21世纪高等学校教材

王元明 徐君祥 编著

索伯列夫空间讲义

东南大学出版社

SOUTHEAST UNIVERSITY PRESS

内 容 提 要

本书比较系统地介绍了索伯列夫(Sobolev)空间及广义函数的基本理论,其中包括整指数的索伯列夫空间、广义函数及其傅里叶变换、实指数的索伯列夫空间等,此外,还包含了书中需要的一些预备知识.本书文字精练、重点突出,可作为数学系研究生教材,也可供教师和有关科技工作者参考。

图书在版编目(CIP)数据

索伯列夫空间讲义/王元明,徐君祥编著.—南京:东南大学出版社,2003.8

ISBN 7-81089-282-7

Ⅰ.索... Ⅱ.①王...②徐... Ⅲ.索伯列夫空间-研究生-教材 Ⅳ.0177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 031182 号

东南大学出版社出版发行
(南京四牌楼 2 号 邮编 210096)
出版人:宋增民
江苏省新华书店经销 华东有色地研所印刷厂印刷
开本:850mm×1168mm 1/32 印张: 4 字数:100 千字
2003 年 8 月第 1 版 2003 年 8 月第 1 次印刷
印数:1-5000 定价:10.00 元

(凡因印装质量问题,可直接向发行科调换,电话:025-3795801)

研究生数学教材编委会

出版说明

近几年来，我国高等教育事业发生了许多巨大的变化，其中之一就是研究生教育正以前所未有的速度向前发展，研究生的招生规模逐年大幅度地增长.这说明我国现代化建设对高层次人才的需求越来越大，这是国家兴旺发达的重要标志.

为了适应研究生教育迅猛发展的需要，江苏省工业与应用数学学会与东南大学出版社联合组织力量撰写并出版一套研究生用的数学教材与教学参考书，其中包括数学类研究生的数学教材和参考书，也包括非数学类研究生的数学教材和参考书.这样做的主要出发点是力图动员全省的数学工作者来参与这项工作，使这套教材写得更好一点。

我们的主观愿望是这套教材具有一些自身的特点.第一，起点适中.起点太高，脱离学生的实际水平，难以教学.起点低了，又不能适应形势的发展，也满足不了学生渴望求知的要求.选择恰如其分的起点的关键，在于处理好各课程中经典内容与现代内容之间的关系，要将两者有机地结合在一起.第二，较广泛的适用面.这套教材包含数学类研究生的学位课程、选修课程、专业课程，也包含非数学类研究生的基础课程.我们希望不论哪一本教材都能被较多的专业学生所采用，这就要求在内容的处理上有一定的自封闭性，突出这门课程的主题.当然，有时为了不过多地增加篇幅，冲淡主体思想的阐述，也略去一些命题的证明，但都指出了有关的参考书籍.第三，便于阅读.研究生教育与本科生教育有很大的不同，那就是要更强调学生的主观能动性和独立工作能力的培养.研究生课程的教学，除了有主讲教师启发性的讲解以外，

更重要的是靠学生自学.因此,要求教材文字通顺,说理清晰,跨度不能太大,但也不能过细、过繁.书的对象是读者,只有读者认为好读的书才是一本好书.

一本好的教材需要经历一个长时期的完善过程,即不断使用,不断修改,精益求精.这套教材第一版都是有关作者在多年教学实践的基础上撰写而成的,有的讲义(书的前身)在相关的学校内已使用多年,但毕竟仍有一定局限性,缺点与错误一定还不少.我们热切地希望广大数学工作者都关心这套教材,帮助我们修改,力争在经过几次修订后,使这套教材能成为一套受欢迎的教学用书.

研究生数学教材

编委会

2001 年 11 月

前　言

索伯列夫空间理论是上个世纪30年代初由苏联数学家S.L.Sobolev(Соболев)发展起来的。这些空间是由多个实变量的弱可微函数所组成的Banach空间,它们是为研究偏微分方程的近代理论以及研究与数学分析有关的领域中许多问题的需要而产生的,现已成为数学系研究生必修的数学内容.

这本讲义是根据作者的授课笔记整理而成的,也是为了应付教学的需要而编写的。书中主要是介绍索伯列夫空间的一些最基本、最核心的内容,没有涉及索伯列夫空间理论在其他学科中的应用,也没有涉及索伯列夫空间理论的一些发展,如Lions的迹空间,Orlicz - Sobolev空间等.对于前者,可以在偏微分方程、计算方法等学科的著作中找到(例如[7]),对于后者,在R.A.Adams的专著中可以找到,而且本书的目的也只是想为学生提供一些重要的入门知识,这些知识对大多数研究生来说已经足够了。全书共分五章,前四章由王元明执笔,第五章由徐君祥执笔。

索伯列夫空间的一个重要内容是嵌入定理,对整指数Sobolev空间情形,这部分内容的证明比较复杂、冗长,我们采取了两步走的方式,在第二章内着重讲清了Sobolev不等式及嵌入定理的意义和结论,在第五章内才给出了该定理的证明。这样做似乎可以使重点更突出一些,也更便于组织教学。

管平教授为本书的打印稿做了一些细致的校对工作。东南大学出版社的领导和吉雄飞编辑为本书的出版给予了热情的支持并付出了辛勤的劳动,作者在此一并向他们表示衷心的感谢。
由于编者水平有限,书中缺点或错误一定不少,请读者指正。

王元明

2002年8月

目　录

1　引言与准备

这一章的内容是为后四章作准备的，主要是讲 L^p 空间的一些基本结论、磨光函数与单位分解定理.

1.1　从 Dirichlet 原理说起

从微积分诞生的那一天起，就产生了微分方程，而微分方程的核心问题是求解问题，直至 19 世纪中叶，下列 Dirichlet 问题：

求 $u(x,y)\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$ 满足

$$\begin{aligned} \Delta u &= 0 \quad \text{in } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

其中 $\varphi\in C(\partial\Omega)$，仍是当时的一个重大问题，而这个问题与下面的最小势(位)能原理密切相关 .

最小位能原理：受外力作用的弹性体，在满足已知边界约束的一切可能位移中，以达到平衡状态的位移能使物体的总位能为最小 .

物体的总位能为

$$J(v)=\frac{T}{2}\int_\Omega|\nabla v|^2\mathrm{d}x-\int_\Omega fv\,\mathrm{d}x(=\text{应变能}+\text{外力作功})$$

其中 T 为张力. 按最小位能原理，达到平衡状态的位移 u 使得 $J(u)=\min\limits_{v\in M_\varphi}J(v)$，其中 $M_\varphi=\{v\in C^1(\overline{\Omega})\mid v|_{\partial\Omega}=\varphi\}$. 这是一个变分问题，由变分学理论知，当 $u\in C^2(\Omega)\cap C^1(\overline{\Omega})$ 时，它必满足相应的 Euler 方程

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= \varphi \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned}$$

受最小位能原理的启发，德国数学家 Riemann 曾提出过一个著名的 Dirichlet 原理：当 $u_0\in A\equiv\{u\in C^1(\Omega)\mid u_x,u_y\in L^2(\Omega),u|_{\partial\Omega}=\varphi\}$ 使

$$I(u) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\Omega} (u_x^2 + u_y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \tag{1.1.2}$$

达到最小值,则 u_0 必是(1.1.1) 的解 .

因对任意 $u \in A$, $I(u) \geqslant 0$,故 $\inf\limits_A I(u)$ 存在,Riemann 认定,必存在 $\bar{u} \in A$,使得

$$I(\bar{u}) = \inf_A I(u) = \min_A I(u)$$

当时,人们认为这似乎是一件无可置疑的事实 .1870 年法国数学家 Weierstrass 对 Riemann 的论据提出了本质性的批评,他认可 $I(u)$ 在 A 上有 $\inf I(u)$,但未必有 $\min I(u)$,因此不能断定 $I(u)$ 达到最小值,并举了一个例子,设

$A = \{\varphi(x) \mid \varphi \in C([0,1]), \varphi'$ 除有第一类间断点外连续,且 $\varphi(0) = 1, \varphi(1) = 0\}$

$$I(\varphi) = \int_0^1 \left[1 + \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}\right)^2\right]^{1/4} \mathrm{d}x$$

易证

$$\min_A I(\varphi) = 1 \tag{1.1.3}$$

事实上,$I(\varphi) \geqslant 1$,对任意 $\delta > 0$,取

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\delta^2}(\delta^2 - x), & 0 \leqslant x \leqslant \delta^2 \\ 0, & \delta^2 < x \leqslant 1 \end{cases}$$

$\varphi_\delta \in A$,且 $I(\varphi_\delta) \leqslant 1 + \delta$.故 $\min I(\varphi) \leqslant 1 + \delta$,即 $1 \leqslant \min I(\varphi) \leqslant 1 + \delta$.

但不存在 $\varphi \in A$ 使(1.1.3) 成立.若不然,则对任意 $x \in [0,1]$,$\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x} \equiv 0$,即 $\varphi = \mathrm{const}$.这时 $\varphi \overline{\in} A$.

后来,Hadamard 又举了一个反例,说明即使问题(1.1.1) 有属于 $C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ 的解,这个解也不一定能通过求解变分问题

$$I(u) = \min_{v \in A} I(v)$$

得到.如取 Ω 为平面上的单位圆,$\varphi(\theta) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin^4\theta}{n^2}$,$0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$,易知,这时

Dirichlet 问题(1.1.1) 有惟一解

$$u_0(\rho,\theta) = \sum_{n=1}^{\infty} \rho^{n^4} \frac{\sin^4\theta}{n^2}$$

但 $I(u_0) = +\infty$,事实上

$$I(u_0) = \lim_{r\to 1^-}\int_{\rho\leq r} |\nabla u_0|^2 = \lim_{r\to r^-}\int_{\rho\leq r}\left[\left(\frac{\partial u_0}{\partial \rho}\right)^2 + \frac{1}{\rho^2}\left(\frac{\partial u_0}{\partial \theta}\right)^2\right]\rho d\rho d\theta$$

$$= \lim_{r\to 1^-} 2\pi\int_0^r \sum_1^{\infty} n^4 \rho^{2n^4-1} d\rho = \lim_{r\to 1^-} \pi\sum_1^{\infty} r^{2n^4} = +\infty$$

Hadamard 从另一个侧面对 Dirichlet 原理提出了疑议,即不是所有 Dirichlet 问题(1.1.1) 的解都可以通过(1.1.2) 求得 .

因此,Dirichlet原理经历了一个停留时期 . 但是,Riemann提出的论断是特别的吸引人,以致不少数学家仍力图去证明 Dirichlet 原理 .

1900 年,德国数学家 Hilbert 在巴黎国际数学家大会上曾提出 23 个数学问题,作为新世纪的研究目标,其中第 19 问题(确定正则变分问题的解是否总是解析函数,已由 S.Bernstein,и.г.Петровскии 解决),第 20 问题(研究一般边值问题),第 23 问题(发展变分学的方法研究) 均与 Dirichlet 原理有关, Hilbert 的工作使这个问题有突破性的进展,到 20 世纪 40 年代由于 Sobolev 的工作才使 Dirichlet 原理确立了严格的数学基础 .

Sobolev 如何解决这个问题?记

$$C_*^1(\overline{\Omega}) \equiv \{v \in C(\overline{\Omega}) \mid v\text{在}\overline{\Omega}\text{ 上具有分块连续导数}\}$$

即若 $v \in C_*^1(\overline{\Omega})$,则 v' 在 $\overline{\Omega}$ 上除了有限块间断面外都连续,在间断面两侧存在左、右极限.若 $u \in L^2(\Omega)$,如存在 $\{u_n\} \subset C_*^1(\overline{\Omega})$ 使得 $u_n \xrightarrow{L^2} u$, $\frac{\partial u_n}{\partial x_i} \xrightarrow{L^2} v_i$,则称 u 具有一阶强广义导数,记成

$$v_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}$$

令

$$H_1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) \mid \text{强广义导数}\frac{\partial u}{\partial x_i}\text{ 存在,且}\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2\}$$

在 $H_1(\Omega)$ 中赋予范数

$$\| u \|_{H_1(\Omega)} = \left(\int_\Omega (|u|^2 + |\nabla u|^2) \mathrm{d}x \right)^{1/2}$$

则易证 $H_1(\Omega)$ 是 Banach 空间，$H_1(\Omega)$ 称为 Sobolev 空间．

记

$$\mathring{C}^1_*(\Omega) = \{ u \in C^1_*(\Omega) \mid u|_{\partial\Omega} = 0 \}$$

$$\mathring{H}_1(\Omega) = \mathring{C}^1_* \text{ 在 } H_1 \text{ 中的闭包(它是 } H_1 \text{ 的子空间)}$$

考虑 Dirichlet 问题

$$\begin{aligned} -\Delta u &= f \quad \text{in } \Omega \\ u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \tag{1.1.4}$$

若存在 $u_0 \in \mathring{H}_1(\Omega)$ 使得

$$J(u) = \min_{v \in \mathring{H}_1} J(v) \tag{1.1.5}$$

其中

$$J(v) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla v|^2 - \int_\Omega f v$$

则称 u 是(1.1.4)的广义解(弱解)．

利用 Sobolev 空间的理论，不难证明(1.1.5)当 $f \in L^2(\Omega)$ 时必存在惟一解，即(1.1.4)存在惟一广义解．然后，再证明这个解 $u \in C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$(当 f 及 Ω 具某些光滑性)，即解决了 Dirichlet 问题．

1.2 L^p 空间

作为 Sobolev 空间的重要基础是 L^p 空间的一些基本理论，为了读者阅读本书的方便，我们将这些理论罗列在一起(其实，有些结果已超出本书需要的范围，为了完整性，我们也收集在内)，其中有些结果不给出证明，因为在实变函数论或泛函分析的课程中都可以找到．

1.2.1 一些基本结果

设 $\Omega \subset \mathbf{R}^n$ 是一个开集(或可测集)，$f(x)$ 是定义在 Ω 上的实的可测函

数，$1 \leqslant p < \infty$. 若$|f(x)|^p$也是Ω上的可测函数，则积分

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

是有意义的，当然也可能是无限的．记

$$L^p(\Omega) = \left\{ f(x) \,\middle|\, f(x) \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且} \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x < \infty \right\} \tag{1.2.1}$$

对$f \in L^p(\Omega)$，定义f的范数

$$\| f \|_p = \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x \right)^{1/p} \tag{1.2.2}$$

显然，$L^p(\Omega)$是一个线性矢量空间. 称$1 < p, q < \infty$是互为共轭指数，若

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$$

下面列出L^p空间的一些基本结果.

命题 1.2.1（Hölder不等式） 设$\Omega \subset \mathbf{R}^n$是开集，$p, q$是互为共轭指数，$f(x) \in L^p(\Omega)$，$g(x) \in L^q(\Omega)$，则$f(x)g(x)$在$\Omega$上可积，且

$$\int_\Omega |f(x)g(x)| \mathrm{d}x \leqslant \| f \|_p \| g \|_q \tag{1.2.3}$$

(1.2.3) 等号成立的充分必要条件是$\alpha |f|^p = \beta |g|^q$在$\Omega$内几乎处处成立，其中$\alpha, \beta$是两个不为零的常数．

这个结果可以推广为

$$\int_\Omega |f_1(x) \cdots f_n(x)| \mathrm{d}x \leqslant \| f_1 \|_{p_1} \cdots \| f_n \|_{p_n} \tag{1.2.4}$$

其中$f_i(x) \in L^{p_i}(\Omega)$，且$\sum_{i=1}^n \frac{1}{p_i} = 1$.

命题 1.2.2（Minkowski 不等式） 若$1 \leqslant p < \infty$，且$f, g \in L^p(\Omega)$，则

$$\| f + g \|_p \leqslant \| f \|_p + \| g \|_p \tag{1.2.5}$$

命题 1.2.3 对$1 \leqslant p < \infty$，$L^p(\Omega)$是 Banach 空间.

命题 1.2.4 若$1 < p < \infty$，则

(1) 简单函数在L^p内是稠的；

(2) $C_0(\mathbf{R}^n)$ 在 L^p 内是稠的，这里 $C_0(\mathbf{R}^n)$ 表示在 $\mathbf{R}^n$ 的一个有界闭集外恒为 0 的连续函数全体；

(3) L^p 中的函数经过自变量平移关于范数是连续的，即若 $f \in L^p(\mathbf{R}^n)$，则

$$\lim_{|h|\to 0} \| f(\cdot + h) - f(\cdot) \|_p = 0$$

由于上述结果的证明与 $p = 1$ 的情形完全类似，读者自己去验证.

下面来讨论 $p = \infty$ 的情形，如果 $f(x)$ 是 Ω 上的可测函数，令

$$\begin{aligned} \| f \|_{\infty,\Omega} &= \inf_{\substack{|\Omega_0| = 0 \\ \Omega_0 \subset \Omega}} \left(\sup_{\Omega \setminus \Omega_0} |f(x)| \right) \\ &= \inf\{ a \geqslant 0 \mid \text{mes}\{ x \in \Omega \mid f(x) > a \} = 0 \} \end{aligned} \tag{1.2.6}$$

作为惯例，令 $\inf \varnothing = \infty$. 需要指出的是，上述的下确界实际上是可以达到的，因为对任意 n，存在 $\Omega_n \subset \Omega$，使得 Ω_n 的测度 $|\Omega_n| = 0$，且

$$\sup_{\Omega \setminus \Omega_n} |f(x)| < \| f \|_\infty + \frac{1}{n}$$

记

$$\Omega_0 = \bigcup_n \Omega_n$$

则 $|\Omega_0| = 0$，且

$$\| f \|_{\infty,\Omega} \leqslant \sup_{\Omega \setminus \Omega_0} |f(x)| \leqslant \sup_{\Omega \setminus \Omega_n} |f(x)| < \| f \|_\infty + \frac{1}{n}$$

因此

$$\| f \|_{\infty,\Omega} = \sup_{\Omega \setminus \Omega_0} |f(x)|$$

$\| f \|_{\infty,\Omega}$ 称为 f 在 Ω 上的本性上确界. 以后为了方便起见，在不致引起混淆的时候，将略去下标 Ω，记成

$$\| f \|_\infty = \operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} |f(x)| \tag{1.2.7}$$

令

$$L^\infty(\Omega) = \{ f \mid f \text{ 在 } \Omega \text{ 上可测且 } \| f \|_\infty < \infty \}$$

易证 L^∞ 是一个 Banach 空间 .

命题 1.2.5 当 $k \to \infty$ 时 $\| f_k - f \|_{\infty,\mathbf{R}^n} \to 0$ 的充分且必要条件是存

在可测集 E 使得 $|E^c| = 0$,且 f_k 在 E 上一致地收敛于 f,即在 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 内按范数的收敛性等价于几乎处处一致收敛性.

证明 在 $L^\infty(\mathbf{R}^n)$ 内考虑一个序列 $\{f_k\}$,它满足

$$\|f_k - f\|_{\infty,\mathbf{R}^n} \to 0, \quad \text{当 } k \to \infty \text{ 时}$$

这里 $f \in L^\infty(\mathbf{R}^n)$,则存在 $F_k \subset \mathbf{R}^n$ 使得 $|F_k| = 0$,且当 $k \to \infty$ 时有

$$\|f_k - f\|_{\infty,\mathbf{R}^n} = \sup_{\mathbf{R}^n \setminus F_k} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

令 $F_0 = \bigcup_k F_k$,则 F_0 是一个零测度的集合,且当 $k \to \infty$ 时

$$\sup_{R^n \setminus F_0} |f_k(x) - f(x)| \to 0$$

记 $E = \mathbf{R}^n \setminus F_0$ 即得命题的结论.

命题 1.2.6 若 $f \in L^\infty(\Omega)$,则

$$\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$$

证明 在 Ω 内选取一个零测度集合 F_0,使得

$$\|f\|_\infty = \sup_{\Omega \setminus F_0} |f(x)|$$

因此

$$\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x = \int_{\Omega \setminus F_0} |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_\infty^p |\Omega|$$

若 $|\Omega| > 0$,显然有 $|\Omega|^{1/p} \to 1$(当 $p \to \infty$ 时),故由上式可得

$$\overline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty \tag{1.2.8}$$

另一方面,对任意 $0 < \varepsilon < \|f\|_\infty$,集合

$$\Omega_\varepsilon = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > \|f\|_\infty - \varepsilon\}$$

不是一个零测度集合(因为若 $|\Omega_\varepsilon| = 0$,且 $\sup_{\Omega \setminus \Omega_\varepsilon} |f(x)| \leqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$,这与 $\|f\|_\infty$ 的定义相矛盾),故

$$\|f\|_p \geqslant \left(\int_{\Omega_\varepsilon} |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{1/p} \geqslant (\|f\|_\infty - \varepsilon)|\Omega_\varepsilon|^{1/p}$$

令 $p \to \infty$,可得

$$\underline{\lim_{p\to\infty}} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty - \varepsilon$$

再令 $\varepsilon \to 0$,得

$$\varliminf_{p\to\infty} \|f\|_p \geqslant \|f\|_\infty \tag{1.2.9}$$

结合(1.2.8)与(1.2.9)即得命题的结论.

命题 1.2.7 若 $0 < p < q < r \leqslant \infty$,则 $L^q \subset L^p + L^r$,即 L^q 中每个函数一定可表示成 L^p 中一个函数与 L^r 中一个函数的和.

证明 若 $f \in L^q(\Omega)$,令 $E = \{x \in \Omega \mid |f(x)| > 1\}$,$g = \chi_E f$,$h = \chi_{E^c} f$,其中 χ_E 是 E 的特征函数,即

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E \\ 0, & x \overline{\in} E \end{cases}$$

则由 $|g|^p = \chi_E |f|^p \leqslant \chi_E |f|^q$ 可知 $g \in L^p(\Omega)$,再由

$$|h|^r = |f|^r \chi_{E^c} \leqslant |f|^q \chi_{E^c}$$

可知 $h \in L^r(\Omega)$(若 $r = \infty$,显然有 $\|h\|_\infty = 1$).

命题 1.2.8 若 $0 < p < q < r \leqslant \infty$,则 $L^p \cap L^r \subset L^q$,且

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^\lambda \|f\|_r^{1-\lambda} \tag{1.2.10}$$

其中$\dfrac{1}{q} = \dfrac{\lambda}{p} + \dfrac{1-\lambda}{r}$.

证明 若 $r = \infty$,则对任意 $f \in L^p \cap L^\infty$,我们有

$$\int_\Omega |f(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant \|f\|_\infty^{q-p} \int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x$$

即

$$\|f\|_q \leqslant \|f\|_p^{p/q} \|f\|_\infty^{1-p/q} = \|f\|_p^\lambda \|f\|_\infty^{1-\lambda}$$

若 $r < \infty$,利用 Hölder 不等式可得

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f(x)|^q \mathrm{d}x &= \int_\Omega |f(x)|^{\lambda q} |f(x)|^{(1-\lambda)q} \mathrm{d}x \\ &\leqslant \left(\int_\Omega |f(x)|^p \mathrm{d}x\right)^{\lambda q/p} \left(\int_\Omega |f(x)|^r \mathrm{d}x\right)^{(1-\lambda)q/r} \\ &= \|f\|_p^{\lambda q} \|f\|_r^{(1-\lambda)q}\end{aligned}$$

两边开 q 次方即得(1.2.10).

命题 1.2.9 若 $0 < p < q \leqslant \infty$,且 $|\Omega| < \infty$,则 $L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega)$,且

$$\|f\|_p \leqslant \|f\|_q(|\Omega|)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \tag{1.2.11}$$

证明　若 $q=\infty$,结论自然成立.

若 $q<\infty$,利用 Hölder 不等式即可得到(1.2.11).

1.2.2 L^p 空间的对偶空间

设 p,q 是互为共轭指数,Hölder 不等式说明了对每个 $g \in L^q(\Omega)$,由下式

$$\varphi_g(f)=\int_\Omega f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{1.2.12}$$

定义了 $L^p(\Omega)$ 上的一个线性连续泛函 φ_g,且其范数

$$\|\varphi_g\| = \sup_{\|f\|_p\neq 0}\frac{|\varphi_g(f)|}{\|f\|_p} = \sup\left\{\left|\int_\Omega fg\mathrm{d}x\right| \,\middle|\, \|f\|_p = 1\right\} \tag{1.2.13}$$

不超过 $\|g\|_q$,即

$$\|\varphi_g\| \leqslant \|g\|_q \tag{1.2.14}$$

其实,(1.2.14) 中的等号成立,即有下列命题 1.2.10.

命题 1.2.10　若 p 与 q 是互为共轭指数,$1\leqslant p\leqslant\infty$ 且 $g\in L^q(\Omega)$,则

$$\|\varphi_g\| = \|g\|_q$$

证明　只要证(1.2.14) 中相反的不等式. 当 $\|g\|_q=0$时等号显然成立;假设 $g\neq 0$且 $q<\infty$,令

$$f=\frac{|g|^{q-1}\mathrm{sgn}g}{\|g\|_q^{q-1}}$$

则

$$\|f\|_p^p = \frac{\int_\Omega |g|^{(q-1)p}\mathrm{d}x}{\|g\|_q^{(q-1)p}} = 1$$

且由(1.2.13) 知

$$\|\varphi_g\| \geqslant \int_\Omega fg\mathrm{d}x = \frac{\int_\Omega |g|^q\mathrm{d}x}{\|g\|_q^{q-1}} = \|g\|_q$$