参数估计，在测量学中则称之为平差。为此需要首先建立一个反映量测观测值和待求未知参数之间关系的数学模型。

观测值向量作为一组随机变量，可以用它的一阶矩（期望）和它的二阶中心矩（方差-协方差）来描述。其中描述观测值期望的模型通常称为**函数模型**，而描述观测值精度特性的模型称为**随机模型**，两者的结合则称为平差的数学模型。

对于满秩的高斯-马尔可夫线性（或线性化）模型有如下的定义：

假设  $A$  为已知的  $n \times u$  维系矩数阵（通常称为一级设计矩阵）， $x$  为  $u \times 1$  未知参数向量， $\mathbf{l}$  为  $n \times 1$  随机观测值向量，其方差-协方差矩阵为  $D(\mathbf{l}) = \sigma^2 \cdot P^{-1}$  ( $\sigma^2$  为单位权方差)，而且假设设计矩阵  $A$  为列满秩，即  $rg(A) = u$ ，权矩阵  $P$  为正定矩阵，于是存在下列满秩的高斯-马尔可夫线性模型：

$$E(\mathbf{l}) = Ax \quad \text{且} \quad D(\mathbf{l}) = \sigma^2 P^{-1} \quad (1-1-1)$$

该数学模型在国外之所以称为高斯-马尔可夫模型是因为：高斯（1809 年）利用似然函数由此模型导出最小二乘法，并随后（1823 年）指出它为最佳估值；马尔可夫（1912 年）利用最佳线性无偏估计估求该模型的参数。实际上这就是测量平差中的间接观测平差（平差标准问题 I）。平差的目的是由这一组观测值来求出未知参数的估值，并估计其精度。

### 二、统计学意义的误差（模型误差）与假设检验

从统计学意义讲，所谓模型误差可定义为所建立的模型（包括函数模型和随机模型）与客观现实之间的差异，用公式表示则为：

$$F_1 = M_0 - W \quad (1-1-2)$$

其中  $F_1$  —— 真模型误差，

$M_0$  —— 所利用的数学模型，

$W$  —— 未知的客观现实，且  $M_0 \neq W$ 。

如果从数理统计的检验理论把一个数学模型视为相对于客观现实的一个假设（零假设），则在模型确定时人们的出发点是使模型误差（既对于观测值的期望，也对于观测值的方差）为零。对零假设的检验，需要定义一个或多个备选假设。这样的备选假设通常总是企图使所建立的模型扩展得更加精确，从而减小模型误差。

由于客观现实  $W$  是未知的，人们只好用一个尽可能扩展和精化的数学模型来代替它。

于是，将所利用的模型  $M_0$  和该扩展精化了的模型  $M$  之间的差异定义为似真模型误差，对实际研究是有意义的：

$$F_2 = M_0 - M \quad (1-1-3)$$

我们可以将数学模型  $M$  尽可能地扩展和精化，使它与客观现实之差异变得很小 ( $M - W \rightarrow 0$ )。譬如对于自检校光束法平差，Schroth 在他的博士论文中就提出了一个函数模型和随机模型均经过扩展了的数学模型(见下文§3.6 节)。在这种前提下便得到

$$F_2 = M_0 - M = (M_0 - W) - (M - W) \cong M_0 - W. \quad (1-1-4)$$

于是我们可以从这样定义的模型误差出发进行其它的讨论。

在假设检验中所要统计检验的是：所利用的模型  $M_0$  (零假设  $H_0$ ) 和一个扩展了的模型  $M_1$  (备选假设  $H_1$ ) 之间的差异是否显著(见图 1-1-1)。如果  $M_1 = M_0$ ，则该模型是不可检验的。

当从两个备选假设中进行选择时所要统计区分的是：相对于原模型  $M_0$  提出的两个扩展了的模型  $M_1$  和  $M_2$  是否可以区分。此时  $M_1$  和  $M_2$  将作为备选假设相对于零假设  $M_0$  而提出。如果两个模型  $M_1$  和  $M_2$  完全相同，或者一个模型为另一个模型所包含，则它们是不可区分的(图 1-1-2)。

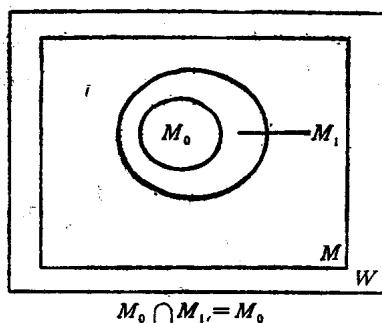


图 1-1-1

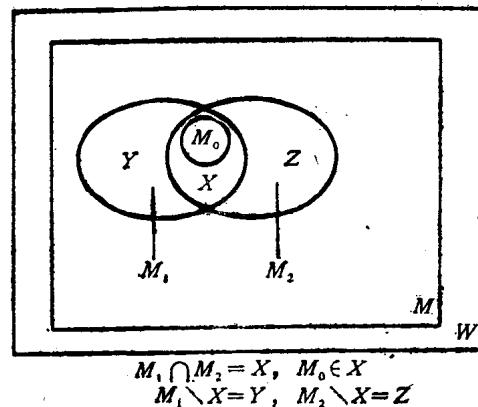


图 1-1-2

### 三、测量学意义的误差（观测误差）及其分类

长期以来在测量学领域内人们按照误差的大小、特性及产生误差的原因将它分成粗差、系统误差和偶然误差：

$$\epsilon = \epsilon_a + \epsilon_s + \epsilon_n \quad (1-1-4)$$

其中  $\epsilon$  ——总的观测误差；

$\epsilon_a$ ——粗差；

$\epsilon_s$ ——系统误差；

$\epsilon_n$ ——偶然误差。

比照前面的叙述显然存在

$$\epsilon \in F_2.$$

对于这里所说的三种类型误差，尽管在多年的测量实践中已习惯地如此分类，但是从统计理论的观点，并不存在一个普遍而又明确的定义，我们只能从不同的侧面来分析和将它们分类。

首先，这三种误差均可视为模型误差看待，并用下列的数学模型描述它们：

$$\boldsymbol{\varepsilon}_s = \mathbf{H}_s \mathbf{s} \quad \mathbf{s} \sim \mathbf{M}(\mathbf{s}_0, \mathbf{C}_{ss}) \quad (1-1-5a)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_a = \mathbf{H}_a \mathbf{v} \quad \mathbf{v} \sim \mathbf{M}(\mathbf{v}_0, \mathbf{C}_{av}) \quad (1-1-5b)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{I}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad \boldsymbol{\varepsilon}_n \sim \mathbf{M}(\mathbf{0}, \mathbf{C}_{nn}) \quad (1-1-5c)$$

其中  $\mathbf{M}(\mu, \mathbf{C})$  表示期望为  $\mu$ ，方差-协方差矩阵为  $\mathbf{C}$  的任一分布；而矩阵  $\mathbf{H}_s$ 、 $\mathbf{H}_a$  和  $\mathbf{I}_n$  决定系统误差，粗差和偶然误差对观测值的影响。这三个系数矩阵的特性是各不相同的(图 1-1-3)：

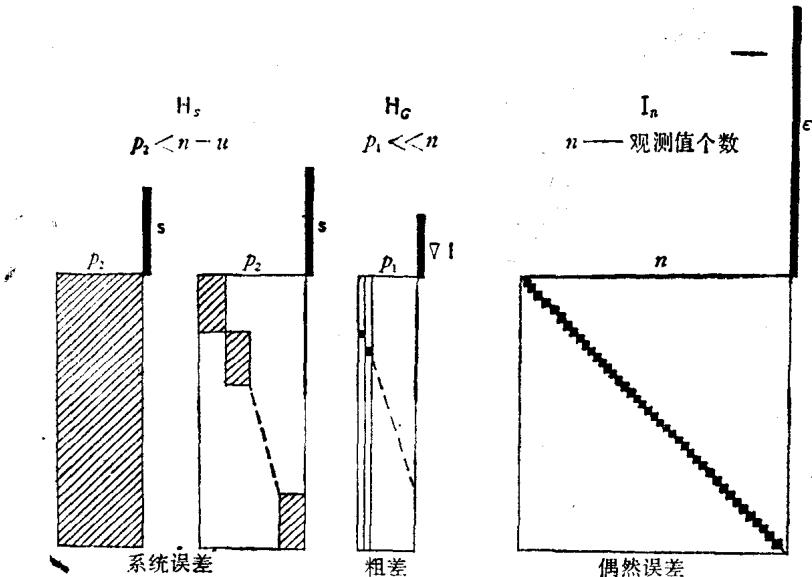


图 1-1-3 不同类型观测误差的系数矩阵

——系统误差的系数矩阵元素是完全被占有或一组组地完全占有。系数矩阵中元素通常是位置和时间的函数。譬如，当附加参数视为区域不变量时，则系数矩阵  $\mathbf{H}_s$  被全部占有；当附加参数处理成航带不变量时，则系数矩阵成组被占有，而像片系统误差为像点坐标  $(x, y)$  的函数。

——粗差的系数矩阵  $\mathbf{H}_a$  为稀疏占有，通常每一列只有一个或少数几个非零元素。对于  $p_1$  个数量不同的粗差，有

$$\mathbf{H}_a = (\mathbf{e}_{i+1}, \mathbf{e}_{i+2}, \dots, \mathbf{e}_{i+p_1}) \quad (1-1-6)$$

式中

$$\mathbf{e}_i^T = (0, 0, \dots, 0, 1, 0, \dots 0) \quad (\text{仅第 } i \text{ 个元素为 } 1)$$

——偶然误差具有一个对角线（通常为单位）矩阵。

现在再来看看它们的方差-协方差矩阵。首先对于偶然误差， $\mathbf{C}_{nn}$  为非零矩阵，这是众所周知的。

系统误差可以仅视为函数模型的误差( $s = s_0, C_{ss} = 0$ )或仅视为随机模型的误差( $s = 0, C_{ss} \neq 0$ )，当然也可以同时作为随机模型和函数模型的误差处理(见式(1-1-5a))。

粗差在判断可靠性时总是被作为函数模型的误差而考虑的( $\nabla l \neq 0, C_{\alpha\alpha} = 0$ )，而在粗差定位时，则最好被作为随机模型的误差来考虑，这样处理有利于粗差的有效发现和改正。

此外，还可以从产生误差的原因来区分这三类误差。在数据获得过程中带来的系统误差是由某种物理的、机械的、技术的、仪器的或作业员的原因而造成的，通常它是有一定的规律，或者有规则地变动着。粗差是在数据获得、数据传送和数据加工过程中，由于不规则的差错而造成的，而且它不再可能作为可接受的观测值为所假定或所估计的误差模型采用。至于偶然误差，它也是由观测条件(所使用的仪器、外界条件和观测者)引起的，但是它与系统误差不同，在大小和符号上没有规律性，只有大量误差的总体，才具有一定的统计规律。

## § 1.2 测量平差中处理不同类型误差的发展阶段

经典的大地测量和摄影测量平差是从观测值仅包含偶然误差出发的。目前的发展趋向是在平差中如何更好地考虑可能存在的粗差和系统误差，以便有效地确保平差结果的精度和可靠性。对于摄影测量平差而言，顾及不同类型的观测误差，平差数学模型的发展分为四个阶段。

### 第一阶段 假定 $\varepsilon_s = 0, \varepsilon_a = 0$ 和 $\varepsilon_r \neq 0$

以此为出发点，平差的任务就在于：

——寻找最严密的解，即寻找最广泛的严格的函数模型，并且编制计算机实用程序。譬如空中三角测量中采用光束法和独立模型法的严格数学模型，又譬如摄影测量与非摄影测量数据的联合平差等等。

——研究平差结果的理论精度，从而为网的设计给出有价值的建议。

——估计观测值的精度特性，如方差-协方差分量估计。

对于解析摄影测量，此阶段大约从1957年到七十年代初期。在此阶段中，粗差必须通过对观测值的必要的细心，并对作业员在量测仪器和量测方法方面进行有目的的培训而避免。在平差中则通过一些简单的方法进行检核，利用人工的方法挑出粗差。这种方法除了作业上的困难外，平差结果往往取决于作业员的认真细心和理论知识水平。而且用简单的检验方法不可能发现观测值的小粗差。

在此阶段中，为了补偿系统误差，人们只能预先通过检校来提供系统误差改正的有关参数或者编排一些特殊的量测顺序和量测方法来消除系统误差的影响。

关于此阶段研究的新发展将在第二章叙述。

### 第二阶段 假定 $\varepsilon_a = 0, \varepsilon_r \neq 0, \varepsilon_s \neq 0$

在平差中同时处理偶然误差和系统误差。在摄影测量平差首先考虑的便是未知的像片系统误差。处理的方法是将它们作为附加的未知参数引入平差，在解求未知数的同时，解

求特征系统误差的附加参数。当然也可以通过滤波配置和推估的方法来处理。

关于系统误差的补偿问题，将在第三章中叙述。这里可以肯定地指出，通过带附加参数的自检校平差完全可以有效地补偿像片系统误差的影响，从而使解析空中三角测量达到单位权中误差为 $3\sim 5\mu\text{m}$ 的高精度水平。平差程序PAT-B就是这类带附加参数的光束法区域网平差程序之一例。

### 第三阶段 假定 $\varepsilon_s = 0$ , $\varepsilon_a \neq 0$ , $\varepsilon_e \neq 0$ .

平差中同时处理偶然误差和粗差。在此阶段中人们的工作分两个方面：在理论研究方面是研究平差系统的可靠性——发现粗差的能力和不可发现的粗差对平差结果的影响。而在实用方面，乃是寻找有效地、自动地进行粗差定位的方法。这两方面的发展，下面将分别在第四、第五章叙述。我们可在这里先指出，通过对平差系统的理论可靠性的研究，已经可以为测区的最优化设计提供许多有益的要求和建议。通过自动粗差定位的探索，已经在一些实用程序中开始采用自动粗差定位方法，并已取得了人工挑错无法获得的功效。

以上第二阶段和第三阶段的发展大体上是并行的，约始于1967年，发展延续至今。

### 第四阶段 假定 $\varepsilon_s \neq 0$ , $\varepsilon_a \neq 0$ , $\varepsilon_e \neq 0$ .

这意味着在平差过程中同时处理所有三类可能出现的观测误差。这个问题的提出是很现实的，因为在实践中这三类误差往往就是同时存在的。这个阶段始于八十年代，现在仅处于理论研究时期。

在这一阶段中，必须从理论上提出区分不同模型误差的可区分性理论。这样两类不同的模型误差可以是不同的粗差，不同的系统误差或粗差和系统误差。利用可区分性理论，可以研究平差系统的理论可区分性，同样它可以为测区最优化设计提供必要的信息。实际上，这一阶段应寻找同时处理不同模型误差的平差方法，譬如在解析空中三角测量中应寻找同时补偿系统误差和消除粗差的方法。然而，这仍是一个有待研究解决的课题。模型误差的区分可能性理论并应用它来研究若干不同的平差系统中粗差和系统误差的区分或不同粗差间的区分的讨论，放在第六章以后。

## 本章参考文献

- [1] 李德仁: Theorie und Untersuchung der Trennbarkeit von groben Paßpunktfehlern und systematischen Bildfehlern bei der photogrammetrischen Punktbestimmung, Dissertation, Universität Stuttgart 1985
- [2] Koch, K.R.: Parameterschätzung und Hypothesentests in linearen Modellen, Dümmler-Verlag, Bonn 1980
- [3] Schroth, R: Ein erweitertes mathematisches Modell der Aerotriangulation zur hochgenauen Punktbestimmung, Dissertation, Inst. f. Photogrammetrie der Univ., Stuttgart, 1985

## 第二章 基于偶然误差的解析摄影 测量平差的若干扩展

### § 2.1 概述

#### 一、电子计算机与摄影测量

尽管早在 1901 年 Pulfrich 已发明了为摄影测量平差获得像片坐标观测值的立体坐标量测仪，但由于缺少有效的计算工具，用计算方法求解航空像片方位元素和进行空中三角测量的企图，至 1920 年之前基本上是没进展的。人们仅能在已知外方位元素的地面摄影测量中采用计算的方法测定目标点的位置。至电子计算机问世之前，空中三角测量基本上是停留在由少数几个模型组成的单航带，以模拟法、图解法或半解析法解求。至于航测成图，则全部采用模拟方式。

随着电子计算机的出现和发展，尤其是近二、三十年来，情况完全发生了变化。在摄影测量专业中，电子计算机首先应用于空中三角测量。在函数模型方面，从近似的航带法平差，发展到了独立模型法平差，以及从共线方程出发的严格光束法平差。从单一的摄影测量观测值平差发展到与非摄影测量观测值的联合平差。从单一的估求未知的定向和坐标参数，到同时估计观测值的误差特性——方差、协方差分量的估计。在模型误差的处理中，从单一的考虑偶然误差，发展到补偿系统误差和发现并改正粗差。

除了应用于空中三角测量外，电子计算机现在已深入到摄影测量的各个领域中，解析测图仪的问世，用数字导杆方式实现了空间点的交会，其取代模拟测图仪的发展趋势已为人所共知。计算机辅助的摄影测图系统，不仅减轻了作业员的劳动强度，而且实现了测量成果的数字化。而地面数字模型的发展，又将构成地形测量数据库的基础。利用计算机的自动影象相关，取代了人眼的立体观察功能，为摄影测量全自动化的实现创造了条件，随着在摄影测量领域内的自动判读，模式识别和目标分类的发展，终将有一天，摄影测量会成为自动数字图象处理的一个组成部分，成为一个动态的、实时的信息获取和处理系统。

总而言之，随着电子计算机的发展，摄影测量这门学科必将发生和已经正在发生一场翻天覆地的变化。

#### 二、空中三角测量发展的历史回顾

空中三角测量的方法完全取决于技术和计算工具的发展，可以将它区分为三个主要发展阶段：

第一阶段：辐射三角测量（1910~1960）

这种方法实质是将大地测量中的三角网平差方法用于摄影测量，主要指的是应用于小比例尺测图的图解辐射三角测量，另外还有并未真正广泛用于生产的数字辐射三角测量。只有利用滑动槽模片的机械辐射三角测量，由于它已是一种区域网平差法，而曾被成功地应用过(从 1935 年到 1960 年)。

辐射三角测量由于只能加密平面坐标，精度很低，又不可能在大的区域范围内应用，现已基本被淘汰，仅在个别补测点位时用到。

### 第二阶段：航带空中三角测量（自 1930～1970，我国直至今日）

这种方法的原理是用模拟或解析的方法重建航带。完全在模拟仪器上构建航带可采用多倍仪或是有正负基线的全能仪器，而且尽可能晚地由模拟方法转入计算方法，即尽可能地利用模拟仪器进行处理。半解析法的方法是通过在立体坐标量测仪量测的像点坐标，用近似方法进行相对定向和模型连接。

在实现由摄测坐标到大地坐标的转换过程中，是根据给出的控制点，用简单的数学方法进行非线性改正，可采用：

- 图解法改正；
- 机械法改正；
- 计算法改正(2 次或 3 次多项式)。

这种方法曾作为标准方法一直延用到五十年代。

到了六十年代，由于早期电子计算机的出现，解析航带空中三角测量首先发展起来，并扩展成为航带区域网平差，如加拿大国家研究委员会(NRC) 的 Schut 提出的航带法空中三角测量以及我国的航测加密作业方法。

这种方法的缺点在于理论近似，精度不高，不可能扩展到很大的区域，在发达国家现已不再采用。

但是它的出现使航测加密从模拟走向了解析，大约从 1970 年以后，一级精度的可供加密的全能型模拟测图仪便基本不再生产了。

这里还要提及用模拟计算机进行区域平差(1955～1965)的中间阶段。这种方法在当时电子计算机尚未发展完善的情况下曾短暂出现过，如国际摄影测量训练中心(ITC) Jerie 和法国国家地理院所提出的用于平面或高程区域网平差的模拟计算机，但随着数字计算技术的发展，很快便被淘汰了。

### 第三阶段：区域网平差的数字方法（自 1965 年至今）

其基本思想是采用严格的平差数学模型，从模拟处理阶段尽可能早地转入数字计算阶段，平差直接从所量测的像片像点坐标或模型坐标出发，不经过任何中间计算，直接进行严格的小二乘法平差。关于几种平差思想的对比见图 2-1-1。

基本计算单元为单个摄站所建立的光束(光束法平差)或单个模型(独立模型法平差)。前者直接从量测的像片像点坐标( $x, y$ )出发，后者则从量测或计算得到的模型坐标( $X, Y, Z$ )出发。

这种严格整体平差方法的实现乃是依赖于现代计算机和机算技术的发展。今天，无论对大型计算机或中小型计算机都编制有各种实用的解析区域网平差程序。