

高等学校教学用书

圓齒輪漸開綫 嚙合原理

YUANCHILUN JIANKAIXIAN
NIEHE YUANLI

Г. А. 庫符希尼科夫編

張世民譯

孫可宗校

人民教育出版社

高等学校教学用



圓 齒 輪 漸 开 綫
嚙 合 原 理

YUANCHILUN JIANKAIXIAN
NIEHE YUANLI

Г. А. 庫符希尼科夫編
張 世 民 譯
孫 可 宗 校

人 民 教 育 出 版 社

本书系根据苏联国立“高等学校”出版社(Государственное издательство “Высшая школа”)1961年莫斯科出版、А. В. 热利戈夫斯基(Желиговский)等集体编著的“平面机构原理和机器动力学”(Теория плоских механизмов и динамика машин)一书中第三章“圆齿轮渐开线啮合原理”的全部内容译出的。该章编者为 Г. А. 库符希尼科夫(Кувшинников)。

本书内容比较突出地阐明圆齿轮渐开线啮合的一些最基本最主要的概念和原理。在编排上,有深入浅出、层次分明和难点分散的特点。由于把通常所谓的标准齿轮啮合在移距齿轮中作为零(移距)齿轮介绍出来,既避免了一般教材中标准齿轮和移距齿轮两套的重复,在概念的建立上也更符合现代齿轮生产实际并且比较系统完整。在本书的最后一节专门介绍了选择齿轮啮合参数的基本知识。

本书可用作高等工业学校机械制造类和机械类本科各专业机械原理课程齿轮部分的数学参考书或补充教材。对于从事齿轮方面的工程技术人员,本书也有一定的参考价值。

圆 齿 轮 渐 开 线 啮 合 原 理

Г. А. 库符希尼科夫编

张 世 民 译

北京市书刊出版业营业许可出字第2号

人民教育出版社出版(北京景山东街)

人民教育印刷厂印装

新华书店北京发行所发行

各地新华书店经售

统一书号K15010·110E 开本 350×1168¹/₃₂ 印张 1¹⁰/₁₆

字数 28,000 印数 1-6 000 定价(7)¥ 0 22

1963年8月第1版 1963年8月北京第1次印刷

目 录

§ 1. 基本定义。基本啮合定理	1
§ 2. 渐开线的几何学	9
§ 3. 啮合线, 啮合角	11
§ 4. 齿輪与齿条的啮合	12
§ 5. 齿輪的切制方法	13
§ 6. 刀具齿条的几何学	18
§ 7. 齿輪的几何学	19
§ 8. 齿根圆半径的确定	22
§ 9. 輪齿的根切	23
§ 10. 移距和无根切条件的計算	25
§ 11. 齿厚的确定	28
§ 12. 渐开线齿輪的啮合	30
§ 13. 装配角的确定	33
§ 14. 中心距(A)的确定	34
§ 15. 齿頂圆半径的确定	34
§ 16. 齿輪的零啮合	35
§ 17. 渐开线齿輪啮合几何图的繪制	36
§ 18. 啮合齿廓間的滑动	40
§ 19. 給定中心距的齿輪啮合計算	42
§ 20. 选择齿輪啮合参数的原則	45

圓齒輪漸開綫嚙合原理

§ 1. 基本定义。基本嚙合定理

齒輪傳動的主要用途是按給定角速比由一个軸(主動軸)向另一个軸(從動軸)傳遞迴轉運動的。主動軸角速度對從動軸角速度之比稱為傳動數(передаточное число),通常用字母 i 表示:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad (1)$$

摩擦傳動是用來傳遞迴轉運動的最簡單的機構,可以適當地把它看成是齒輪傳動的運動學基礎(圖 1)。

摩擦傳動的構件被做成兩個圓柱滾輪的形狀。從動滾輪可以繞固定軸 O_2 轉動。主動滾輪的轉軸 O_1 應安裝得能使兩個滾輪相接觸。如果使主動滾輪轉動,並且同時用某一 N 力使它緊壓在從動滾輪上,則兩個滾輪之間將產生摩擦力,該摩擦力將迫使從動滾輪轉動。

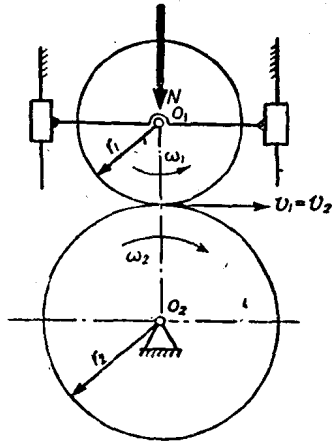


圖 1. 摩擦傳動簡圖。

兩滾輪接觸點的圓周速度

$$v_1 = \omega_1 r_1 \text{ 和 } v_2 = \omega_2 r_2.$$

當壓緊力 N 足夠時,兩滾輪將作無滑動的轉動,因而它們的圓周速度相等:

$$v_1 = v_2 \text{ 和 } \omega_1 r_1 = \omega_2 r_2.$$

因此,傳動數 i_{12} 等於

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} \quad (2)$$

如果滿足如下条件，則將沒有滑动：

$$F \geq P,$$

式中 P ——所傳遞的圓周力；

F ——摩擦力的极限值。

$$F = fN,$$

式中 f ——滑动摩擦系数。

因此，

$$N \geq \frac{P}{f}.$$

例如对于鑄鐵滾輪來說， $f=0.2$ ；若須傳遞圓周力 $P=1000$ 公斤，則必須的压紧力

$$N \geq \frac{1000}{0.2} = 5000 \text{ 公斤}.$$

巨大的压紧力將增加軸承中的摩擦損失，使效率降低，所以摩擦傳動不用來傳遞大的扭矩。

在摩擦傳動中，很難保證確定的傳動數，因為在工作過程中，摩擦系数可能改變（例如由於溫度升高、沾上潤滑油等）。摩擦傳動的這一主要缺點限制了它們的應用範圍。

由齒輪所組成的傳動，具有確定的傳動數。在齒輪傳動中，利用主動齒輪的齒側表面對從動齒輪齒側表面的推壓來實現轉動的傳遞。我們設想把齒圈固定到摩擦傳動中互相作無滑动滾動的半徑為 r_1 和 r_2 的兩個滾輪上（圖 1）。這時我們就得到齒輪傳動，其中

$$\omega_1 r_1 = \omega_2 r_2, \text{ 因而, } \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}.$$

當齒輪嚙合時，有兩個圓互相作無滑动的滾動，它們的半徑與

角速度成反比, 这样的圆称为节圆。

如果用垂直于轉軸的平面来剖切圆柱齿輪, 則可在剖面中得到齿廓(图 2)。齿廓两侧被曲线(通常是渐开线)所限制。如果从齿

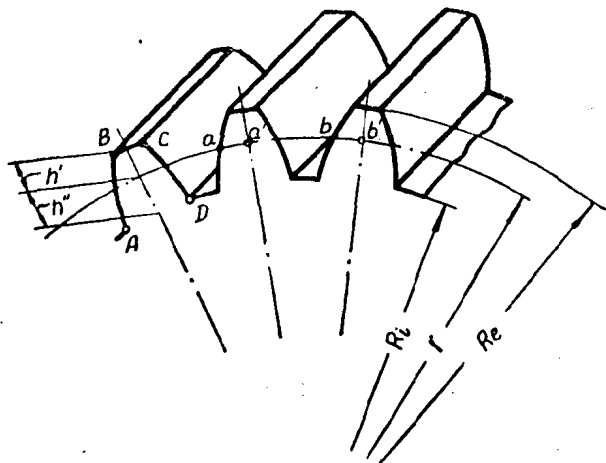


图 2. 齿輪的要素。

輪中心来看輪齿 $ABCD$, 則曲线 AB 是左侧齿廓, 而曲线 CD 是右侧齿廓。当两輪外啮合时, 随着轉动方向的不同, 或是一个齿輪的左侧齿廓同另一齿輪的左侧齿廓相工作, 或是前者的右侧齿廓同后者的右侧齿廓相工作。突出在节圆以外的那部分輪齿称为齿頂; 位于节圆以內的部分輪齿称为齿根。齿廓的外緣为齿頂圆所限制, 其半徑以 R_e 表示; 限制相邻两齿之間的齿間的圆称为齿根圆或齿間圆, 其半徑以 R_i 表示。齿頂圆与节圆之間沿半徑度量的距离称为齿頂高, 以 h' 表示。节圆与齿根圆之間沿半徑度量的距离称为齿根高, 以 h'' 表示。齿的总高度

$$h = h' + h'' \quad (3)$$

相邻两齿的同名点之間沿节圆度量的距离称为节圆的啮合周节, 以字母 t 表示, 例如 $\widehat{ab} = \widehat{a'b'} = t$ 。互相啮合的两个齿輪, 它們

的周節應該相同, 因此得

$$2\pi r_1 = z_1 t \quad \text{和} \quad 2\pi r_2 = z_2 t,$$

式中 z_1 和 z_2 為兩齒輪的齒數, 由此得

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{z_1}{z_2}.$$

如果 n_1 和 n_2 是兩齒輪每分鐘的轉數, 則

$$\omega_1 = \frac{\pi n_1}{30} \quad \text{和} \quad \omega_2 = \frac{\pi n_2}{30}.$$

因此, 傳動數可表示為:

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{r_2}{r_1} = \frac{z_2}{z_1}. \quad (4)$$

傳動數與角速比、轉數比成正比, 而與節圓半徑之比、齒數比成反比。

為了便於計算和測量齒輪起見, 齒輪的半徑應該用有理數給出。因此不選取周節作為基本參數, 而是選取周節與 π 之比作為基本參數; 該比值稱為嚙合模數, 並以字母 m 表示:

$$m = \frac{t}{\pi} [\text{毫米}]; \quad (5)$$

模數永遠以毫米表示。

根據關係式 $2\pi r = zt$ 得 $2r = \frac{t}{\pi} \cdot z$; 由此得到節圓直徑的計算公式:

$$d = mz. \quad (6)$$

設互相嚙合的兩個齒輪(圖3)

各以角速度 ω_1 和 ω_2 轉動, 並分別具有半徑為 r_1 和 r_2 的節圓。為了想像出該齒輪機構兩構件間的相對運動, 我們採用運動轉化法。我們給予整個系統——兩個

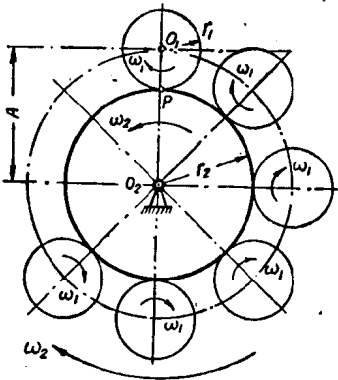


圖3. 兩節圓的相對運動。

齿輪以及用轉动付与齿輪相連接的机架——以数值等于 ω_2 但方向与它相反的角速度的轉动。于是，齿輪 2 成为固定輪，而齿輪 1 則将按順时针方向以角速度 ω_1 繞 O_1 軸轉动，同时按順时针方向以角速度 ω_2 繞 O_2 軸轉动。在轉化运动中，齿輪 1 将圍繞齿輪 2 滚动，其时齿輪 1 的节圓将沿齿輪 2 的节圓作无滑动的滚动。两节圓的切点 P 是齿輪 1 这种运动的瞬时轉动中心，該点称为啮合极点。啮合极点把中心距 $A=O_1O_2$ 分成与角速度成反比的两部分，这是因为

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1}$$

因此，节圓是瞬时轉动中心在相对运动中的軌迹，也就是两輪相对运动中的瞬心綫。

为了保証傳动数为常数，必要而充分的条件是使瞬心綫为圓，因为傳动数取决于两瞬心綫在相切点的半徑之比值；对于圓來說，該比值始終是常数

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \text{常数。}$$

这种齿輪称为圓齿輪(圓柱或圓錐齿輪)。工程中还应用非圓齿輪，它們的瞬心綫不是圓(例如橢圓)。对于非圓齿輪來說， $i_{12} \neq \text{常数}$ 。目前，非圓齿輪在机器制造业中有非常广泛的应用。

輪齿随着齿輪的轉动而在輪廓各个不同的点上进行接触，因此，为了使瞬心綫是圓，必須使齿廓滿足一定的几何条件，亦即必須用一定的方法来設計。

基本啮合定理制定出齿廓應該滿足的一些条件，以便能按給定的角速比来傳遞轉动。滿足这个要求的成对齿廓称为共軛齿廓。

与构件剛性連接的主动齿廓 $\alpha_1 - \alpha_1$ (图 4) 以角速度 ω_1 轉动。主动齿廓推压着与构件 2 剛性連結的从动齿廓 $\alpha_2 - \alpha_2$ ，在保証給定的角速比 $i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ 的要求下把轉动傳給构件 2。

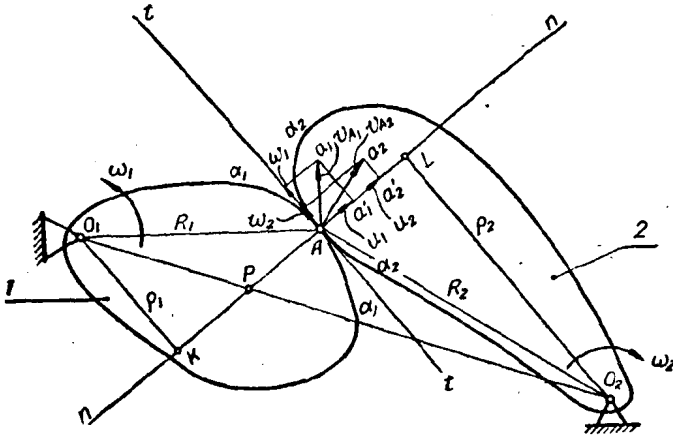


图 4. 推导基本啮合定理的簡图。

过两齿廓的接触点 A 作它們的公法綫 $n-n \perp t-t$ 。作两輪廓上在該瞬吋接触于 A 点的 A_1 和 A_2 点的圓周速度矢量。

$$v_{A_1} \perp O_1A \text{ 和 } v_{A_2} \perp O_2A;$$

显然

$$v_{A_1} = \omega_1 R_1 \text{ 和 } v_{A_2} = \omega_2 R_2,$$

式中 $R_1 = O_1A$ 和 $R_2 = O_2A$ 。

把两个速度矢量对法綫 $n-n$ 投影，并以記号 u_1 和 u_2 表示这些投影。

由两对相似三角形

$$\triangle a_1 A a_1' \sim \triangle A O_1 K \text{ 和 } \triangle a_2 A a_2' \sim \triangle A O_2 L$$

得

$$\frac{u_1}{v_{A_1}} = \frac{\rho_1}{R_1} \quad \text{和} \quad \frac{u_2}{v_{A_2}} = \frac{\rho_2}{R_2};$$

式中 $\rho_1 = O_1K$ 和 $\rho_2 = O_2L$ 。

由比例式得

$$u_1 = v_{A_1} \frac{\rho_1}{R_1} = \omega_1 R_1 \frac{\rho_1}{R_1} = \omega_1 \rho_1;$$

以此类推, 得

$$u_2 = \omega_2 \rho_2.$$

由齿廓接触的連續性和順序性条件得知, 应该遵守这样的条件: $u_1 = u_2$ 。事实上, 假如 $u_1 < u_2$, 则齿廓 $\alpha_1 - \alpha_1$ 将会与齿廓 $\alpha_2 - \alpha_2$ 分离; 假如 $u_1 > u_2$, 则齿廓 $\alpha_1 - \alpha_1$ 势必要挤入齿廓 $\alpha_2 - \alpha_2$ 中。如果 $u_1 = u_2$, 那么就不会发生上述情况。这时

$$\omega_1 \rho_1 = \omega_2 \rho_2 \quad \text{和} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1}.$$

由相似三角形

$$\triangle PO_1K \sim \triangle PO_2L$$

得

$$\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2P}{PO_1}.$$

把上面得到的关系式联合起来, 可得

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{O_2P}{PO_1}.$$

由此得出基本啮合定理: 为了能以給定的角速比来傳遞轉动, 必須使两共軛齿廓接触点的公法綫分中心距为与角速度成反比的两部分, 亦即必須使公法綫通过啮合极点。如果傳动比給定为常数 ($i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \text{常数}$), 也就是說, 瞬心綫是圓, 則极点应在中心綫上占有不变的位置。在这种情况下, 共軛齿廓在所有位置上的接触点的公法綫都应该通过固定平面中的同一个点。

如果某一曲線占有一系列的順序位置，則總可以選擇另一條曲線，使它能在所有上述各位置與第一條曲線相接觸。第一條曲線稱為被包絡曲線，而第二條曲線則稱為包絡曲線。

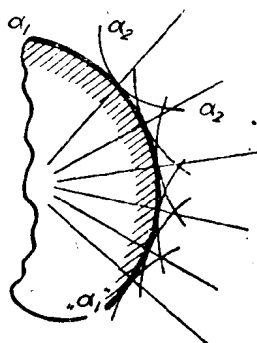


图5. 互包絡綫。

如果把運動轉化法應用到上述的共軛齒廓上，使其中一個齒廓 $\alpha_1 - \alpha_1$ 始終固定（圖5），則在轉化的相對運動中，另一齒廓 $\alpha_2 - \alpha_2$ 將相對於第一個齒廓占有一系列的順序位置；同時兩齒廓將在每個位置上互相接觸，並且兩齒廓的公法綫將通過瞬時轉動中心。對於曲線 $\alpha_2 - \alpha_2$ 來說，曲線 $\alpha_1 - \alpha_1$ 是包絡曲線，而曲線 $\alpha_2 - \alpha_2$ 則是被包絡曲線。因此基本定理可以換成另一種說法：

在齒輪的相對運動中，共軛齒廓應該是互包絡綫。

由上述得知，共軛齒廓中的一個可以任意選擇，但是另一個共軛齒廓則應該按照基本啮合定理的要求來選擇。

在工程中，現在幾乎只按漸開綫來做齒輪的齒廓，它具有一系列可貴的優點：例如，兩個漸開綫是互包絡綫，因此兩個共軛齒廓可以按同樣的規律來制作，亦即按漸開綫來制作。下文將介紹相啮合的兩個漸開綫齒輪可以用同一把切削刀具來制造。具有漸開綫齒廓的齒輪的啮合稱為漸開綫啮合。

把速度 V_{A_1} 和 V_{A_2} 對切綫 $t-t$ 投影（圖4），然後作出矢量 W_1 和 W_2 。要使這兩個矢量相等，就必須使速度矢量 V_{A_1} 和 V_{A_2} 重合，因而也就是需要將半徑 R_1 和 R_2 拉成一條直綫。但是這只有在齒廓的一個特殊位置上才能發生，其時兩齒廓的接觸點與啮合極點重合。在一般情況下 W_1 不等於 W_2 。由此得知，兩個齒廓除了滾動以外，一個齒廓還對另一齒廓發生滑動，結果齒廓由於滑動摩擦而發生磨損。

§ 2. 渐开线的几何学

如果令直线沿着圆作无滑动的滚动(图6), 则直线上的每一点将在与该圆刚性连接的平面上描出曲线, 该曲线称为渐开线。用以形成渐开线的直线所沿之滚动的圆称为基圆, 它的半径以字母 r_0 来表示; 滚动的直线, 称为形成线或发生线。

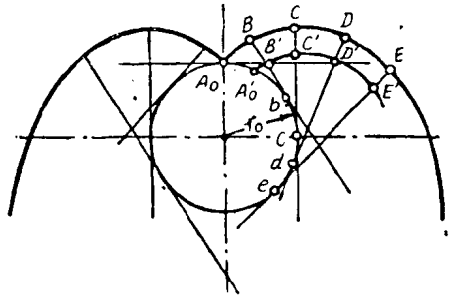


图6. 渐开线的形成。

还可以提出渐开线的另一种形成方法: 假设在某一半径为 r_0 的圆盘上绕以线绳。如果执住这条线绳的末端, 并使绳经常张紧, 同时从圆盘上把线绳卸下, 则线绳卸下端的每一点将(在与圆盘刚性连接的平面上)形成渐开线。由上述显然可以看出, 渐开线是圆的展开线。从渐开线形成过程的本身可知, 渐开线不能进入基圆以内。渐开线发始于基圆上, 它上面的各点愈来愈离开基圆而伸向无穷远。渐开线有两个分支——左分支和右分支, 这取决于直线对基圆向哪个方向滚动。基圆的各个切线线段(Bb 、 Cc 、 Dd 等)是基圆上各弧线($\widehat{A_0b}$ 、 $\widehat{A_0c}$ 、 $\widehat{A_0d}$)的伸直线段。由此得知, 基圆上的各个弧线等于相应的切线线段: $\widehat{A_0b} = Bb$ 、 $\widehat{A_0c} = Cc$ 、 $\widehat{A_0d} = Dd$ 。基圆(在 b 、 c 、 d 等点)的各个切线是渐开线(在 B 、 C 、 D 等点)的法线。如果由同一个基圆作两条渐开线(A_0BCDE 和 $A_0'B'C'D'E'$), 则它们之间沿法线方向度量的距离, 等于两渐开线始点之间(A_0 和 A_0' 两点之间)圆弧的伸直长度; 两渐开线之间在任一点沿法线度量的距离都相同($CC' = DD' = EE' = \widehat{A_0A_0'}$)。因此, 同一个基圆的各条渐开线是等距(距离相等的)曲线。基圆半

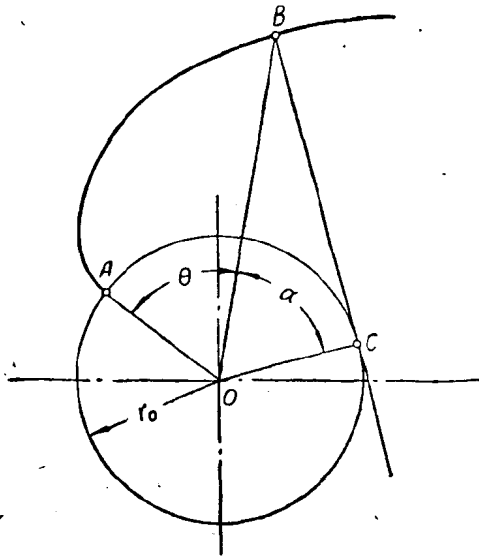


图7. 推导渐开线方程式的简图。

$= r_0 \operatorname{tga}$; 由于 $\widehat{AC} = BC$, 所以 $r_0(\theta + \alpha) = r_0 \operatorname{tga}$; 因此 $\theta = \operatorname{tga} - \alpha$ (式中角度 θ 和 α 均以弧度表示)。

当 B 点沿渐开线移动时, 矢量半径 OB (它的变长度以字母 r 表示) 将行转动, 角 α 亦将改变。角 θ 也将随着 α 角改变。上面所导出的确定这些角之间相互关系的函数称为渐开线函数:

$$\theta = \operatorname{tga} - \alpha = \operatorname{inv} \alpha \quad (7)$$

θ 称为角 α 的渐开线函数。

渐开线函数的数值列在工程手册的表格中。

矢量半径 r 的长度由 $\triangle OBC$ 来确定:

$$r = \frac{r_0}{\cos \alpha} \quad (8)$$

等式(7)和(8)是以参数形式表示的渐开线方程式。

渐开线上的点距离基圆愈远, 则由该点向基圆所作切线的长

径 r_0 是确定渐开线的唯一参数。

各条切线与基圆的切点 b, c, d, e 是渐开线上 B, C, D, E 等点的曲率中心, 因而基圆是渐开线的曲率中心轨迹。由切点到渐开线的切线长度是渐开线在该点的曲率半径。

在渐开线上选取任意点 B (图7), 则

$$\widehat{AC} = r_0(\theta + \alpha);$$

由 $\triangle OBC$ 得: $BC =$

度愈大，亦即渐开綫的曲率半徑 ρ 愈大，因而渐开綫的曲率愈小。

由 $\triangle OBC$ 得知 $BC = \rho = r_0 \operatorname{tg} \alpha$ ，所以渐开綫的曲率随着基圓半徑的增大而减小，在 $r_0 \rightarrow \infty$ 的极限情况下，渐开綫变成垂直于发生綫的直綫。

§ 3. 啮合綫，啮合角

当齿輪轉动时，相啮合的两个齿各以自己齿廓上的不同点互相接触。現在来討論两渐开綫齿廓的接触点在齿輪轉动过程中怎样沿固定平面运动。

由半徑为 r_{o_1} 和 r_{o_2} 的基圓繪出在某点 K 互相接触的一对共軛齿廓的渐开綫 $\beta-\beta$ 和 $\gamma-\gamma$ (图 8)。由 K 点作两基圓的切綫

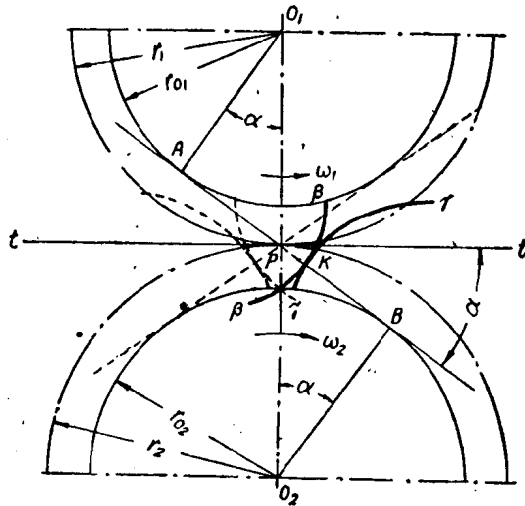


图 8: 确定啮合綫的簡图。

KA 和 KB 。根据渐开綫的性質得知，切綫 KA 将是渐开綫 $\beta-\beta$ 的法綫，而切綫 KB 将是渐开綫 $\gamma-\gamma$ 的法綫。由于两齿廓是共軛

的, 所以根据基本啮合定理得知, 两齿廓接触点的公法綫应该通过啮合极点。因而两齿廓应该在这样的 K 点相接触: 两个基圆的两条切綫在该点延伸成一条直綫 AB , 并且該直綫是两齿廓的公法綫。

与两基圓相切的这条直綫 AB , 是一对共軛齿廓接触点的軌迹, 并被称为啮合綫。当齿輪轉动时, 啮合綫在固定平面上占据固定的位置, 并通过啮合极点, 即通过半徑为 r_1 和 r_2 的两个节圓的切点。

一个齿对另一个齿的压力沿着它們輪廓的公法綫傳遞, 即沿着啮合綫傳遞。啮合綫的直綫性是漸开綫啮合所特有的, 它使得所傳压力的方向保持不变, 这是漸开綫齿廓的优点之一。

啮合綫与节圓公切綫 $t-t$ 所形成的角 α 称为啮合角。

如果主动齿輪的轉动方向改变, 則运动的傳遞将不是由它的左侧齿廓而是由右侧齿廓来实现, 而啮合綫将位于另一个对称的位置, 如图中虛綫所示。

现在来推导节圓半徑与基圓半徑之間的关系, 为此我們由中心 O_1 和 O_2 对啮合綫作垂綫 O_1A 和 O_2B 。根据对应边互相垂直的条件得 $\angle PO_1A = \angle PO_2B = \alpha$ 。

由 $\triangle PO_1A$ 和 $\triangle PO_2B$ 得到

$$r_{o_1} = r_1 \cos \alpha \quad \text{和} \quad r_{o_2} = r_2 \cos \alpha,$$

由此得

$$\frac{r_{o_1}}{r_{o_2}} = \frac{r_1}{r_2}$$

§ 4. 齿輪与齿条的啮合

假設节圓半徑 r_2 逐漸增大, 在极限情况下趋近于无穷大 ($r_2 \rightarrow \infty$); 此时 $r_{o_2} = r_2 \cos \alpha \rightarrow \infty$, 第二个齿輪的漸开綫在此极限情况

下變成直線，即齒輪變成具有直線齒廓的齒條（圖 9）。

在齒條傳動中，齒輪的節圓（ r_1 ）沿齒條的節線 $t-t$ 作無滑動的滾動。齒條傳動用來把齒輪的轉動變為齒條的直線移動（或反之）。

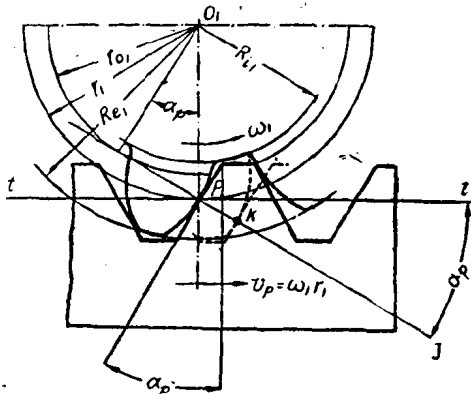


圖 9. 齒輪與齒條的嚙合。

齒條的線速度同齒輪的角速度間應該存在如下的聯系條件：

$$v_p = \omega_1 r_1.$$

由於 $r_2 \rightarrow \infty$ ，所以齒條傳動的傳動數等於無窮大：

$$i_{12} = \frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{r_2}{r_1} = \infty.$$

作直線移動的齒條，它的直線齒廓永遠垂直於嚙合線；齒條的齒廓角 α_p （圖 9）等於嚙合角。

§ 5. 齒輪的切制方法

有兩種原則上不相同的齒輪切制方法：仿形法和范成法。

在用第一種方法切制時，輪齒之間的各個齒間部分是在萬能

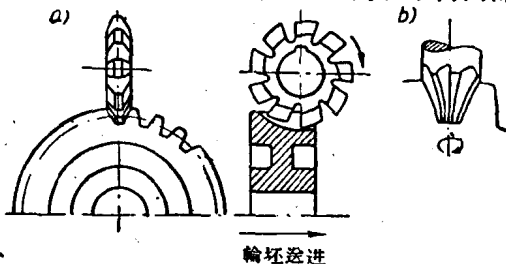


圖 10. 仿形法切制齒輪：
a-盤狀銑刀；b-指狀銑刀。