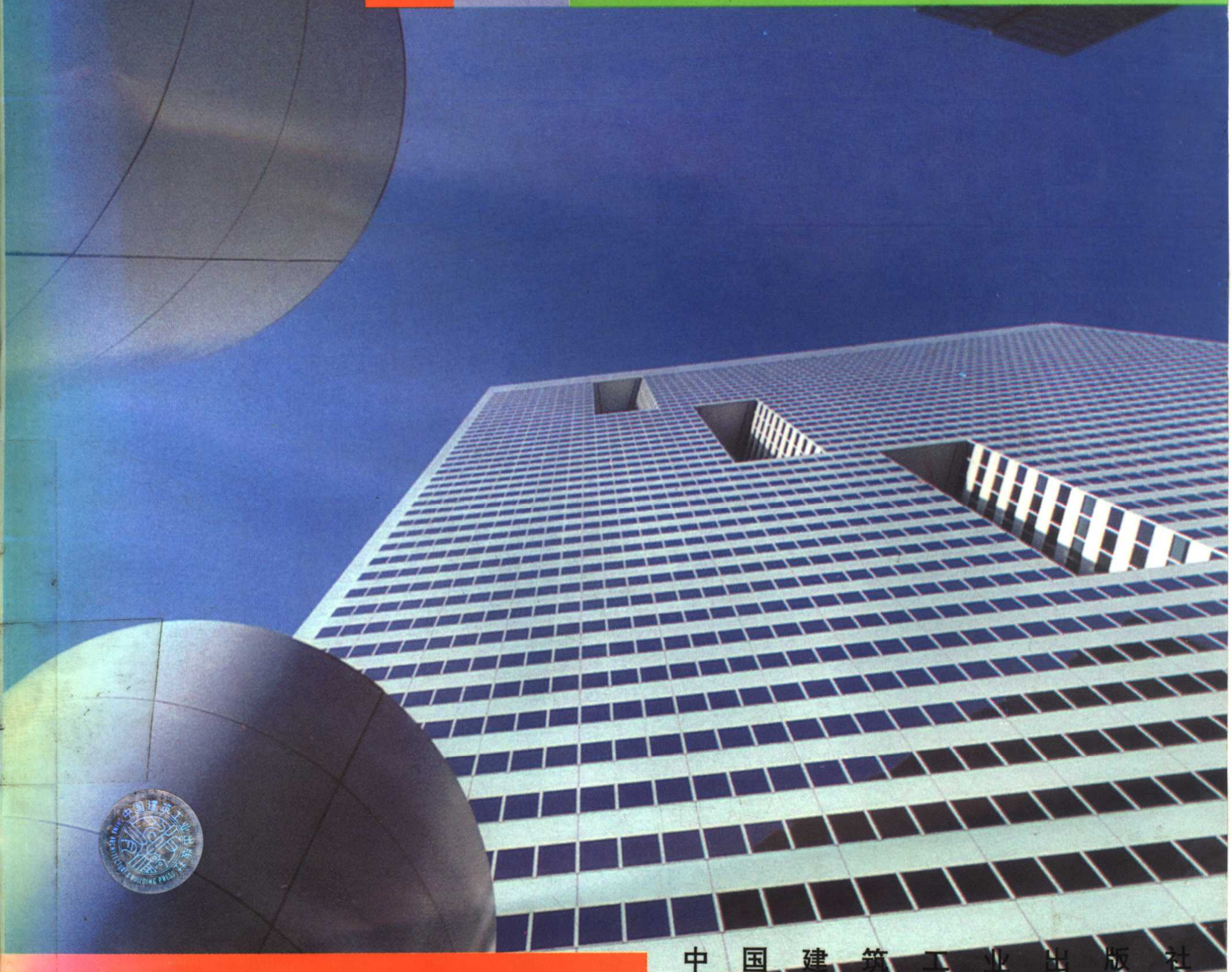
一级注册结构工程师考试必读

湖南省土木建筑学会　编



中国建筑工业出版社

一级注册结构工程师考试必读

湖南省土木建筑学会　编

中国建筑工业出版社

(京）新登字035号

本书是根据全国一级注册结构工程师考试大纲编写的。全书分三篇。第一篇为基础知识，包括数学、物理、化学、建筑材料、理论力学、材料力学、结构力学、流体力学、电工学以及工程经济等内容。第二篇为专业知识，包括结构设计的一般知识、混凝土结构、钢结构、砌体结构与木结构、桥梁结构、高层建筑结构、基础与挡土墙以及设计管理等内容。第三篇为习题与答案，对第一、二两篇中每一部分的基本内容列出了一些习题，并且给出了答案。该书内容全面，深入浅出，又有例题与习题相配合，便于读者自学。

本书不仅为土建设计人员提供了一部考前复习指导，也可供土建设计与施工技术人员、土建类大专院校师生学习参考。

一级注册结构工程师考试必读
湖南省土木建筑学会　编
*
中国建筑工业出版社出版、发行（北京西郊百万庄）
新　华　书　店　经　销
北京市二二〇七工厂印刷
*
开本：787×1092毫米 1/16　印张：73¼　字数：1783千字
1997年2月第一版　　1997年2月第一次印刷
印数：1—10000册　　定价：90.00元
ISBN 7-112-03050-1
TU·2338（8181）

前　言

为了提高设计质量和设计人员素质，深化设计体制改革，加强对外开放和开拓国际设计市场，加速与国际接轨，按照国际惯例，建立起符合我国国情的结构工程师注册制度是非常必要的。

它将加强对工程设计师的管理，提高工程设计的质量与水平，保障公民生命与财产安全，维护社会公共利益。它将进一步明确工程设计人员在工程设计中的义务、权力和法律责任。同时可以把单位质检管理和个人注册资格管理有机地结合起来，共同承担在工程设计中的法律责任。这是一种以法律手段进行管理的行之有效的办法。

在我国，在注册建筑师制度已顺利实施的情况下，对结构工程师进行注册管理已势在必行。为使有关设计人员能顺利通过国家一级结构工程师注册考试，湖南省土木建筑学会受湖南省建委的委托，组织全省的有关专家、学者和有丰富实践经验的高级工程技术人员，为迎接全国一级结构工程师注册考试而编写了这本书。

本书内容翔实。基本包括了国家一级结构工程师必须具备的基础知识和执业要求所必须掌握的应知应会的基本知识。在基本原理阐述上注意了实用性和系统性。它既是工程设计人员为通过国家考试而必读的一份综合性资料，也是各级管理人员、国家公务人员熟悉行业管理、提高自身素质的一份教材。

本书各章编写人员如下：第一篇“高等数学”编者刘楚中，“普通物理”编者黄秉曙，“化学”编者何双娥，“建筑材料”编者吴慧敏，“理论力学”编者周治国、宋福盘，“材料力学”编者韦德骏，“结构力学”编者王兰生，“流体力学”编者叶镇国，“电工学”编者方厚辉，“工程经济与建筑经济”编者邓铁军，“计算机与数值方法”编者何益斌，“工程测量”编者邹新运，“建筑施工与管理”编者佘开华、肖洪，“建筑结构试验”编者王济川；第二篇“结构设计的一般知识”编者沈蒲生、田有盛，“混凝土结构”编者罗国强、邹仲康，“钢结构”编者刘健行、周绪红，“砌体结构与木结构”编者施楚贤、黄秉刚，“桥梁工程”编者邵旭东、周先雁、王锡坤，“高层建筑结构、高耸结构及横向作用”编者邹银生、刘健行、田有盛，“土力学与地基基础”编者王怡荪，“设计业务管理与职业法规”编者牛顺生、谭正炎。

本书作者在很短的时间里，利用业余时间，埋头编撰，倍尝辛劳，表现了崇高的责任感。湖南大学土木系系主任、博士生导师沈蒲生教授为本书的编撰组稿、确定体例、统稿等作了大量的工作，为此，对他们的工作表示高度赞赏和感谢！

尽管我们作了很大努力，缺点和纰漏之处仍在所难免，恳请专家赐教。

湖南省建委副主任　匡彦博

1996 年 10 月 10 日

《一级注册结构工程师考试必读》

编 辑 委 员 会

顾　问：高锦屏　成文山

主　任：匡彦博

副主任：张大刚

主　编：沈蒲生

编辑委员(按姓氏笔画排列)：

牛顺生　王贻荪　田有盛　刘健行

吴慧敏　邹仲康　邹银生　林　勇

罗国强　施楚贤　黄秉刚　程世陵

目　录

第二篇　专业知识

第三篇　习题与答案

第一篇　基础知识

第一章 高 等 数 学

第一节 函数及其连续性

一、函数的概念

具有某种属性的事物的全体称为集合，组成集合的事物称为集合的元素。设有集合 A 和 B，若 $x\in A$ 时，必有 $x\in B$，则称 A 为 B 的子集，记为 $A\subset B$。若 $A\subset B$ 且 $B\subset A$，则称 A 与 B 相等，记为 $A=B$。集合可进行并、交、差等运算。空集 $\varnothing$ 是不含任何元素的集合。

设 A，B 为两非空集。若 $\forall x\in A$，按照规则 f，存在唯一的 $y\in B$ 与 x 对应，则称 f 为从 A 到 B 的映射，记为 $f:x\to y$，或 $y=f(x)$，$x\in A$。其中 A 称为 f 的定义域。若 A，B 为两个非空实数集，则称 A 到 B 的映射 f 为定义在 A 上的函数，记为 $y=f(x)$。A 称为函数 f 的定义域；$x\in A$ 所对应的 $y\in B$ 称为 x 所对应的函数值。对应规则和定义域是函数的两大要素。通常按使函数的表达式有意义，以及物理意义和几何意义等来确定函数的定义域。

由基本初等函数经过有限次四则运算和复合运算所得到的函数称为初等函数。此外，在工程中还常遇到分段函数，它是在定义域的一些不重叠的真子集上，用不同公式表示的函数。

常用到的函数的简单性质有：单调性、有界性、奇偶性、周期性。

二、函数的极限

极限描述变量的变化趋势。函数有 $x\to\infty$ 和 $x\to x_0$ 两大类极限过程。

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists X>0$，使当 $|x|>X$（$x>X$，$x<-X$）时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to\infty$（$x\to+\infty$，$x\to-\infty$）时以 a 为极限，记为 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$（$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=a$）。

若 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$（$0<x-x_0<\delta$，$0<x_0-x<\delta$）时，有 $|f(x)-a|<\varepsilon$ 成立，则称 $f(x)$ 当 $x\to x_0$（$x\to x_0^+$，$x\to x_0^-$）时以 a 为极限（右极限，左极限），记为 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=a$（$\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=a$，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=a$）。

对于数列 $\{x_n\}$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$ 是指 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$（N 为正整数），当 $n>N$ 时，有 $|x_n-a|<\varepsilon$。

函数的极限与其左、右极限有如下关系：

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=a\Longleftrightarrow\lim_{x\to x_0^+}f(x)=\lim_{x\to x_0^-}f(x)=a$$

在某极限过程中以零为极限的量称为无穷小量。若 $f(x)$ 是 $x\to x_0$（$x\to\infty$）时的无穷

小量，且 $f(x)\neq 0$，则 $1/f(x)$ 就是 $x\to x_0(x\to\infty)$ 时的无穷大量。在同一个极限过程中，函数的极限与无穷小量有如下关系：

$$\lim f(x)=a \Longleftrightarrow f(x)=a+\alpha(x)$$

其中，$\alpha(x)$ 为该极限过程中的无穷小量。

在同一极限过程中有极限的量具有以下运算性质：设 $\lim f(x)=a$，$\lim g(x)=b$，则

(1) $\lim(f(x)\pm g(x))=\lim f(x)\pm\lim g(x)=a\pm b$；

(2) $\lim f(x)g(x)=\lim f(x)\lim g(x)=ab$；

(3) $\lim\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\dfrac{a}{b}\qquad(b\neq 0)$；

(4) 若 $f(x)\geqslant 0$，则 $\lim f(x)=a\geqslant 0$；

(5) 有极限的量在该极限过程中有界；

(6) $\lim kf(x)=k\lim f(x)=ka$，(k 为常数)。

常用的求极限的方法有以下九种：

(1) 利用极限的定义，特别是分段函数在分段点处的极限。

(2) 利用极限存在准则：夹逼定理、单调有界数列必有极限。

(3) 运用等价无穷小替代。

(4) 运用罗必塔法则求不定型的极限。

(5) 利用两个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$，$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$。

(6) 利用变量代换。

(7) 在求极限前对函数作适当的初等变形。

(8) 利用级数收敛的必要条件。

(9) 运用其它方法(如泰勒公式，积分等)。

三、函数的连续性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，$x_0\in D$ 且为 D 的聚点。若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 连续。若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$ 或 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 处右连续或左连续。若 $f(x)$ 在区间 I 上每一点均连续(对区间端点应理解为左或右连续)，则称 $f(x)$ 在 I 上连续。也可以运用增量来描述连续性：$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y=0$，$\Delta x=x-x_0$，$\Delta y=f(x)-f(x_0)$。

由连续性的定义可知：基本初等函数在其定义域内连续；初等函数在其有定义的区间内连续；连续函数具有保号性；连续函数间进行四则运算后仍得到连续函数；构成复合函数的各函数有相应的连续性时，则复合函数也连续；若函数在区间 I 上单调且连续，则其反函数在相应区间 I' 上单调且连续。

若 $f(x)$ 在点 x_0 处不连续，则称 x_0 为 $f(x)$ 的一个间断点。当 $f(x)$ 在其间断点 x_0 处有左、右极限时，称 x_0 为第一类间断点。特别称左、右极限存在且相等的第一类间断点为可去间断点；当 $f(x)$ 在其间断点 x_0 处左、右极限至少有一个不存在时，称 x_0 为第二类间断点。

闭区间 $[a, b]$ 上的连续函数具有以下性质：

1. 根存在定理：若 $f(x)\in C([a, b])$，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $x_0\in(a, b)$，使 $f(x_0)=0$。

2. 介值定理：若 $f(x)\in C([a,b])$，且 $f(a)\neq f(b)$，则 $\forall C$，$\min\{f(a),f(b)\}<C<\max\{f(a),f(b)\}$，则至少存在一点 $x_0\in(a,b)$，使得 $f(x_0)=C$.

3. 最值定理：若 $f(x)\in C([a,b])$，则 $f(x)$一定在$[a,b]$上取得最大值和最小值。

函数 $f(x)$在区间 I 上连续，记为 $f(x)\in C(I)$.

第二节 微分学及其应用

一、一元函数微分学

(一)一元函数的导数和微分

设 $f(x)$在 $U(x_0)$内有定义，若极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-1-1}$$

存在，则称该极限值为 $f(x)$在点 x_0 处的导数，记为 $f'(x_0)$，$y'\Big|_{x=x_0}$或$\dfrac{\mathrm{d}f(x_0)}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\Big|_{x=x_0}$等。此时称 $f(x)$在点 x_0 可导。

将(1-1-1)式中的极限换成左、右极限，则得到左导数和右导数的定义：

$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0^-}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-1-2}$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0^+}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \tag{1-1-3}$$

$f(x)$在点 x_0 可导的充要条件是 $f'_-(x_0)=f'_+(x_0)$成立。

若 $f(x)$在区间 I 上每一点均可导(端点处应理解为左、右导数)，则称 $f(x)$在 I 上可导。称 $f'(x)$，$x\in I$ 为$f(x)$在 I 上的导函数，简称导数，记为 y'，$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$，$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$等。此时

$$f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\qquad x\in I \tag{1-1-4}$$

显然，$f'(x_0)=f'(x)\Big|_{x=x_0}$，且 $f(x)$在点 x_0 可导则必在 x_0 连续。

$f(x)$在点 x_0 处的导数 $f'(x_0)$就是曲线 $y=f(x)$在对应点 $A(x_0,y_0)$处的切线的斜率。

求导数是一种重要的分析运算，是高等数学中最基本的技能之一。现将常用的求导方法归纳如下：

(1) 利用导数的定义求导。

(2) 利用基本导数公式表和导数的四则运算法则求导(有关公式请参看同济大学编：高等数学(第三版)上册 高等教育出版社)。

(3) 利用链导法则求复合函数的导数：若 $u=\varphi(x)$在点 x 处可导，$y=f(u)$在相应点 u 可导，则复合函数 $y=f(\varphi(x))$在点 x 可导，且$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$，或记为$[f(\varphi(x))]'=f'(\varphi(x))\varphi'(x)$。

(4) 反函数求导法：若 $y=f(x)$与 $x=\varphi(y)$互为反函数，$f(x)$在点 x 可导，$\varphi(y)$在

相应点 y 处可导，且$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\varphi'(y)\neq0$，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1\Big/\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$，或记为 $f'(x)=1/\varphi'(y)$。

(5) 参数方程求导法：设 $y=f(x)$的参数方程形式为 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$，当 $t\in I$ 时，$\varphi(t)$与 $\psi(t)$均可导，则$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\psi'(t)/\varphi'(t)$。

(6) 隐函数求导法：若方程 $F(x, y)=0$ 确定了隐函数 $y=f(x)$，则由 $F(x,f(x))\equiv 0$ 两边关于 x 求导(若可导)，并运用复合函数求导法则，就可求得 $f'(x)$。

(7) 取对数求导法：在求幂指函数、某些幂函数、连乘积、带根号的函数的导数时，可以采用先取对数后求导的方式进行。

(8) 求函数的高阶导数：若 $f(x)$在 $U(x)$内可导，且极限$\lim\limits_{\Delta x\to0}\frac{f'(x+\Delta x)-f'(x)}{\Delta x}$存在，则称该极限值为 $f(x)$在点 x 的二阶导数。一般说来，$f(x)$的 $n-1$ 阶导数仍是 x 的函数，若它可导，则该导数就是原来函数的 n 阶导数，记为 $y^{(n)}$，$f^{(n)}(x)$，$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}$，$\frac{\mathrm{d}^n f}{\mathrm{d}x^n}$及 $y^{(n)}=(y^{(n-1)})'$，$f^{(n)}(x)=(f^{(n-1)}(x))'$等。求一个函数的高阶导数，只需运用上述(1)—(7)求一阶导数的法则，逐阶求导即可，但在计算过程中要注意分析归纳，找出规律，写出 n 阶导数的表达式。

设 $f(x)$在 $U(x_0)$有定义，$x_0+\Delta x\in U(x_0)$，如果 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$可表示为

$$\Delta y=A\Delta x+o(\Delta x) \tag{1-1-5}$$

其中，A 是不依赖于Δx 的常数，$o(\Delta x)$为比 Δx 高阶的无穷小，则称 $f(x)$在点 x_0 可微，$\mathrm{d}y=A\Delta x$ 称为$f(x)$在点 x_0 处相应于自变量增量 Δx 的微分。若 $f(x)$在区间 I 上每一点可微，则称 $f(x)$在 I 上可微。

$f(x)$在点 x_0 可微$\Longleftrightarrow f(x)$在点 x_0 可导。

记 $\Delta x=\mathrm{d}x$，则 $\mathrm{d}y=A\Delta x=f'(x_0)\mathrm{d}x$(即 $A=f'(x_0)$)。函数的可微性与可导性是等价的，函数的微分运算方法就是函数求导数的方法。

不论 u 是中间变量还是自变量，函数 $f(u)$的一阶微分具有形式不变性：

$$\mathrm{d}y = f'(u)\mathrm{d}u。$$

与高阶导数类似，也可以定义高阶微分：

$$\mathrm{d}^n y = \mathrm{d}(\mathrm{d}^{n-1}y).$$

二阶及二阶以上的微分不具备微分形式不变性。

(二)微分中值定理

微分中值定理奠定了由导数研究函数的理论基础。

(1) 罗尔(Rolle)定理：若 $f(x)\in C([(a, b)]$，在(a, b)内可导，且 $f(a)=f(b)$，则 $\exists\,\xi\in(a, b)$，使 $f'(\xi)=0$。

(2) 拉格朗日(Lagrange)中值定理：若 $f(x)\in C([(a, b)]$，在(a, b)内可导，则$\exists\,\xi\in(a, b)$，使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$。

拉格朗日中值定理的表达式还可以写成其它形式，例如写成有限增量形式：

$$f(x+\Delta x)-f(x) = f'(x+\theta\Delta x)\Delta x \qquad 0<\theta<1$$

式中，x 与$x+\Delta x$ 为(a, b)内的任意两点。

由拉格朗日中值定理容易证明：若 $f(x)$在区间 I 上的导数恒等于零，则 $f(x)$在 I 上为常数。

(3) 柯西(Cauchy)中值定理：若 $f(x)$，$g(x)\in C([a,\ b])$，在$(a,\ b)$内可导，且 $g'(x)\neq 0$，则$\exists\,\xi\in(a,\ b)$，使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \tag{1-1-7}$$

由柯西中值定理导出的罗必塔法则是求不定型的极限的主要方法。

(4) 泰勒(Taylor)公式：若 $f(x)$在 $U(x_0)$内具有 $n+1$ 阶导数，则$\forall\,x\in U(x_0)$，有

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n(x) \tag{1-1-8}$$

该公式称为 $f(x)$的泰勒公式，$R_n(x)$称为余项，常用的余项是拉格朗日余项 $R_n(x)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$，$0<\theta<1$。

在泰勒公式(1-1-8)中，取 $x_0=0$ 就得到工程中常用的麦克劳林公式

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k+R_n(x)$$

二、一元微分学的应用

(一) 函数的单调性与极值

设 $f(x)$在区间 I 上有定义，$\forall\,x_1,\ x_2\in I$，当 $x_2>x_1$ 时，若恒有 $f(x_2)>f(x_1)$(或 $f(x_2)<f(x_1)$)，则称 $f(x)$在区间 I 上是单调增加(或单调减少)的。单调增加和单调减少的函数统称为单调函数。单调性是一个局部性的概念。

设 $f(x)$在区间 I 上可导，$\forall\,x\in I$，若 $f'(x)>0$($f'(x)<0$)，则 $f(x)$在区间 I 上单调增加(减少)。在区间上个别点处出现 $f'(x)=0$，上述结论仍成立。例如，$y=x^3$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内满足 $y'=3x^2>0$($x\neq 0$ 时)，$y'=0$($x=0$ 时)，故可判断 $y=x^3$ 在$(-\infty,\ +\infty)$内单调增加。

求函数的极值是数学和工程中的重要问题之一。设 $f(x)$在 $U(x_0)$内有定义，若$\forall\,x\in U(x_0)$，且 $x\neq x_0$，有 $f(x)<f(x_0)$($f(x)>f(x_0)$)，则称 $f(x)$在点 x_0 取得极大值(极小值)$f(x_0)$，x_0 称为极大值(极小值)点。极大值和极小值统称为函数的极值，它是一个局部性的概念。

若 $f(x)$在点 x_0 处取极值，$f'(x_0)$存在，则必有 $f'(x_0)=0$。使得 $f'(x)=0$ 的点称为函数 $f(x)$的驻点。驻点和使 $f'(x)$不存在的点为函数在区间 I 上的极值可疑点。可以利用函数的一、二阶导数来判别可疑点是否确为极值点：

设 $f(x)\in C(U(x_0))$，在 $\mathring{U}(x_0)$内可导。在 $U(x_0)$内，若 $x<x_0$ 时，$f'(x)>0$(或 $f'(x)<0$)，$x>x_0$ 时，$f'(x)<0$(或 $f'(x)>0$)，则 $f(x)$在 x_0 取得极大值(或极小值)。

设 $f(x)$在 $U(x_0)$内具有二阶导数，且 $f'(x_0)=0$，则当 $f''(x_0)<0$ 时，$f(x)$在 x_0 取得极大值；当 $f''(x_0)>0$ 时，$f(x)$在 x_0 取得极小值。

函数 $f(x)$在$[a,\ b]$上的最大值和最小值可由如下方法求得

$$\max_{x\in[a,\ b]}f(x)=\max\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ \cdots,\ f(x_n)\}$$

$$\min_{x\in[a,\ b]}f(x)=\min\{f(a),\ f(b),\ f(x_1),\ \cdots,\ f(x_n)\}$$

其中，x_1，…，x_n 为 $f(x)$在(a, b)内的所有极值可疑点。

在工程中经常遇到最优化问题，这类问题可归结为求某函数(称为目标函数)的最值或最值点(称为最优解)。在求解工程中的最值问题时，下面的结论特别有用：

(1) 若 $f(x)\in C([a, b])$，且在(a, b)内只有唯一一个极值点 x_0，则当 $f(x_0)$为极大(小)值时，它就是 $f(x)$在$[a, b]$上的最大(小)值。

(2) 若 $f(x)$在$[a, b]$上单调增加(减少)，则 $f(a)$为其最小(大)值；$f(b)$为其最大(小)值。

(二) 曲线的凸凹性

设 $f(x)\in C([a, b])$，若 $\forall x_1, x_2\in(a, b)$，恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)<\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹的；若恒有 $f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)>\frac{1}{2}[f(x_1)+f(x_2)]$，则称 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凸的。

通常运用函数 $f(x)$的二阶导数来判别其图形的凸凹性：设 $f(x)\in C([a, b])$，在(a, b)内有二阶导数。$\forall x\in(a, b)$，若 $f''(x)>0$($f''(x)<0$)，则 $f(x)$在$[a, b]$上的图形是凹(凸)的。

将闭区间$[a, b]$换成其他类型区间，或者出现 $f''(x)$在(a, b)内个别点处等于零，上述的判别凹凸性的方法仍成立。

连续函数的图形上，凹弧与凸弧的分界点称为函数图形的拐点。

若 $f(x)\in C((a, b))$，则使得 $f''(x)=0$ 或 $f''(x)$不存在的点为 $f(x)$图形的拐点可疑点。根据可疑点左右两侧 $f''(x)$的符号来判断 $f(x)$图形的凹凸性，然后决定可疑点是否确为 $f(x)$图形的拐点。

(三) 曲线的渐近线及函数图形的描绘

渐近线反映曲线无限延伸时的走向和趋势。曲线 C 上的动点 M 沿曲线离开坐标原点无限远移时，若与某一直线 l 的距离趋于零，则称直线 l 为曲线 C 的一条渐近线。确定曲线 $y=f(x)$的渐近线的方法如下：

若$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$，则曲线 $y=f(x)$有一铅直渐近线 $x=x_0$；若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=a$，则曲线 $y=f(x)$有一水平渐近线 $y=a$；若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)/x=a$，且$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)-ax]=b$，则曲线 $y=f(x)$有一斜渐近线 $y=ax+b$。

根据函数的定义域、连续性、单调性、凹凸性、极值、拐点等等便可较准确地绘制函数的图形。作函数 $f(x)$图形的步骤如下：

(1) 确定 $f(x)$的定义域，并讨论其奇偶性、连续性、周期性等；

(2) 求出 $f'(x)$和 $f''(x)$的全部零点及其不存在的点，并以它们为分点将定义域分成小区间；

(3) 确定各小区间内 $f'(x)$和 $f''(x)$的符号，并由此求出 $f(x)$的增减区间、极值点、凸凹区间和拐点；

(4) 求 $f(x)$的渐近线，或其它变化趋势；

(5) 综合(1)—(4)，列表并绘出 $f(x)$的图形。

(四) 曲率