

高等学校经济、管理与理工科 **习题集** 第三分册
非数学专业必修数学基础课程

概率统计习题集

周概容 主编



南开大学出版社

GAILUTONGXITITJI

高等学校经济、管理与理工科
非数学专业必修数学基础课程

习题集第三分册

概率统计习题集

周概容 主 编

南开大学出版社

天 津

图书在版编目(CIP)数据

概率统计习题集 / 周概容主编. —天津:南开大学出版社, 2003. 11

ISBN 7-310-01978-4

I. 概... II. 周... III. ①概率论—高等学校—习题②数理统计—高等学校—习题 IV. 021-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 069656 号

出版发行 南开大学出版社

地址:天津市南开区卫津路 94 号 邮编:300071

营销部电话:(022)23508339 23500755

营销部传真:(022)23508542

邮购部电话:(022)23502200

出版人 肖占鹏

承印 南开大学印刷厂印刷

经销 全国各地新华书店

版次 2003 年 11 月第 1 版

印次 2003 年 11 月第 1 次印刷

开本 880mm×1230mm 1/32

印张 14

字数 403 千字

印数 1—4000

定价 22.00 元

内容提要

这一套习题集共三个分册：《微积分习题集》，《线性代数习题集》和《概率统计习题集》，面向高等学校经济和管理类各专业，以及理工类有关专业。

本册是按照经济和管理类各专业，以及理工类非数学专业通用的“概率论与数理统计”教材选编的，共收进概率论与数理统计的习题 1 550 道。题型有计算题、证明题和单项选择题。每一章由三部分构成：I. 概念、性质、公式，II. 习题，III. 参考答案和提示。

这一套习题集的读者对象是高等学校师生，主要是经济和管理门类各专业，以及理工科有关专业的师生；准备报考硕士研究生和 MBA 者。亦可供数学专业师生，以及应用概率统计的管理人员和工程技术人员参考使用。

前 言

这一套习题集,是按照高等学校经济和管理类各专业,以及理工科有关专业通用的教材选编的,包括《微积分习题集》,《线性代数习题集》和《概率统计习题集》等三个分册。微积分,线性代数和概率统计,是上述各专业必修的数学基础课程。

学习数学必须做一定数量的习题。做习题可以帮助学生正确地理解和牢固地掌握有关的概念、定理、公式与方法。不做一定数量的练习是学不好数学的,因为只有通过练习,才能更好地、真正地理解和掌握有关知识与方法,才能把书本上的东西转化为自己头脑里的东西。此外,许多习题本身就是一些有趣的和有利的性质与命题,有些习题又是有关知识和方法实际应用的范例,有些则有助于开阔学生的视野。因此,习题集是相应课程教程的一种必要的补充和拓展。

本习题集各章节的习题按“计算题”、“证明题”和“选择题”分别列出,其中选择题一律为单项选择题(即在所给出的四个选项中,只有一项符合题目的要求)。这符合当前一些考试(例如,研究生入学考试)题型的特点,而且容易将单项选择题改造成多项选择题。这样,这套习题集不但可以供学生学习相应的课程时使用,还可以供准备各种考试(例如,研究生入学考试)时使用。

概率论与数理统计,是研究随机现象的数学学科,与其他数学学科比较,其研究方法和思维方式都独有特色、别具一格。解概率论与数理统计习题,不但要善于选择和运用有关概念与公式,而且需要一定的直观想象力与判断力。这正是解概率统计习题的难点所在。

第三分册——概率统计习题集,共收集了各类习题 1 550 道。这些习题是编者多年从事概率统计的教学和研究中搜集并积累的,特别是本人在 1987—2003 年的 17 年参与“全国硕士研究生入学统一考试命题组”期间积累的试题和备用题,其中包括许多新编制的题。习题的选编,参照高等

学校经济、管理和理工科非数学专业必修的数学基础课程的通用教材，以及参照“全国硕士研究生入学统一考试”《数学考试大纲》。此外，选题特别注意搜集实际应用题，回避“纯数学”的难题。本书的大部分习题都是基本题，这类题在题型上有一定重复。也收进了部分有一定综合性的题。个别难度较大的习题标有星号“*”。所有计算题和选择题都有参考答案，其中有的还给出了提示，有些证明题也给出了提示。

本习题集的读者对象主要是高等学校经济、管理类专业，以及理工科非数学专业的师生。特别是对于准备报考硕士研究生和 MBA 者，这套习题集是难得的参考书。本书主要是面向一些应用性专业师生的，但由于本书只是回避了诸如“特征函数”等一些纯数学概念和方法，因此也可以供数学专业的学生参考使用。此外，还可供各级管理人员和工程技术人员参考使用。

参加本书编写工作的还有张建华（副主编），王健（副主编），李冠众，鞠英利，季红栋等。

周概容

2003 年于南开大学

目 录

第一章 随机事件与概率	(1)
I 概念、性质、公式	(1)
II 习题 1	(7)
§ 1.1 事件及其关系和运算	(7)
§ 1.2 古典型与几何型概率	(11)
§ 1.3 概率的性质和基本公式	(19)
§ 1.4 事件的独立性和独立试验	(27)
III 参考答案和提示	(32)
第二章 随机变量的概率分布	(40)
I 概念、性质、公式	(40)
II 习题 2	(47)
§ 2.1 一元随机变量的概率分布	(47)
§ 2.2 多元随机变量的联合概率分布	(60)
§ 2.3 随机变量的函数的概率分布	(72)
III 参考答案和提示	(83)
第三章 随机变量的数字特征	(107)
I 概念、性质、公式	(107)
II 习题 3	(114)
§ 3.1 随机变量的数学期望和方差	(114)
§ 3.2 随机变量的协方差和相关系数	(129)
§ 3.3 随机变量的矩、偏度和峰度	(140)
III 参考答案和提示	(148)
第四章 常用概率分布及其数字特征	(158)
I 概念、性质、公式	(158)
II 习题 4	(167)

§ 4.1	常用离散型概率分布及其数字特征·····	(167)
§ 4.2	常用连续型概率分布及其数字特征·····	(180)
§ 4.3	常用联合概率分布及其数字特征·····	(194)
III	参考答案和提示·····	(201)
第五章	中心极限定理和大数定律·····	(217)
I	概念、性质、公式·····	(217)
II	习题 5·····	(221)
§ 5.1	中心极限定理·····	(221)
§ 5.2	大数定律·····	(231)
* § 5.3	随机变量列的收敛性·····	(236)
III	参考答案和提示·····	(238)
第六章	数理统计的基本概念和抽样分布·····	(242)
I	概念、性质、公式·····	(242)
II	习题 6·····	(247)
§ 6.1	总体、样本和统计量·····	(247)
§ 6.2	正态总体的抽样分布·····	(256)
§ 6.3	其他抽样分布和极限抽样分布·····	(263)
III	参考答案和提示·····	(266)
第七章	参数估计·····	(272)
I	概念、性质、公式·····	(272)
II	习题 7·····	(279)
§ 7.1	总体参数的点估计·····	(279)
§ 7.2	正态总体参数的估计·····	(289)
§ 7.3	非正态总体参数的区间估计·····	(301)
III	参考答案和提示·····	(305)
第八章	假设检验与比较·····	(312)
I	概念、性质、公式·····	(312)
II	习题 8·····	(323)
§ 8.1	假设检验的基本概念和原理·····	(323)
§ 8.2	正态总体参数的假设检验·····	(326)

§ 8.3	比率的检验	(336)
§ 8.4	拟合优度 χ^2 检验	(340)
§ 8.5	样本齐一性检验 (χ^2 检验、游程检验、秩和检验、 符号检验)	(354)
III	参考答案和提示	(354)
第九章	相关分析、回归分析和方差分析	(360)
I	概念、性质、公式	(360)
II	习题 9	(371)
§ 9.1	相关分析 (正态相关分析、等级相关分析)	(371)
§ 9.2	回归分析 (一元线性回归分析、多元线性回归分析、 非线性回归分析)	(384)
§ 9.3	方差分析 (单因素方差分析、多因素方差分析)	(397)
III	参考答案和提示	(402)
常用概率统计数值表		(408)
附表 1	标准正态分布函数 $\Phi(x)$	(408)
附表 2	标准正态分布密度 $\varphi(x)$	(409)
附表 3	标准正态分布双侧分位数 u_α	(410)
附表 4	t 分布双侧分位数 $t_{\alpha, v}$	(411)
附表 5	χ^2 分布上侧概率 $p = P\{\chi^2 \geq c\}$	(412)
附表 6	χ^2 分布上侧分位数 $\chi_{\alpha, v}^2$	(413)
附表 7	F 分布上侧分位数 $F_\alpha(f_1, f_2)$	(415)
附表 8	正态总体之修正样本标准差 S 的数学期望和标准 差的系数	(420)
附表 9	正态总体之修正样本极差 R_n 的数学期望和标准差 的系数	(420)
附表 10	秩和检验的临界值 $w_\alpha(m, n)$	(421)
附表 11	游程总数的下和上临界值 $R_\alpha(m, n)$ 和 $R'_\alpha(m, n)$	(424)
附表 12	符号检验临界值 $S_{\alpha, N}$	(427)

附表 13	样本相关系数 $\hat{\rho}$ 的临界值 $r_{\alpha, v}$	(428)
附表 14	费歇耳变换 z 相关系数 r 的换算表	(429)
附表 15	斯皮尔曼等级相关系数 R_s 的上临界值 $r_{\alpha, n}$	(430)
附表 16	二项分布累计概率	(431)
附表 17	泊松分布累计概率	(433)
附表 18	均匀随机数	(435)
附表 19	标准正态随机数	(436)
参考书目		(437)

第一章 随机事件与概率

I 概念、性质、公式

一、事件及其运算

(一) 随机试验和事件

随机试验——对随机现象的观测。**基本事件**——试验最基本的结局；**基本事件空间**——所有基本事件的集合。**事件**——试验的每一种可能的结果；**必然事件** Ω ——每次试验中都肯定出现的事件；**不可能事件** ϕ ——任何一次试验中都不会出现的事件；**随机事件**——每次试验中既可能出现也可能不出现的事件，亦简称为事件。习惯上，用前面几个大写拉丁字母 $A, B, \dots$ 等表示事件。有时，用 $\{\dots\}$ 表示事件，大括号内用文字或式子表示事件的内容。

可以把基本事件空间 $\Omega = \{\omega\}$ 看成一个点集，把基本事件 ω 看成 $\Omega = \{\omega\}$ 中的一个点，把事件 A 视为 Ω 的子集，即 $A \subset \Omega$ ； $\omega \in A$ ——事件 A 出现， $\omega \notin A$ ——事件 A 未出现。

(二) 事件的关系和运算

1° $A \subset B$ ，表示“每当事件 A 出现时 B 也一定出现”，读做“事件 B 包含事件 A ”、“事件 A 导致事件 B ”。

2° $A = B$ ，表示“事件 A 和事件 B 要么都出现要么都不出现”、“事件 A 与事件 B 等价”。显然， $A = B$ 当且仅当 $A \subset B$ 且 $A \supset B$ 。

3° **不相容事件** A 和 B ——事件 A 和事件 B 不可能同时出现。

4° $\bar{A}$ ——事件 A 不出现，称做事件 A 的**对立事件**。 A 和 $\bar{A}$ 互为对

立事件.

5° $A \cup B$ 或 $A+B$ ——事件 A 与事件 B 至少出现一个, 称做事件 A 与事件 B 的**和或并**; $\bigcup_i A_i$ 或 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n + \cdots$ 表示 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 至少出现一个.

6° $A \setminus B$ 或 $A - B$ ——事件 A 出现但是事件 B 不出现, 称做“ A 与 B 的差”或“ A 减 B ”.

7° $A \cap B$ 或 AB ——事件 A 和事件 B 同时出现, 称做 A 和 B 的**交或积**; $\bigcap_i A_i$ 或 $A_1 A_2 \cdots A_n \cdots$ 表示事件同时出现.

8° **完全事件组** 称事件 $\{H_1, \dots, H_k, \dots\}$ 构成**完全事件组**, 如果
(1) $H_i H_j = \phi (i \neq j)$; (2) $H_1 + \cdots + H_k + \cdots = \Omega$.

(三) 事件运算的性质

对于任意事件 $A, B, C, A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$, 有

1° **交换律** $A+B=B+A$; $AB=BA$.

2° **结合律** $A+B+C=A+(B+C)=(A+B)+C$; $ABC=A(BC)=(AB)C$.

3° **分配律** $A(B+C)=AB+AC$; $A(B-C)=AB-AC$;

$$A(A_1 + \cdots + A_n + \cdots) = AA_1 + \cdots + AA_n + \cdots.$$

4° **对偶律** $\overline{A+B} = \overline{A} \overline{B}$; $\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}$;

$$\overline{A_1 + \cdots + A_n + \cdots} = \overline{A_1} \cdots \overline{A_n} \cdots;$$

$$\overline{A_1 \cdots A_n \cdots} = \overline{A_1} + \cdots + \overline{A_n} + \cdots.$$

二、事件的概率

概率——事件在试验中出现的可能性大小的数值度量. 通常用 $P(A)$ 表示事件 A 的概率. 假如用 $\{\dots\}$ 表示事件, 则以 $P\{\dots\}$ 表示其概率. 有以下几种确定事件概率的途径:

(1) **模型法**: 古典概型和几何概型;

(2) **频率法**: 用频率估计概率;

(3) **推算法**: 利用概率的性质和公式, 由较简单事件的概率推算较复杂事件的概率;

(4) **分布法**: 由随机变量的已知概率分布求与其相联系的事件的概率

(见本书第二章).

(一) 古典概型

假设试验的基本事件空间 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ 含有 N 个等可能基本事件, 事件 A 含有其中的 M 个基本事件: $\Omega = \{\omega_{j_1}, \dots, \omega_{j_M}\}$, 则

$$P(A) = \frac{A \text{ 所含基本事件的个数}}{\text{基本事件的总数}} = \frac{M}{N}. \quad (1.1)$$

【自有限总体的随机抽样】 考虑自含 N 个元素的总体 $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_N\}$ 的抽样, 假设每个元素被抽到的可能性都相同. 抽样区分“还原与非还原”、“有序与无序”, 各种情形的组合产生表 1.1 所列的四种不同的抽样方式.

表 1.1 四种抽样方式下不同抽法的总数

自含 N 个元素的总体 Ω 中 n 次简单随机抽样	抽 样 方 式		不 同 抽 法 的 总 数
	还 原	有 序	N^n
		无 序	C_{N+n-1}^n
	非还原	有 序	$P_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		无 序	C_N^n

【随机分配】 将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中, 区分每盒最多可以容纳一个和可以容纳任意多个质点, 以及质点可辨别和不可辨别等, 可以分为四种情形, 与其相对应有四种分配方式. 各种分配方式下不同分法的总数列入表 1.2.

表 1.2 四种分配方式下不同分法的总数

将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中	分 配 方 式		不 同 分 法 的 总 数
	每盒可容纳任意个质点	质点可辨	N^n
		质点不可辨	C_{N+n-1}^n
	每盒最多容纳一个质点	质点可辨	$P_N^n = N(N-1)\cdots(N-n+1)$
		质点不可辨	$C_N^n = P_N^n / n!$

将 n 个质点随机地分配到 N 个盒中, 相当于自总体 $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_N\}$ 的 n 次简单随机抽样: 每一个质点在 N 个盒中“随机地选一个盒”: “每盒可容纳任意多个质点”相当于“还原”, “每盒最多可以容纳一个质点”相当于“非还原”; “质点可辨别”相当于“有序”, “质点不可辨别”相当于“无序”.

(二) 几何概型

假设 Ω 是一线段、平面或空间的有界区域, $L(\Omega)$ 表示其几何度量. 考虑随机试验: 向 Ω 上投掷一质点, 假设(1) 质点落到 Ω 中的任何点都是可能的, 但不可能落到 Ω 之外; (2) 质点的落点在 Ω 中分布均匀: 质点落入 Ω 中的任何区域 A 的可能性只与其几何度量 $L(A)$ 有关, 并与之成正比. 简称这样的随机试验为“向区域 Ω 上均匀地掷随机点”. 对于 Ω 中的任何区域 $A \subset \Omega$, 考虑事件 $A = \{\text{质点落入区域 } A\}$, 则

$$P(A) = \frac{L(A)}{L(\Omega)}. \quad (1.2)$$

(三) 用频率估计概率

当试验次数充分大时, 用事件的频率来估计事件概率的值.

(四) 概率的公理

1° 非负性 任何事件 A 的概率都是非负的: $P(A) \geq 0$;

2° 规范性 必然事件的概率等于 1: $P(\Omega) = 1$;

3° 可加性 对于任意可数个两两不相容事件 $A_1, \dots, A_n, \dots$ ($A_i A_j = \emptyset, i \neq j$), 有

$$P(A_1 + \dots + A_n + \dots) = P(A_1) + \dots + P(A_n) + \dots.$$

(五) 概率的基本性质和运算法则

1° 不可能事件的概率 $P(\emptyset) = 0$.

2° 对立事件的概率 $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

3° 概率的减法公式 对于任意二事件 A 和 B , 有 $P(A - B) = P(A) - P(AB)$. 特别是, 若 $B \subset A$, 则 $P(A - B) = P(A) - P(B)$.

4° 概率的加法公式 对于任意事件 A, B, C , 有

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB);$$

5° 一般概率的加法公式 对于任意可数个事件 $A_1, \dots, A_n, \dots$, 有

$$P\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{i=1}^n P(A_i) - \sum_{i < j} P(A_i A_j) + \sum_{i < j < k} P(A_i A_j A_k) - \dots + (-1)^{n+1} P(A_1 \dots A_n).$$

6° 概率的半可加性* 设 $A_1, A_2, \dots$ 是任意有限或可数个事件, 则

$$P(A_1 + A_2 + \dots) \leq P(A_1) + P(A_2) + \dots.$$

三、条件概率和概率的基本公式

【条件概率定义】 设 A 和 B 是任意二事件, 其中 $P(A) > 0$. 称

$$P(B|A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \quad (1.3)$$

为“事件 B 在事件 A 出现的条件下的条件概率”, 简称“事件 B 关于 A 的条件概率”. 对于给定的事件 A , 条件概率 $P(B|A)$ 具有(无条件)概率的一切性质.

1. 乘法公式 对于概率不为 0 的任意二事件 A 和 B , 有

$$P(AB) = P(A)P(B|A) = P(B)P(A|B);$$

对于任意 m 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ [$P(A_1 A_2 \dots A_{m-1}) > 0$], 有(一般乘法公式)

$$P(A_1 A_2 \dots A_m) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 A_2) \dots P(A_m|A_1 \dots A_{m-1}). \quad (1.4)$$

2. 全概率公式 设 $\{H_1, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(A) = \sum_k P(AH_k) = \sum_k P(H_k)P(A|H_k). \quad (1.5)$$

3. 贝叶斯公式 设 $\{H_1, \dots, H_k, \dots\}$ 是完全事件组, 且 $P(H_k) > 0$, 则

$$P(H_k|A) = \frac{P(AH_k)}{P(A)} = \frac{P(A|H_k)P(H_k)}{\sum_j P(A|H_j)P(H_j)} \quad (k=1, 2, \dots). \quad (1.6)$$

四、事件的独立性和独立试验

(一) 概念

1. **二事件的独立性** 称二事件 A 和 B 相互独立, 如果 $P(AB)=P(A)P(B)$, 否则称二事件 A 和 B 不独立或相依.

2. **多事件的独立性** 称 n 个事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 相互独立, 如果它们之中任意 $m(2 \leq m \leq n)$ 个事件同时出现的概率, 等于这 m 个事件概率的乘积; 称事件 $A_1, A_2, \dots, A_n$ 两两独立, 如果它们之中任意两个事件独立.

3. **事件列的独立性** 称 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为独立事件列, 如果对于任意 $m(m \geq 2)$, 事件 $A_1, A_2, \dots, A_m$ 相互独立. 称事件列 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 为两两独立, 如果其中任意两个事件独立.

(二) 独立事件的性质

1° 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则其中任意 $m(2 \leq m \leq n)$ 个事件也相互独立.

2° 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则必两两独立, 但反之未必.

3° 若二事件 A 和 B 相互独立, 则 $\bar{A}$ 和 B , A 和 $\bar{B}$, $\bar{A}$ 和 $\bar{B}$ 也都相互独立.

4° 若事件 $A_1, A_2, \dots, A_n, \dots$ 相互独立, 则将它们之中任意 $m(1 \leq m \leq n)$ 个事件换成其对立事件后, 所得 n 个事件仍然相互独立.

(三) 独立试验

用拉丁字母 E 表示一个随机试验. 称 n 个随机试验 $E_1, E_2, \dots, E_n$ 为相互独立的, 如果分别与各试验有关的任何事件相互独立. **n 次独立重复试验**, 指在不变的条件下将同一试验 E 独立地重复做 n 次.

【 n 次伯努利试验成功的次数】 只计“成功”和“失败”两种结局的试验称做伯努利试验. 假设每次试验“成功”和“失败”的概率相应为 p 和 q , X 表示 n 次独立重复伯努利试验成功的次数, 则

$$P\{X=k\}=C_n^k p^k q^{n-k} \quad (k=0,1,\dots,n). \quad (1.7)$$

II 习题 1

§ 1.1 事件及其关系和运算

【计算题】

1.1 写出下列随机试验 E 的基本事件空间 Ω .

- (1) 设 E ——掷一枚硬币, 观察出现“正面”还是“反面”.
- (2) 设 E ——接连对同一目标射击, 直到恰好两次命中目标为止, 并观察射击的次数.
- (3) 设 E ——接连进行 n 次射击, 并观察命中目标的次数.
- (4) 设 E ——观察一台自动机床两次故障之间的时间间隔.
- (5) 设 E ——自集合 $\{0,1,2,3\}$ 的先后两次非还原抽样(非还原有次序).
- (6) 设 E ——从 $\Omega_0 = \{a,b,c,d,e\}$ 中随机地取出三个元素(非还原无次序).
- (7) 设 E ——按还原无次序取样(只记录出现的元素不计它们出现的次序)从 $\{a,b,c,d\}$ 中随机地取出三个元素.

1.2 考虑试验——对一生产线上的产品进行观察: 按下线的顺序一件一件地察看, 并记录察看结果, 直到连续发现两件不合格品或连续察看四件为止. 试描绘该试验的基本事件空间 Ω .

1.3 假设 A_1, A_2, A_3 是同一随机试验的三个事件. 试通过它们表示下列各事件:

- (1) 只有 A_1 出现;
- (2) 只有 A_1 和 A_3 出现;
- (3) A_1, A_2, A_3 都出现;
- (4) A_1, A_2, A_3 恰有一个出现;
- (5) A_1, A_2, A_3 至少有一个出现;
- (6) A_1, A_2, A_3 都不出现;
- (7) A_1, A_2, A_3 中恰有两个出现;
- (8) A_1, A_2, A_3 中最多两个出现.

1.4 设随机试验 E_0 只有两种可能的结局: 成功 A 和失败 $\bar{A}$; 随机试验 E : 把 E_0 一次接一次地重复做下去. 考虑 E 的下列事件: $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次}$