



一级注册结构 工程师考试必读

湖南省土木建筑学会 编



一级注册结构工程师考试必读

湖南省土木建筑学会 编

中国建筑工业出版社

(京)新登字035号

本书是根据全国一级注册结构工程师考试大纲编写的。全书分三篇。第一篇为基础知识，包括数学、物理、化学、建筑材料、理论力学、材料力学、结构力学、流体力学、电工学以及工程经济等内容。第二篇为专业知识，包括结构设计的一般知识、混凝土结构、钢结构、砌体结构与木结构、桥梁结构、高层建筑结构、基础与挡土墙以及设计管理等内容。第三篇为习题与答案，对第一、二两篇中每一部分的基本内容列出了一些习题，并且给出了答案。该书内容全面，深入浅出，又有例题与习题相配合，便于读者自学。

本书不仅为土建设计人员提供了一部考前复习指导，也可供土建设计与施工技术人员、土建类大专院校师生学习参考。

一级注册结构工程师考试必读

湖南省土木建筑学会 编

*

中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）

新华书店 经销

北京市二二〇七工厂印刷

*

开本：787×1092毫米 1/16 印张：73 1/4 字数：1783千字

1997年2月第一版 1997年2月第一次印刷

印数：1—10000册 定价：90.00元

ISBN 7-112-03050-1

TU·2338 (8181)

版权所有 翻印必究

如有印装质量问题，可寄本社退换
(邮政编码 100037)

前　　言

为了提高设计质量和设计人员素质，深化设计体制改革，加强对设计市场的对外开放和开拓国际设计市场，加速与国际接轨，按照国际惯例，建立起符合我国国情的结构工程师注册制度是非常必要的。

它将加强对工程设计师的管理，提高工程设计的质量与水平，保障公民生命与财产安全，维护社会公共利益。它将进一步明确工程设计人员在工程设计中的义务、权力和法律责任。同时可以把单位质检管理和个人注册资格管理有机地结合起来，共同承担在工程设计中的法律责任。这是一种以法律手段进行管理的行之有效的办法。

在我国，在注册建筑师制度已顺利实施的情况下，对结构工程师进行注册管理已势在必行。为使有关设计人员能顺利通过国家一级结构工程师注册考试，湖南省土木建筑学会受湖南省建委的委托，组织全省的有关专家、学者和有丰富实践经验的高级工程技术人员，为迎接全国一级结构工程师注册考试而编写了这本书。

本书内容翔实。基本包括了国家一级结构工程师必须具备的基础知识和执业要求所必须掌握的应知应会的基本知识。在基本原理阐述上注意了实用性和系统性。它既是工程设计人员为通过国家考试而必读的一份综合性资料，也是各级管理人员、国家公务人员熟悉行业管理、提高自身素质的一份教材。

本书各章编写人员如下：第一篇“高等数学”编者刘楚中，“普通物理”编者黄秉曙，“化学”编者何双娥，“建筑材料”编者吴慧敏，“理论力学”编者周治国、宋福盘，“材料力学”编者韦德骏，“结构力学”编者王兰生，“流体力学”编者叶镇国，“电工学”编者方厚辉，“工程经济与建筑经济”编者邓铁军，“计算机与数值方法”编者何益斌，“工程测量”编者邹新运，“建筑施工与管理”编者余开华、肖洪，“建筑结构试验”编者王济川；第二篇“结构设计的一般知识”编者沈蒲生、田有盛，“混凝土结构”编者罗国强、邹仲康，“钢结构”编者刘健行、周绪红，“砌体结构与木结构”编者施楚贤、黄秉刚，“桥梁工程”编者邵旭东、周先雁、王锡坤，“高层建筑结构、高耸结构及横向作用”编者邹银生、刘健行、田有盛，“土力学与地基基础”编者王怡荪，“设计业务管理与职业法规”编者牛顺生、谭正炎。

本书作者在很短的时间里，利用业余时间，埋头编撰，倍尝辛劳，表现了崇高的责任感。湖南大学土木系主任、博士生导师沈蒲生教授为本书的编撰组稿、确定体例、统稿等作了大量的工作，为此，对他们的工作表示高度赞赏和感谢！

尽管我们作了很多努力，缺点和纰漏之处仍在所难免，恳请专家赐教。

湖南省建委副主任 匡彦博

1996年10月10日

《一级注册结构工程师考试必读》

编辑委员会

顾问：高锦屏 成文山

主任：匡彦博

副主任：张大刚

主编：沈蒲生

编辑委员(按姓氏笔画排列)：

牛顺生 王贻荪 田有盛 刘健行

吴慧敏 邹仲康 邹银生 林 勇

罗国强 施楚贤 黄秉刚 程世陵

目 录

第一篇 基 础 知 识

第一章 高等数学	3
第一节 函数及其连续性	3
第二节 微分学及其应用	5
第三节 积分学及其应用	14
第四节 无穷级数	23
第五节 常微分方程	28
第六节 矩阵计算与向量代数	35
第七节 概率论与数理统计	47
第二章 普通物理	61
第一节 热学	61
第二节 波动学	82
第三节 光学	93
第三章 化学	108
第一节 化学反应速率与化学平衡	108
第二节 化学热力学初步	112
第三节 溶液与离子平衡	116
第四节 氧化还原与电化学	124
第五节 原子结构与周期系	129
第六节 化学键与晶体结构	135
第七节 单质与无机化合物	140
第八节 配位化合物	146
第九节 有机化合物	152
第四章 建筑材料	163
第一节 材料的组成与结构概述	163
第二节 建筑材料的基本性质	166
第三节 无机胶凝材料	174
第四节 混凝土与砂浆	182
第五节 墙体材料	192
第六节 建筑钢材	197
第五章 理论力学	201
第一节 力的基本性质	201

第二节 物体的受力分析·受力图	204
第三节 平面力系	207
第四节 空间力系	219
第五节 点和刚体的运动学	226
第六节 动力学基本方程	241
第七节 动量定理与质心运动定理	244
第八节 动量矩定理	249
第九节 功与动能定理	252
第十节 达朗伯原理与动静法	259
第十一节 虚位移原理	264
第十二节 单自由度系统自由振动概要	267
第六章 材料力学	270
第一节 绪论	270
第二节 内力和内力图	273
第三节 材料的力学性质	281
第四节 平面图形的几何性质	283
第五节 杆件强度分析	286
第六节 应力状态和强度理论	293
第七节 组合变形下的强度计算	298
第八节 变形计算与刚度条件	302
第九节 能量法	305
第十节 超静定问题	310
第十一节 压杆稳定	314
第七章 结构力学	320
第一节 平面体系的几何组成分析	320
第二节 静定结构的内力计算	322
第三节 结构的位移计算	333
第四节 超静定结构的计算	340
第五节 影响线及其应用	358
第六节 结构的动力计算	368
第八章 流体力学	376
第一节 流体的物理性质	376
第二节 流体静力学原理	379
第三节 流体动力学原理	393

第四节	水流阻力和水头损失	406	第八节	地形图应用	594
第五节	有压管流及孔口管嘴	412	第九节	建筑工程测量	595
第六节	明渠均匀流	424	第十三章	建筑施工与管理	600
第七节	渗流定律、集水廊道和井	430	第一节	土石方工程、桩基础工程	600
第八节	相似原理和量纲分析	437	第二节	钢筋混凝土工程与预应力 混凝土工程	605
第九节	流体运动参数测量	447	第三节	结构吊装工程与砌体工程	611
第九章	电工学	456	第四节	防水工程	614
第一节	直流电路	456	第五节	装饰工程	615
第二节	正弦交流电路	460	第六节	施工组织设计	615
第三节	电路的暂态过程	469	第七节	流水施工原理	619
第四节	变压器与电动机及电动机 的继电接触器控制	471	第八节	网络计划技术	626
第五节	直流电源	477	第九节	施工管理	633
第六节	交流放大电路	481	第十四章	建筑结构试验	637
第七节	运算放大器	486	第一节	结构试验的试件设计、荷载设 计与观测设计	637
第八节	门电路和触发器	490	第二节	结构试验的加载设备和 量测仪器	642
第十章	工程经济与建筑经济	496	第三节	结构静力加载试验	653
第一节	现金流量与资金时间价值	496	第四节	结构低周反复加载试验	656
第二节	建设项目评价	500	第五节	结构动力试验	661
第三节	敏感度和风险决策	504	第六节	模型试验	665
第四节	预测	507	第七节	结构试验的非破损检测技术	667
第五节	建筑设计方案与施工方案的 评价	510	第二篇 专业知识		
第六节	价值工程(VE)	511	第一章	结构设计的一般知识	673
第七节	工程造价	514	第一节	基本知识	673
第八节	工程招投标	521	第二节	结构用材料的选用及设计 指标取值	680
第九节	工程合同与工程索赔	527	第三节	荷载	683
第十节	工程成本与资源控制	534	第四节	概率极限状态设计法	686
第十一节	计算示例	536	第五节	变形缝	691
第十一章	计算机与数值方法	540	第六节	结构的防火与防腐	695
第一节	计算机基础知识	540	第二章	混凝土结构	702
第二节	DOS 操作系统	544	第一节	混凝土与钢筋的材料性能及 其共同工作	702
第三节	计算机程序设计语言	547	第二节	受弯构件承载力的计算与构造	709
第四节	数值方法	559	第三节	结构构件的裂缝控制和受弯 构件的变形验算	717
第十二章	工程测量	574	第四节	受扭构件的计算与构造	720
第一节	测量基本概念	574	第五节	受压构件的计算与构造	724
第二节	水准测量	576	第六节	受拉构件的计算	732
第三节	角的测量	578			
第四节	距离测量	582			
第五节	测量误差基本知识	585			
第六节	控制测量	587			
第七节	地形图测绘	591			

第七节	预应力混凝土结构	735	第七节	筒体结构设计	959
第八节	混凝土梁板结构	739	第八节	底层大空间剪力墙结构设计	961
第九节	混凝土单层工业厂房结构	749	第九节	高耸结构	965
第三章	钢结构	757	第七章	土力学与地基基础	976
第一节	钢结构的材料	757	第一节	地基勘察与地基土工程性质	976
第二节	钢结构的连接	763	第二节	地基与基础设计的基本规定	980
第三节	基本构件设计	772	第三节	基础埋置深度的选择及地基 承载力的确定	982
第四节	钢屋盖结构	783	第四节	地基计算	984
第五节	钢结构的塑性设计	788	第五节	基础设计（一）	986
第六节	钢—混凝土组合结构	789	第六节	基础设计（二）	989
第七节	钢贮仓结构	791	第七节	基础设计（三）	999
第八节	钢结构的制造、运输和安装 对设计的要求	799	第八节	特殊土地基及山区地基	1004
第四章	砌体结构与木结构	800	第九节	地基处理与基础托换	1006
第一节	砌体的力学性能	800	第十节	挡土墙	1009
第二节	砌体墙、柱的承载力计算	803	第八章	设计业务管理与职业法规	1019
第三节	混合结构房屋墙、柱设计	809	第一节	设计前期工作	1019
第四节	墙梁及挑梁的设计	823	第二节	设计工作	1022
第五节	配筋砌体结构设计	829	第三节	设计合同与设计收费	1026
第六节	木材的力学性能	835	第四节	职工职业道德准则	1027
第七节	木结构设计	837	第五节	设计管理工作	1028
第八节	砌体结构与木结构房屋的 抗震设计	843	第六节	注册结构工程师的义务、权力与 责任	1037
第五章	桥梁工程	851	第七节	工程设计招标与投标	1038
第一节	桥梁设计的基本内容与原则	851	第八节	职业法规	1040
第二节	梁式桥	854	第三篇 习题与答案		
第三节	拱桥	863	第一章	习题	1061
第四节	刚架桥	869	第一节	高等数学习题	1061
第五节	斜拉桥和悬索桥	873	第二节	普通物理习题	1064
第六节	桥梁墩台与基础	879	第三节	化学习题	1068
第七节	桥梁的施工	896	第四节	建筑材料习题	1071
第八节	桥梁的结构设计	900	第五节	理论力学习题	1076
第六章	高层建筑结构、高耸结构及 横向作用	905	第六节	材料力学习题	1079
第一节	高层建筑结构方案选择与 结构布置	905	第七节	结构力学习题	1086
第二节	高层建筑结构荷载与设计要求	911	第八节	流体力学习题	1092
第三节	高层建筑结构内力和位移计算 的一般原则	924	第九节	电工学习题	1096
第四节	框架结构设计	928	第十节	工程经济与建筑经济习题	1101
第五节	剪力墙结构设计	944	第十一节	计算机与数值方法习题	1103
第六节	框架—剪力墙结构设计	956	第十二节	工程测量习题	1104
			第十三节	建筑施工习题	1106
			第十四节	建筑结构试验习题	1109

第十五节	结构设计的一般知识习题	1112	第二十一节	土力学与地基基础习题	1132
第十六节	混凝土结构习题	1114	第二十二节	设计业务管理与职业法规		
第十七节	钢结构习题	1118		习题	1133
第十八节	砌体结构与木结构习题	1121	第二章	答案	1136
第十九节	桥梁工程习题	1128	附表	1142
第二十节	高层建筑结构、高耸结构及 横向作用习题	1130	主要参考文献	1160

第一篇 基 础 知 识

第一章 高 等 数 学

第一节 函数及其连续性

一、函数的概念

具有某种属性的事物的全体称为集合，组成集合的事物称为集合的元素。设有集合 A 和 B ，若 $x \in A$ 时，必有 $x \in B$ ，则称 A 为 B 的子集，记为 $A \subset B$ 。若 $A \subset B$ 且 $B \subset A$ ，则称 A 与 B 相等，记为 $A = B$ 。集合可进行并、交、差等运算。空集 \emptyset 是不含任何元素的集合。

设 A, B 为两非空集。若 $\forall x \in A$ ，按照规则 f ，存在唯一的 $y \in B$ 与 x 对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记为 $f: x \rightarrow y$ ，或 $y = f(x)$ ， $x \in A$ 。其中 A 称为 f 的定义域。若 A, B 为两个非空实数集，则称 A 到 B 的映射 f 为定义在 A 上的函数，记为 $y = f(x)$ 。 A 称为函数 f 的定义域； $x \in A$ 所对应的 $y \in B$ 称为 x 所对应的函数值。对应规则和定义域是函数的两大要素。通常按使函数的表达式有意义，以及物理意义和几何意义等来确定函数的定义域。

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数。此外，在工程中还常遇到分段函数，它是在定义域的一些不重叠的真子集上，用不同公式表示的函数。

常用到的函数的简单性质有：单调性、有界性、奇偶性、周期性。

二、函数的极限

极限描述变量的变化趋势。函数有 $x \rightarrow \infty$ 和 $x \rightarrow x_0$ 两大类极限过程。

若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists X > 0$, 使当 $|x| > X$ ($x > X$, $x < -X$) 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow \infty$ ($x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$) 时以 a 为极限, 记为 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$ ($\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = a$)。

若 $\forall \epsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ ($0 < x - x_0 < \delta$, $0 < x_0 - x < \delta$) 时, 有 $|f(x) - a| < \epsilon$ 成立, 则称 $f(x)$ 当 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$) 时以 a 为极限(右极限, 左极限), 记为 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a$ ($\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = a$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$)。

对于数列 $\{x_n\}$, $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ 是指 $\forall \epsilon > 0$, $\exists N > 0$ (N 为正整数), 当 $n > N$ 时, 有 $|x_n - a| < \epsilon$ 。

函数的极限与其左、右极限有如下关系:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = a$$

在某极限过程中以零为极限的量称为无穷小量。若 $f(x)$ 是 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷

小量，且 $f(x) \neq 0$ ，则 $1/f(x)$ 就是 $x \rightarrow x_0$ ($x \rightarrow \infty$) 时的无穷大量。在同一个极限过程中，函数的极限与无穷小量有如下关系：

$$\lim f(x) = a \Leftrightarrow f(x) = a + o(x)$$

其中， $o(x)$ 为该极限过程中的无穷小量。

在同一极限过程中有极限的量具有以下运算性质：设 $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$, 则

$$(1) \lim(f(x) \pm g(x)) = \lim f(x) \pm \lim g(x) = a \pm b;$$

$$(2) \lim f(x)g(x) = \lim f(x)\lim g(x) = ab;$$

$$(3) \lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)} = \frac{a}{b} \quad (b \neq 0);$$

$$(4) \text{若 } f(x) \geq 0, \text{ 则 } \lim f(x) = a \geq 0;$$

$$(5) \text{有极限的量在该极限过程中有界};$$

$$(6) \lim kf(x) = k \lim f(x) = ka, \quad (k \text{ 为常数})。$$

常用的求极限的方法有以下九种：

(1) 利用极限的定义，特别是分段函数在分段点处的极限。

(2) 利用极限存在准则：夹逼定理、单调有界数列必有极限。

(3) 运用等价无穷小替代。

(4) 运用罗必塔法则求不定型的极限。

(5) 利用两个重要极限： $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$ 。

(6) 利用变量代换。

(7) 在求极限前对函数作适当的初等变形。

(8) 利用级数收敛的必要条件。

(9) 运用其它方法(如泰勒公式，积分等)。

三、函数的连续性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D , $x_0 \in D$ 且为 D 的聚点。若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = f(x_0)$ 或 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = f(x_0)$, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均连续(对区间端点应理解为左或右连续)，则称 $f(x)$ 在 I 上连续。也可以运用增量来描述连续性： $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \Delta y = 0$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = f(x) - f(x_0)$ 。

由连续性的定义可知：基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其有定义的区间内连续；连续函数具有保号性；连续函数间进行四则运算后仍得到连续函数；构成复合函数的各函数有相应的连续性时，则复合函数也连续；若函数在区间 I 上单调且连续，则其反函数在相应区间 I' 上单调且连续。

若 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点。当 $f(x)$ 在其间断点 x_0 处有左、右极限时，称 x_0 为第一类间断点。特别称左、右极限存在且相等的第一类间断点为可去间断点；当 $f(x)$ 在其间断点 x_0 处左、右极限至少有一个不存在时，称 x_0 为第二类间断点。

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数具有以下性质：

1. 根存在定理：若 $f(x) \in C([a, b])$, 且 $f(a) \cdot f(b) < 0$, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使 $f(x_0) = 0$ 。

2. 介值定理：若 $f(x) \in C([a, b])$, 且 $f(a) \neq f(b)$, 则 $\forall C, \min\{f(a), f(b)\} < C < \max\{f(a), f(b)\}$, 则至少存在一点 $x_0 \in (a, b)$, 使得 $f(x_0) = C$.

3. 最值定理：若 $f(x) \in C([a, b])$, 则 $f(x)$ 一定在 $[a, b]$ 上取得最大值和最小值。

函数 $f(x)$ 在区间 I 上连续, 记为 $f(x) \in C(I)$.

第二节 微分学及其应用

一、一元函数微分学

(一) 一元函数的导数和微分

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 若极限

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1-1-1)$$

存在, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x_0 处的导数, 记为 $f'(x_0)$, $y' \Big|_{x=x_0}$ 或 $\frac{df(x_0)}{dx}$, $\frac{dy}{dx} \Big|_{x=x_0}$ 等。此时称 $f(x)$ 在点 x_0 可导。

将(1-1-1)式中的极限换成左、右极限, 则得到左导数和右导数的定义:

$$f'_-(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1-1-2)$$

$$f'_+(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \quad (1-1-3)$$

$f(x)$ 在点 x_0 可导的充要条件是 $f'_-(x_0) = f'_+(x_0)$ 成立。

若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均可导(端点处应理解为左、右导数), 则称 $f(x)$ 在 I 上可导。称 $f'(x)$, $x \in I$ 为 $f(x)$ 在 I 上的导函数, 简称导数, 记为 y' , $\frac{df}{dx}$, $\frac{dy}{dx}$ 等。此时

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \quad x \in I \quad (1-1-4)$$

显然, $f'(x_0) = f'(x) \Big|_{x=x_0}$, 且 $f(x)$ 在点 x_0 可导则必在 x_0 连续。

$f(x)$ 在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$ 就是曲线 $y = f(x)$ 在对应点 $A(x_0, y_0)$ 处的切线的斜率。

求导数是一种重要的分析运算, 是高等数学中最基本的技能之一。现将常用的求导方法归纳如下:

(1) 利用导数的定义求导。

(2) 利用基本导数公式表和导数的四则运算法则求导(有关公式请参看同济大学编:高等数学(第三版)上册 高等教育出版社)。

(3) 利用链导法则求复合函数的导数: 若 $u = \varphi(x)$ 在点 x 处可导, $y = f(u)$ 在相应点 u 可导, 则复合函数 $y = f(\varphi(x))$ 在点 x 可导, 且 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx}$, 或记为 $[f(\varphi(x))]' = f'(\varphi(x))\varphi'(x)$ 。

(4) 反函数求导法: 若 $y = f(x)$ 与 $x = \varphi(y)$ 互为反函数, $f(x)$ 在点 x 可导, $\varphi(y)$ 在

相应点 y 处可导，且 $\frac{dx}{dy} = \varphi'(y) \neq 0$ ，则 $\frac{dy}{dx} = 1 / \frac{dx}{dy}$ ，或记为 $f'(x) = 1 / \varphi'(y)$ 。

(5) 参数方程求导法：设 $y = f(x)$ 的参数方程形式为 $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, 当 $t \in I$ 时, $\varphi(t)$ 与 $\psi(t)$ 均可导, 则 $\frac{dy}{dx} = \psi'(t) / \varphi'(t)$ 。

(6) 隐函数求导法：若方程 $F(x, y) = 0$ 确定了隐函数 $y = f(x)$, 则由 $F(x, f(x)) \equiv 0$ 两边关于 x 求导(若可导), 并运用复合函数求导法则, 就可求得 $f'(x)$ 。

(7) 取对数求导法：在求幂指函数、某些幂函数、连乘积、带根号的函数的导数时, 可以采用先取对数后求导的方式进行。

(8) 求函数的高阶导数：若 $f(x)$ 在 $U(x)$ 内可导, 且极限 $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f'(x + \Delta x) - f'(x)}{\Delta x}$ 存在, 则称该极限值为 $f(x)$ 在点 x 的二阶导数。一般说来, $f(x)$ 的 $n-1$ 阶导数仍是 x 的函数, 若它可导, 则该导数就是原来函数的 n 阶导数, 记为 $y^{(n)}$, $f^{(n)}(x)$, $\frac{d^n y}{dx^n}$, $\frac{d^n f}{dx^n}$ 及 $y^{(n)} = (y^{(n-1)})'$, $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$ 等。求一个函数的高阶导数, 只需运用上述(1)一(7)求一阶导数的法则, 逐阶求导即可, 但在计算过程中要注意分析归纳, 找出规律, 写出 n 阶导数的表达式。

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 有定义, $x_0 + \Delta x \in U(x_0)$, 如果 $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ 可表示为

$$\Delta y = A \Delta x + o(\Delta x) \quad (1-1-5)$$

其中, A 是不依赖于 Δx 的常数, $o(\Delta x)$ 为比 Δx 高阶的无穷小, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 可微, $dy = A \Delta x$ 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点可微, 则称 $f(x)$ 在 I 上可微。

$f(x)$ 在点 x_0 可微 $\Leftrightarrow f(x)$ 在点 x_0 可导。

记 $\Delta x = dx$, 则 $dy = A \Delta x = f'(x_0) dx$ (即 $A = f'(x_0)$)。函数的可微性与可导性是等价的, 函数的微分运算方法就是函数求导数的方法。

不论 u 是中间变量还是自变量, 函数 $f(u)$ 的一阶微分具有形式不变性:

$$dy = f'(u) du.$$

与高阶导数类似, 也可以定义高阶微分:

$$d^n y = d(d^{n-1} y).$$

二阶及二阶以上的微分不具备微分形式不变性。

(二) 微分中值定理

微分中值定理奠定了由导数研究函数的理论基础。

(1) 罗尔(Rolle)定理: 若 $f(x) \in C([a, b])$, 在 (a, b) 内可导, 且 $f(a) = f(b)$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使 $f'(\xi) = 0$ 。

(2) 拉格朗日(Lagrange)中值定理: 若 $f(x) \in C([a, b])$, 在 (a, b) 内可导, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得 $f(b) - f(a) = f'(\xi)(b - a)$ 。

拉格朗日中值定理的表达式还可以写成其它形式, 例如写成有限增量形式:

$$f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x + \theta \Delta x) \Delta x \quad 0 < \theta < 1$$

式中, x 与 $x + \Delta x$ 为 (a, b) 内的任意两点。

由拉格朗日中值定理容易证明：若 $f(x)$ 在区间 I 上的导数恒等于零，则 $f(x)$ 在 I 上为常数。

(3) 柯西(Cauchy)中值定理：若 $f(x), g(x) \in C([a, b])$, 在 (a, b) 内可导，且 $g'(x) \neq 0$, 则 $\exists \xi \in (a, b)$, 使得

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad (1-1-7)$$

由柯西中值定理导出的罗必塔法则是求不定型的极限的主要方法。

(4) 泰勒(Taylor)公式：若 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有 $n+1$ 阶导数，则 $\forall x \in U(x_0)$, 有

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k + R_n(x) \quad (1-1-8)$$

该公式称为 $f(x)$ 的泰勒公式, $R_n(x)$ 称为余项, 常用的余项是拉格朗日余项 $R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(x_0 + \theta(x - x_0))}{(n+1)!} (x - x_0)^{n+1}$, $0 < \theta < 1$ 。

在泰勒公式(1-1-8)中, 取 $x_0 = 0$ 就得到工程中常用的麦克劳林公式

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + R_n(x)$$

二、一元微分学的应用

(一) 函数的单调性与极值

设 $f(x)$ 在区间 I 上有定义, $\forall x_1, x_2 \in I$, 当 $x_2 > x_1$ 时, 若恒有 $f(x_2) > f(x_1)$ (或 $f(x_2) < f(x_1)$), 则称 $f(x)$ 在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。单调性是一个局部性的概念。

设 $f(x)$ 在区间 I 上可导, $\forall x \in I$, 若 $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在区间 I 上单调增加(减少)。在区间上个别点处出现 $f'(x) = 0$, 上述结论仍成立。例如, $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内满足 $y' = 3x^2 > 0$ ($x \neq 0$ 时), $y' = 0$ ($x = 0$ 时), 故可判断 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内单调增加。

求函数的极值是数学和工程中的重要问题之一。设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有定义, 若 $\forall x \in U(x_0)$, 且 $x \neq x_0$, 有 $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$), 则称 $f(x)$ 在点 x_0 取得极大值(极小值) $f(x_0)$, x_0 称为极大值(极小值)点。极大值和极小值统称为函数的极值, 它是一个局部性的概念。

若 $f(x)$ 在点 x_0 处取极值, $f'(x_0)$ 存在, 则必有 $f'(x_0) = 0$ 。使得 $f'(x) = 0$ 的点称为函数 $f(x)$ 的驻点。驻点和使 $f'(x)$ 不存在的点为函数在区间 I 上的极值可疑点。可以利用函数的一、二阶导数来判别可疑点是否确为极值点:

设 $f(x) \in C(U(x_0))$, 在 $U(x_0)$ 内可导。在 $U(x_0)$ 内, 若 $x < x_0$ 时, $f'(x) > 0$ (或 $f'(x) < 0$), $x > x_0$ 时, $f'(x) < 0$ (或 $f'(x) > 0$), 则 $f(x)$ 在 x_0 取得极大值(或极小值)。

设 $f(x)$ 在 $U(x_0)$ 内具有二阶导数, 且 $f'(x_0) = 0$, 则当 $f''(x_0) < 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 取得极大值; 当 $f''(x_0) > 0$ 时, $f(x)$ 在 x_0 取得极小值。

函数 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大值和最小值可由如下方法求得

$$\max_{x \in [a, b]} f(x) = \max \{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

$$\min_{x \in [a, b]} f(x) = \min \{f(a), f(b), f(x_1), \dots, f(x_n)\}$$

其中, x_1, \dots, x_n 为 $f(x)$ 在 (a, b) 内的所有极值可疑点。

在工程中经常遇到最优化问题, 这类问题可归结为求某函数(称为目标函数)的最值或最值点(称为最优解)。在求解工程中的最值问题时, 下面的结论特别有用:

(1) 若 $f(x) \in C([a, b])$, 且在 (a, b) 内只有唯一一个极值点 x_0 , 则当 $f(x_0)$ 为极大(小)值时, 它就是 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的最大(小)值。

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上单调增加(减少), 则 $f(a)$ 为其最小(大)值; $f(b)$ 为其最大(小)值。

(二) 曲线的凸凹性

设 $f(x) \in C([a, b])$, 若 $\forall x_1, x_2 \in (a, b)$, 恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) < \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹的; 若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) > \frac{1}{2}[f(x_1) + f(x_2)]$, 则称 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凸的。

通常运用函数 $f(x)$ 的二阶导数来判别其图形的凸凹性: 设 $f(x) \in C([a, b])$, 在 (a, b) 内有二阶导数。若 $f''(x) > 0$ ($f''(x) < 0$), 则 $f(x)$ 在 $[a, b]$ 上的图形是凹(凸)的。

将闭区间 $[a, b]$ 换成其他类型区间, 或者出现 $f''(x)$ 在 (a, b) 内个别点处等于零, 上述的判别凹凸性的方法仍成立。

连续函数的图形上, 凹弧与凸弧的分界点称为函数图形的拐点。

若 $f(x) \in C((a, b))$, 则使得 $f''(x) = 0$ 或 $f''(x)$ 不存在的点为 $f(x)$ 图形的拐点可疑点。根据可疑点左右两侧 $f''(x)$ 的符号来判断 $f(x)$ 图形的凹凸性, 然后决定可疑点是否确为 $f(x)$ 图形的拐点。

(三) 曲线的渐近线及函数图形的描绘

渐近线反映曲线无限延伸时的走向和趋势。曲线 C 上的动点 M 沿曲线离开坐标原点无限远移时, 若与某一直线 l 的距离趋于零, 则称直线 l 为曲线 C 的一条渐近线。确定曲线 $y = f(x)$ 的渐近线的方法如下:

若 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \infty$, 则曲线 $y = f(x)$ 有一铅直渐近线 $x = x_0$; 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, 则曲线 $y = f(x)$ 有一水平渐近线 $y = a$; 若 $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)/x = a$, 且 $\lim_{x \rightarrow \infty} [f(x) - ax] = b$, 则曲线 $y = f(x)$ 有一斜渐近线 $y = ax + b$ 。

根据函数的定义域、连续性、单调性、凹凸性、极值、拐点等等便可较准确地绘制函数的图形。作函数 $f(x)$ 图形的步骤如下:

(1) 确定 $f(x)$ 的定义域, 并讨论其奇偶性、连续性、周期性等;

(2) 求出 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的全部零点及其不存在的点, 并以它们为分点将定义域分成小区间;

(3) 确定各小区间内 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的符号, 并由此求出 $f(x)$ 的增减区间、极值点、凸凹区间和拐点;

(4) 求 $f(x)$ 的渐近线, 或其它变化趋势;

(5) 综合(1)—(4), 列表并绘出 $f(x)$ 的图形。

(四) 曲率