General Mathematical Texts for Undergraduate

大学公共数学系列教材

微积分（下册）

Calculus (Ⅱ)

武汉大学数学与统计学院

齐民友 主编

黄象鼎 姜明启 编

高等教育出版社

大学公共数学系列教材

微积分

（下册）

武汉大学数学与统计学院

齐民友　主编

黄象鼎　姜明启　编

高等教育出版社

HIGHER EDUCATION PRESS

图书在版编目（CIP）数据

微积分.下册/齐民友主编.—北京：高等教育出版社，2003.2
ISBN 7—04—011961—7

Ⅰ.微... Ⅱ.齐... Ⅲ.微积分—高等学校—教材
Ⅳ.0172

中国版本图书馆CIP数据核字（2003）第004381号

责任编辑：徐　可　　封面设计：王凌波
版式设计：杨　明　　责任印制：张小强

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010—64054588
社　　址	北京市东城区沙滩后街55号	免费咨询	800—810—0598
邮政编码	100009	网　　址	http://www.hep.edu.cn
传　　真	010—64014048		http://www.hep.com.cn
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷	北京市鑫鑫印刷厂		
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2003年2月第1版
印　　张	25	印　　次	2003年2月第1次印刷
字　　数	480 000	定　　价	28.00元

郑重声明

目　　录

第九章　向量代数与空间解析几何

本章之目的并不打算系统地去研究向量计算或空间解析几何所涉及的一般内容,而是为了本课程中讲解多元微积分理论作一些基础知识的准备.正如在上册中平面解析几何的基础知识对于一元微积分的讨论是不可缺少的一样,在后面的多元微积分的讨论中,空间解析几何的基础知识也是非常必要的.向量本身是现实世界中普遍存在的一类量,有必要对它的运算和性质加以讨论.同时,借助向量这个工具去讨论空间解析几何的问题时会显得更加简洁和便利,况且向量代数与解析几何两方面相互作用,使得它们各自在借助对方处理时会带来很大的简便.下面我们仅就这些内容当中最基本的方面展开一些讨论.

§9.1　向量的几何表示及其线性运算

9.1.1　向量与向量的几何表示

我们比较熟悉的量,如长度、面积、体积、质量、密度、功等,它们在取定某一单位后,可用一个数来表示,这种量称为**数量**(**标量或纯量**);有一类量,如速度、加速度、力、电场强度等,除了要用数值来表示它们的大小之外,还必须指出其在空间中的方向,这种既有大小,又有方向的量称为**向量**(或**矢量**).

通常用黑体字母(如 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{f}$、$\boldsymbol{s}$、$\boldsymbol{\theta}$ 等) 表示向量,也可用上方加有箭头的字母(如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{f}$、$\vec{s}$、$\vec{\theta}$ 等) 表示向量.

在几何上,往往用有向量线段$\overrightarrow{AB}$ 来表示向量 $\boldsymbol{a}$,A 为**起点**,B 为**终点**.其中线段 AB 的长度(指绝对值) 用来表示向量 $\boldsymbol{a}$ 的大小,所以向量的大小一定是非负的.$\overrightarrow{AB}$ 的方向则用来表示 $\boldsymbol{a}$ 的方向(图 9-1).

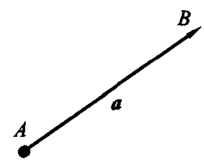

图 9-1

向量的大小又称为**向量的模**(或**向量的长度**).

向量$\overrightarrow{AB}$ 和 $\boldsymbol{a}$ 的模分别记为 $|\overrightarrow{AB}|$ 和 $|\boldsymbol{a}|$.

在向量代数中所讨论的向量是只考虑它的大小和方向,而不去关心它的起点究竟位于何处.即当向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小和方向都相同时,我们就说 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.例如图 9-2 中,$ABCD$ 为一平面四边形,则

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC},\quad \overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC},$$

即一个向量在保持其大小、方向都不变的条件下可以自由地平移(严格地说,我们此处所界定的向量应称为**自由向量**,下面我们也仅针对自由向量予以讨论).

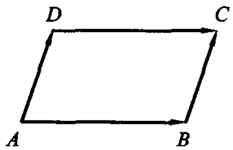

图 9 - 2

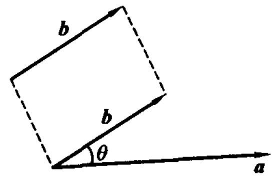

图 9 - 3

与向量 $\boldsymbol{a}$ 大小相等、方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**(或**反向量**),记作 $-\boldsymbol{a}$,模等于 1 的向量称为**单位向量**(或**幺矢**),模等于零的向量称为**零向量**,记作 $\mathbf{0}$.零向量没有确定的方向,为了以后讨论问题方便起见,我们规定零向量的方向可以任意选取.我们还可以这样规定两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角:将 $\boldsymbol{a}$ 或 $\boldsymbol{b}$ 平移使它们的起点重合后,它们所在的射线之间适合条件 $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$ 的夹角 θ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角(图 9 - 3),通常将 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$.并规定:零向量与其它向量的夹角可以在 $[0,\pi]$ 中任意取值.

9.1.2　向量的线性运算

在物理与力学中我们知道,两个力、两个速度等均能合成,得到合力与合速度,并且合力或合速度都符合平行四边形法则.依此背景出发,我们定义向量的**加法**如下:

设有向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,$\overrightarrow{AD} = \boldsymbol{b}$,以 AB、AD 为邻边作平行四边形 $ABCD$,则其对角线上的向量 $\overrightarrow{AC}$ 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}$(图 9 - 4).

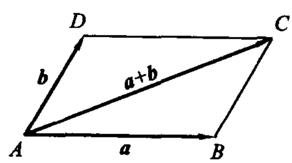

图 9 - 4

以上定义的向量的和的法则称为**平行四边形法则**.

请注意:此法则对两个平行向量的加法用起来不够方便,故我们再给出一个蕴含平行四边形法则的向量**加法**定义 —— **三角形法则**:

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$,任取一点 A,作 $\overrightarrow{AB} = \boldsymbol{a}$,再以 $\boldsymbol{a}$ 的终点 B 为起点,作

$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，连结 AC，则向量$\overrightarrow{AC}$很明显为向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和(图 9－5).

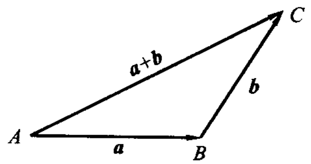

图 9－5

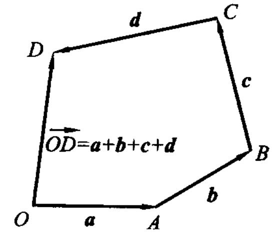

图 9－6

两个向量的加法的三角形法则可以推广到任意有限个向量的情形.这可以从某点 O 出发，作$\overrightarrow{OA}$ 等于第一个向量，然后将其余的向量依次首尾相接，最后，从第一个向量的起点 O 到最末一个向量的终点的向量就是这些向量的和(图 9－6).

显然 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$.即，任一向量 $\boldsymbol{a}$ 与零向量 $\boldsymbol{0}$ 的和仍为此向量 $\boldsymbol{a}$.

向量减法可定义为加法的逆运算，即若

$$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{b},$$

则向量 $\boldsymbol{c}$ 就定义为向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**差**，记为 $\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$.容易看到，

$$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}+(-\boldsymbol{a}),$$

即向量 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的反向量之和等于 $\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的差.

显然有：$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{0}-\boldsymbol{a}=-\boldsymbol{a}$.

下面，我们再来给出数与向量的乘法(简称**数乘**)的定义：

对任意的实数 λ 和向量 $\boldsymbol{a}$，我们定义 λ 与 $\boldsymbol{a}$ 的**乘积**(简称**数乘**)是一个向量，记作 $\lambda\boldsymbol{a}$，它的模与方向规定如下：

(1) $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

(2) 当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 同方向；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 反方向；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$.

如果非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角等于 0 或 π，我们称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **平行**(或称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ **共线**)，记作 $\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{b}$.因为零向量没有确定的方向，为方便起见，我们规定：零向量与任何向量平行.

由数乘定义，我们容易得到，对任一向量 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，及任意实数 $\lambda\neq0$，总有 $\lambda\boldsymbol{a}\parallel\boldsymbol{a}$；反过来，若向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，则当 $\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{0}$，$\boldsymbol{b}\neq\boldsymbol{0}$ 时，必存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.此时我们就有：**非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行的充分必要条件是存在实数 λ，使 $\boldsymbol{b}=\lambda\boldsymbol{a}$.**

有了数乘的概念后，对于向量 $\boldsymbol{a}$ 的负向量 $-\boldsymbol{a}$，也可以理解为 $(-1)\boldsymbol{a}$.同时，$\boldsymbol{b}-\boldsymbol{a}$ 也可理解为 $\boldsymbol{b}+(-1)\boldsymbol{a}$.另外，对于任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，总可以作出一个与它同向的单位向量：

$$a^0 = \frac{1}{|a|}a.$$

(容易知道，$|a^0| = \frac{1}{|a|}|a| = 1$)，通常称 a^0 为 a 的**单位化向量**，由此即有 $a = |a|a^0$，即任一非零向量都可以由它的单位化向量通过数乘来表示.

根据定义及几何作图法，可以验证向量的加法及数乘具有如下的基本运算规律：

1) $a + b = b + a$　(加法交换律)；

2) $(a + b) + c = a + (b + c)$　(加法结合律)；

3) $a + 0 = a$　(0 是加法的零元)；

4) $a + (-a) = 0$　($-a$ 是 a 的加法逆元)；

5) $1 \cdot a = a$　(1 是数乘的单位元)；

6) $\lambda(\mu a) = (\lambda\mu)a$　(数乘结合律)；

7) $(\lambda + \mu)a = \lambda a + \mu a$　(数乘分配律)；

8) $\lambda(a + b) = \lambda a + \lambda b$　(数乘分配律).

其中 a、b、c 是向量，λ、μ 是实数.

向量的加法及数乘满足上述运算规律，如此定义的向量的加法与数乘运算通常统称为向量的**线性运算**.

例 1　证明对角线互相平分的平面四边形是平行四边形.

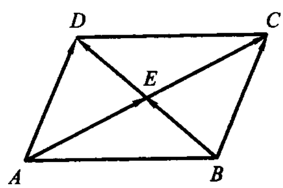

图 9－7

证　设平面四边形 $ABCD$ 的对角线相交于 E，如图 9－7 所示，由于

$$\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{EC}, \quad \overrightarrow{BE} = \overrightarrow{ED},$$

故 $\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{EC}$，即

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}.$$

这就说明线段 AD 与 BC 平行且长度相等，即四边形 $ABCD$ 是平行四边形.

习题 9.1

1. 在平行四边形 $ABCD$ 中，两条对角线的交点记为 O，设 $\overrightarrow{AB} = a$，$\overrightarrow{AD} = b$，试用 a 和 b 表示向量 $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$ 和 $\overrightarrow{CD}$.

2. 设 $\overrightarrow{AB} = a + 5b$，$\overrightarrow{BC} = -2a + 8b$，$\overrightarrow{CD} = 3(a - b)$，证明三点 A、B、D 在一条直线上.

3. 用向量法证明：三角形两边中点的连线平行于第三边，且长度等于第三边长度的一半.

4. 设 a，b 为任意两向量，试证：

(1) $|a + b| \leqslant |a| + |b|$；　(2) $|a - b| \leqslant |a| + |b|$；

(3) $|a| - |b| \leqslant |a + b|$；　(4) $|a| - |b| \leqslant |a - b|$.

§9.2 空间直角坐标系、向量的坐标

9.2.1 空间直角坐标系

解析几何的重要作用就是将抽象的数与具体的形结合起来，使得数与形之间互相渗透，互促发展而使得数学的内容显得如此的丰富和生动. 数轴的引入，使我们可以将数轴 Ox 上的任一点 M 与一个确定的实数 x（点 M 的坐标）相对应，且反之亦然；在平面解析几何中，通过引入两条垂直相交的数轴（x 轴和 y 轴）而建立的平面直角坐标系 xOy，又使得平面上的点 M 与二元有序数组 (x,y)（点 M 的坐标）之间产生了一一对应. 依此思路，我们自然地可以引入如下的空间直角坐标系：

在空间中取一定点 O，过点 O 作三条相互垂直的数轴（x 轴、y 轴和 z 轴），各数轴的原点都位于点 O，而且在三条数轴上都取相同的单位长度. 这样就建立了空间的一个直角坐标系 $Oxyz$，为确定计，我们还可以规定其中的 x 轴、y 轴和 z 轴的正方向符号**右手法则**：即以右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴正向转过 $\frac{\pi}{2}$ 角度后指向 y 轴正向时，竖起的大姆指的指向就恰好是 z 轴的正向（图 9－8）. 其中点 O 称为坐标原点，x 轴、y 轴和 z 轴也分别称为**横轴**、**纵轴**和**竖轴**，统称为**坐标轴**. 通过 x 轴和 y 轴的平面称为 xOy 平面，同理还有 yOz 平面和 zOx 平面，这三个平面常称为**坐标平面**. 三个坐标平面把整个空间分成八个部分，每一部分称为一个**卦限**. 八个卦限分别用罗马数字 Ⅰ、Ⅱ、…、Ⅷ 表示，它们的编号顺序是按 xOy 平面的第一、二、三、四象限上方部分分别编为第 Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ 卦限；对应地，在 xOy 平面下方部分依次编为 Ⅴ、Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ 卦限（图 9－9）.

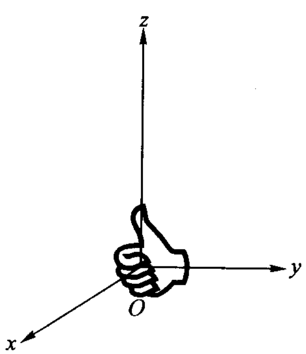

图 9－8

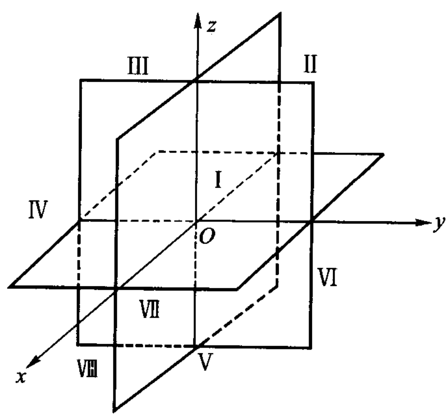

图 9－9

9.2.2　点和向量的投影

在空间中自点 A 向平面 π 作垂线，所得的垂足 A' 叫作点 A 在平面 π 上的**投影**(图 9 – 10).

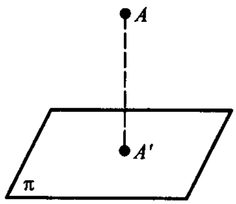

图 9 – 10

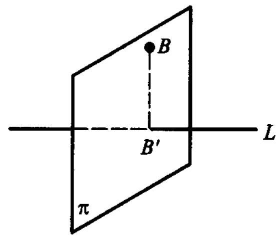

图 9 – 11

过空间一点 B 作平面 π 垂直于直线(或轴)L，相交于点 B'，称点 B' 为点 B 在 L 上的投影(图 9 – 11).

设 $\overrightarrow{AB}$ 是一空间向量，起点 A 和终点 B 在 u 轴上的投影分别为点 A' 和 B'，且 A' 和 B' 在 u 轴上的坐标分别是 u_A 和 u_B，则称向量 $\overrightarrow{A'B'}$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的**投影向量**(**或投影分量**)，同时称 $u_B - u_A$ 为向量 $\overrightarrow{AB}$ 在轴 u 上的**投影**，记为 $\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB}$，即

$$\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB} = u_B - u_A .$$

请注意：投影向量是一个向量，而投影则是一个数量，投影并不一定是投影向量的长度，因它可能取负值.

依此定义知，设 $\boldsymbol{e}$ 是与 u 轴同方向的单位向量，则有(图 9 – 12)

$$\overrightarrow{A'B'} = (u_B - u_A)\boldsymbol{e} = (\mathrm{Prj}_u \overrightarrow{AB})\boldsymbol{e} .$$

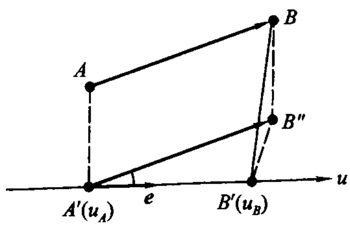

图 9 – 12

在图 9 – 12 中，若将 $\overrightarrow{AB}$ 的起点 A 平移到 u 轴上的点 A' 处(相应地，B 点随之平移到 B'')，由此图即可得到