

504652

立体几何解题思路

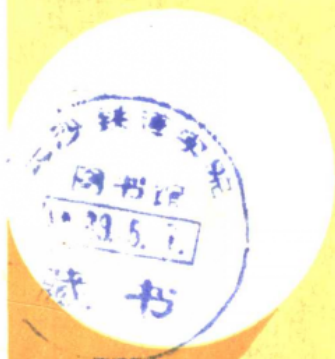
51.233

D Y J

——附动态立体图

邓禹绩 薛川坪 肖钰 靳尚诚 编

王忠祥 绘立体图



化学工业出版社

立体几何解题思路

——附动态立体图

邓禹绩 薛川坪 肖 钰 靳尚诚 编

王忠祥 绘立体图

化学工业出版社

立体几何解题思路

——附动态立体图

邓禹绩 薛川坪 肖 钰 靳尚诚 编
王忠祥 绘立体图

责任编辑: 任文斗

封面设计: 许 立

*

化学工业出版社出版发行

(北京和平里七区十六号楼)

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所经销

*

开本 $787 \times 1092^{1/32}$ 印张 $8^{3/4}$ 字数193千字

1988年11月第1版 1988年11月北京第1次印刷

印 数 1—1,900

ISBN 7-5025-0121-5/TQ·83

定 价 4.00 元

内 容 提 要

本书是以中学数学大纲为准绳,以高中数学课本《立体几何》的内容为依据,结合多年教学经验编成的。在对立体几何基础知识加深理解的基础上,以培养能力、提高解题水平为目的。

本书分五章,分别对立体几何知识的系统认识,对空间图形的画图、识图方法,对空间图形的论证方法、计算方法,对立体几何与代数、三角、解析几何的综合运用进行了研究,并运用典型例题对解题思路进行分析。本书注重运用数学思想和数学方法解题,精选的例题、练习题注重考查逻辑思维能力、空间想象能力和计算能力。书中内容渗透了编者对怎样培养能力的研究成果。

为了便于读者自学,形象地建立空间概念,书中除绘出了轴侧直观图外,还绘出了相应的动态立体图,学生可以通过红绿滤色镜片看到立体影象,不仅有助于正确地思考和解題,还是培养空间想象能力的阶梯。

本书可作为在校高中学生的课外辅助读物,毕业生准备高考的学习资料,自学青年、在职职工的自学用书,还可供中学数学教师教学时参考。

前 言

《立体几何》是高中学生、自学青年学习较困难的一门学科。首先是空间想象力不容易培养起来，以致不能准确地识图、画图。而对空间图形进行数量研究又必须纳入逻辑推理的轨道，思维能力不强就不能较好地分析解决问题。如果对计算的一般规律还未掌握，更觉得立体几何习题不易解决。针对以上问题，编者以中学数学大纲为准绳，以高中课本《立体几何》的内容为依据，结合多年教学经验，编写了本书，希望在立体几何知识加深理解的基础上，对读者培养能力，提高解题水平有所帮助。

本书内容安排上注意了以下几点：

1. 把立体几何知识系统整理，便于记忆，便于运用；
2. 把识图、绘图的规律和方法通过典型题明确地阐述出来；
3. 对空间图形的论证方法、计算方法加以研究，运用典型例题对解题思路进行分析，注重数学思想和数学方法的运用，注重考查逻辑思维能力、空间想象能力和计算能力，对解题思路和方法进行规律性论述；
4. 结合典型例题配备了动态立体图，借助动态立体图不仅使读者直观地看到立体图形，清楚地显现线、面之间的位置关系，还对培养空间想象能力起辅助作用；
5. 通过综合题的分析，培养综合运用知识的能力；
6. 为了便于自学，练习题附有答案，对难度较大的习

题还作了提示和解答。

这本书的出版也是一种尝试，一定会有很多缺点，希望读者不吝赐教。

目 录

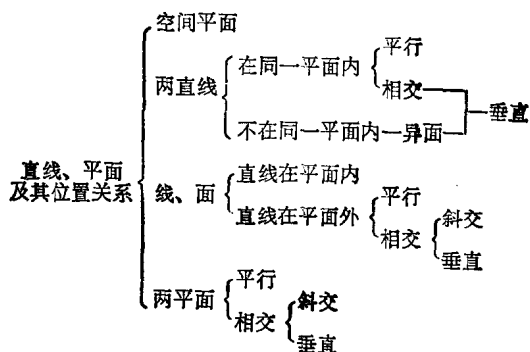
第一章 对立体几何知识系统的认识	1
一、直线和平面.....	1
二、多面体和旋转体.....	9
第二章 空间图形的画法	19
一、一些常见图形的画法.....	19
二、怎样由题画图和由图解题.....	31
第三章 空间图形的论证	36
一、空间图形的论证方法.....	36
二、各类典型问题的证明方法.....	67
第四章 空间图形的计算	91
一、怎样才能解好空间图形的计算题.....	91
二、典型计算问题.....	96
第五章 立体几何与代数、三角、解析几何知识的	
综合运用.....	164
一、折叠问题.....	164
二、空间图形中的极值问题.....	169
三、立体几何与代数、三角、解析几何的综合运用...	180
习题一至习题五的答案或提示	188
动态立体图	197

第一章 对立体几何知识系统的认识

立体几何的研究对象是空间图形，主要内容有两部分：第一部分直线和平面，研究空间的直线与直线、直线与平面以及平面与平面的位置关系和有关图形的画法，着重研究的是它们之间的平行与垂直关系；第二部分多面体和旋转体，研究常见的柱、锥、台、球的概念、性质、直观图的画法以及面积、体积的计算，重点研究正棱柱、正棱锥、正棱台、圆柱、圆锥、圆台和球。

一、直线和平面

(一) 系统表



(二) 基础知识

直线和平面的基础知识是学习立体几何的基础，为了更好地掌握有关定义、公理、定理，我们用图表进行了系统的

小结。读者还应掌握这些定理的证明。

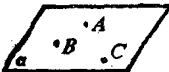
三垂线定理及其逆定理，都是研究直线和直线的垂直关系的，必须牢固掌握。

三垂线定理内容是：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线的射影垂直，那么它也和这条斜线垂直。

三垂线定理的逆定理内容是：在平面内的一条直线，如果和这个平面的一条斜线垂直，那么它也和这条斜线的射影垂直。

三垂线定理和它的逆定理将平面内两条直线垂直关系发展到空间两条直线垂直，又能把空间中的两条直线垂直转化

表 1 平面的基本性质

名称和图形	内 容	作 用
公理 1 	如果一条直线上两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内。即 $\left. \begin{array}{l} \text{点 } A, B \in \text{直线 } a \\ \text{点 } A, B \in \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$	1. 判定直线是否在平面内的依据 2. 判定点是否在平面内的依据
公理 2 	如果两个平面有一个公共点，那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线。即 $\left. \begin{array}{l} \text{点 } A \in \text{平面 } \alpha \\ \text{点 } A \in \text{平面 } \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \text{直线 } a \\ A \in a \end{array} \right.$	1. 判定两个平面相交的依据 2. 确定两个平面相交的交线位置的依据 3. 判定点在两个平面交线上的依据
公理 3 	经过不在同一直线上三点，有且只有一个平面。即 $\left. \begin{array}{l} a \text{ 是任意一条直线} \\ \text{点 } A, B, C \text{ 不同属于 } a \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{l} A, B, C \in a \\ a \text{ 是唯一的} \end{array} \right.$	1. 确定一个平面的依据 2. 判定两个平面重合的依据

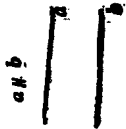
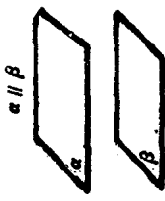
为平面内两条直线垂直，因此用途广泛。主要用途有：(1) 证明两条异面直线垂直（或求证两条异面直线所成的角是直角）；(2) 确定平面垂线的垂足位置；(3) 求点到直线的距离；(4) 寻找直角三角形；(5) 确定二面角的平面角；(6) 确定几何体的斜高等。

确定二面角的平面角是重要的基本训练，基本途径有三个。(1) 直接利用二面角的平面角定义，过棱上任意一点，在两个面内分别引垂直于棱的两条射线，这两条射线所夹的角；(2) 已知二面角的一个面的垂线，以及这垂线与另一个面的交点时，可以根据三垂线定理或三垂线定理的逆定理确定二面角的平面角；(3) 作棱的垂面，与二面角的两个面产生交线，两条交线所夹的角。

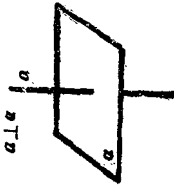
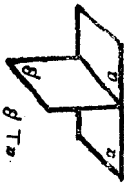
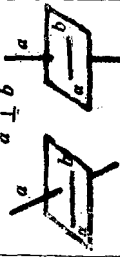
表 2 确定平面的条件

名 称	公理 3	推论 1
图 形		
内 容	不在同一条直线上的三点，确定一个平面	一条直线和这条直线外一点，确定一个平面
名 称	推论 2	推论 3
图 形		
内 容	两条相交直线，确定一个平面	两条平行直线，确定一个平面

表 3 空间直线和平面位置关系表

	直线 a 和直线 b	直线 a 和平面 α	平面 α 和平面 β
相 合			
平 行			

续表

	直线 a 和直线 b	直线 a 和平面 α	平面 α 和平面 β
相 交	斜 交 $a \cap b = A$ 	$a \cap \alpha = A$ 	$\alpha \cap \beta = a$ 
	垂 直 $a \perp b$ 	$a \perp \alpha$ 	$a \perp \beta$ 
异 面	 $a \perp b$		

立体几何是在平面几何知识基础上来研究空间图形的。当判定一个空间图形的某一部分是一个平面图形后，就可以运用平面几何的定义、公理、定理来解决问题。平面的基本性质和平面的确定是平面几何与立体几何之间的“桥”，学习时应注意到这一点。

1. 平面的基本性质

2. 空间直线和平面的位置关系

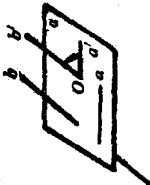
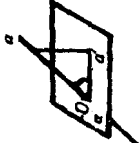
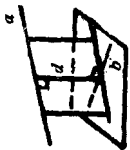
表 4 平行关系

	定 义	判定定理	性质定理
两条直线平行	在同一平面内没有公共点		1. 平行于同一条直线的两条直线平行 2. 如果一个角的两边与另一个角的两边分别平行并且方向相同，那么这两个角相等
直线和平面平行	一条直线和一个平面没有公共点	如果平面外一条直线和这个平面内的一条直线平行，那么这条直线和这个平面平行	如果一条直线和一个平面平行，经过这条直线的平面和这个平面相交，那么这条直线就和交线平行
两个平面平行	两个平面没有公共点	1. 如果一个平面内有两条相交直线都平行于另一个平面，那么这两个平面平行 2. 垂直于同一条直线的两个平面平行	1. 两个平面平行，其中一个平面内的直线必平行于另一个平面 2. 如果两个平行平面同时和第三个平面相交，那么它们的交线平行 3. 一条直线垂直于两个平行平面中的一个平面，也垂直于另一个平面 4. 夹在两个平行平面间的平行线段相等

表 5 垂 直 关 系

	定 义	判定定理	性质定理
两条直线垂直	两条直线所成的角是直角	如果一条直线和两条平行线中一条垂直, 那么也和另一条垂直	
直线和平面垂直	一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直	1. 如果一条直线和一个平面内的两条相交直线都垂直, 那么这条直线垂直于这个平面 2. 如果两条平行直线中的一条垂直于一个平面, 那么另一条也垂直于同一个平面	1. 如果两条直线同垂直于一个平面, 那么这两条直线平行 2. 射影长定理: 从平面外一点向这个平面所引的垂线段和斜线段中, (1) 射影相等的两条斜线段相等, 射影较长的斜线段也较长; (2) 相等的斜线段的射影相等, 较长的斜线段的射影也较长; (3) 垂线段比任何一条斜线段都短 3. 三垂线定理和它的逆定理
两个平面垂直	两个平面相交, 所成的二面角是直二面角	如果一个平面经过另一个平面的垂线, 那么这两个平面互相垂直	1. 如果两个平面垂直, 那么在一个平面内垂直于它们交线的直线, 垂直于另一个平面 2. 如果两个平面互相垂直, 那么经过第一个平面内的一点垂直于第二个平面的直线, 在第一个平面内

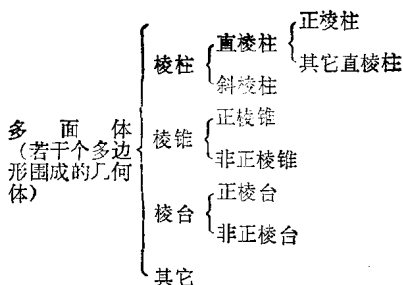
表 6 角和距离的概念

	平面图形	空 间 图 形	
		异面直线	直线和平面
夹 角			
	有公共起点的两条射线组成的图形	异面直线 a 与 b 所成的角(锐角、直角)	直线 a 和平面 α 所成的角(锐角、 0° 角、直角)
距 离			
	A, B 两点间距离 d ; 点 A 到直线 b 距离 d ; 两平行直线 a, b 间距离 d	异面直线 a 和 b 之间的距离 d	点 A 到平面 α 的距离 d ; 平行直线 a 和平面 α 的距离 d

二、多面体和旋转体

(一) 多面体

1. 类型



2. 基础知识

需要掌握以下各表所列内容,并掌握表中各公式的证明。

表 7 棱柱、棱锥、棱台的概念和性质

名 称	定 义	各部分的名称	性 质
棱 柱 	两个面互相平行,其余各面都是四边形,并且每相邻两个四边形的公共边都互相平行	底面: 两个互相平行的面 侧面: 底面以外的各面 侧棱: 两个侧面的公共边 顶点: 侧棱与底面的公共点 对角线: 不在同一个面上两个顶点的连线 高: 两个底面间的距离 对角面: 过不相邻的两条侧棱的截面	1. 两底面是对应边平行的全等多边形 2. 侧面是平行四边形 3. 侧棱平行且相等 4. 平行于底面的截面与底面多边形全等 5. 对角面是平行四边形

名 称	定 义	各部分名称	性 质
棱 锥 	有一个面是多边形,其余各面是有一个公共顶点的三角形	底面: 多边形的这个面 侧面: 有公共顶点的三角形面 侧棱: 相邻侧面的公共边 顶点: 各侧面的公共顶点 高: 顶点到底面的距离 对角面: 不相邻的侧棱确定的截面	1. 底面是一个多边形 2. 侧面是三角形 3. 侧棱有一个公共顶点 4. 平行于底面的截面与底面多边形相似, 面积的比等于截得的棱锥的高和已知棱锥的高的平方比 5. 对角面是三角形
棱 台 	用一个平行于棱锥底面的平面去截棱锥, 底面和截面之间的部分	底面: 截面多边形叫做上底面, 原棱锥的底面叫做下底面 侧面: 底面以外的各面 侧棱: 相邻侧面的公共边 高: 上、下底面之间的距离 对角面: 不相邻的侧棱确定的截面	1. 两个底面是平行且相似的两个多边形 2. 侧面是梯形 3. 侧棱延长后必交于一点 4. 平行底面的截面与底面多边形相似 5. 对角面是梯形

表 8 正棱柱、正棱锥、正棱台有关公式和性质

名 称	定义	主要性质	侧面积	体 积	关系式
正 棱 柱 	底面是正多边形, 侧棱垂直于底面	1. 两个底面是对应边互相平行的全等正多边形 2. 侧面是全等矩形 3. 侧棱相互平行且等于高 4. 平行于底面的截面是和底面全等的正多边形 5. 对角面是矩形	$S_{\text{侧}} = ch$ (c 为底面周长, h 为高) $S_{\text{全}} = ch + 2A$ (A 为底面积)	$V = S_{\text{底}}h$	$h = l$ (l 为棱长)