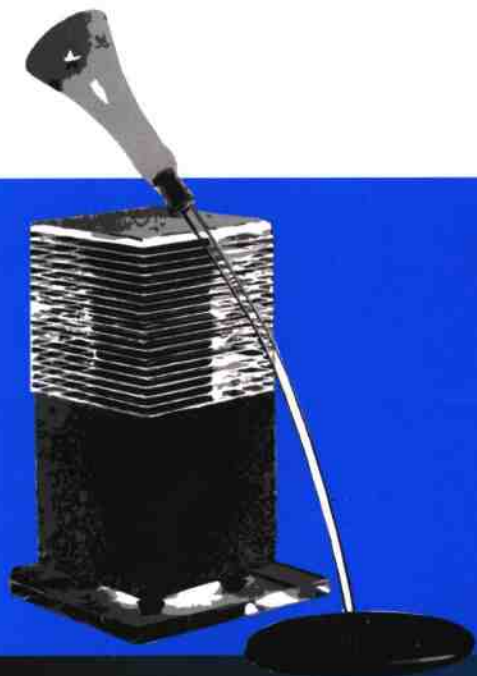


李道洲 等 编  
叶锦义



# 新

# 课程



## 初中数学探索性问题

# 新 题 型

华东师范大学出版社

新课程·新题型



# 初中数学

## 探索性问题

(第三版)

李道洲 叶锦义 杨正家 江国华 编  
齐敏 沈全洪 陈慧珍 宋德秀

华东师范大学出版社

## 图书在版编目(CIP)数据

初中数学探索性问题/李道洲等著. —上海:华东师范大学出版社, 2004. 1

ISBN 7-5617-3547-2

I. 初… II. 李… III. 数学课—初中—教学参考资料 IV. G634.603

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 104866 号

### 初中数学探索性问题

编者 李道洲等

策划组稿 倪明

责任编辑 徐惟简

封面设计 黄惠敏

版式设计 蒋克

出版发行 华东师范大学出版社  
市场部 电话 021-62865537  
门市(邮购) 电话 021-62869887  
门市地址 华东师大校内先锋路口

业务电话 上海地区 021-62232873  
华东 中南地区 021-62458734  
华北 东北地区 021-62571961  
西南 西北地区 021-62232893

业务传真 021-62860410 62602316

http: //www. ecnupress. com. cn

社址 上海市中山北路 3663 号  
邮编 200062

印刷者 华东师范大学印刷厂  
开本 890×1240 32 开  
印张 9.5  
字数 274 千字  
版次 2004 年 1 月第三版  
印次 2004 年 1 月第一次  
印数 001-16000  
书号 ISBN 7-5617-3547-2 / G·1925  
定 价 12.00 元

出版人 朱杰人

(如发现本版图书有印订质量问题,请寄回本社市场部调换或电话 021-62865537 联系)

# 前 言

在基础教育阶段,数学是一门重要的学科。在上海的一期课程教材改革中,数学教材在内容的选取、体系的构建和处理的方法等方面都有很大的变化。相应地,这些年来在学校教学、学习训练和考试评价等方面也有很多的变革,产生了许多新的题型。

我们几位作者参加了上海的“探索性数学问题研究”课题组,对这一类问题进行开发、编制和教学探讨。通过收集、整理以及自编、改编,逐步积累了一些有关探索性数学问题的资料;这些资料用于教学实践,取得了良好的效果。1998年,我们选取了其中较为成熟的部分材料,配合教材内容加以系统化处理,并按照学生自主学习和训练的要求,编写成书,提供学生课外使用。这本书初版发行以后,引起了广大学生和数学教师的热情关注,逐年重印,使用面不断扩大。广大师生的教学实践,又进一步推动了关于探索性数学问题的深入研究,并且不断取得新的成果。在新的实践和认识的基础上,2001年我们对原书进行了一次较大的修订,力求反映关于探索性问题研究的新进展。此书的修订本再次引人注目,广泛使用。许多学生和教师把这本书的内容作为数学课本学习训练部分的必要补充,从而促进了重在理解性的训练与重在探索性的训练相互配合、协调发展,学习的质量和效益得到了提高。这本书被学生看作是学好数学的好帮手,被教师看作是进行备课和组织数学辅导活动的好参谋。

当前,我们正在进行新一轮的课程改革,为落实时代对学校教育的要求作出了新的努力。在改进数学学习训练的实施意见中,明确提出“数学训练的习题,不能局限于巩固知识、操练技能和对常规问题的解决,应有注重预感试验、尝试、归纳、猜想、类比等非形式推理的问题,有



条件不完备、解题策略多样或结论不确定的开放性问题,有在求解时无现成步骤可循的非常规问题;还要有数学建模问题,有来自生产、生活实际或与其他学科相联系的数学课题,有应用数学于工作的调查、实践或研究项目等”。明确“要让学生获得数学探索、发现、研究与应用等过程的经历和体验,掌握数学探索、研究以及数学应用的基本方法,形成数学能力以及探究、应用和创新等能力”。在近几年的初中数学考试命题中,数学习题观念的拓展有了进一步的体现,对学生的阅读理解能力、探究能力、应用能力和创新能力的考查有了进一步的加强。

随着数学课程教材改革的发展,我们对改进数学学习训练有了进一步的认识,感到有必要把原有《初中数学探索性问题》的内容进行全面的调整,以期更好地体现数学课程改革的精神,更好地贯彻改进数学学习训练的实施意见和反映考试命题变化的动态。为此,我们在总结已有经验和成果的基础上,在保持原书优点、紧跟改革步伐的思想指导下,重新编写了《初中数学探究性问题》这本书,通过此书表达我们与大家一起走进新课程的心愿。

参加本书编写的有李道洲、叶锦义、杨正家、江国华、齐敏、沈全洪、陈慧珍、宋德秀等同志。其中第一、六、七章由陈慧珍负责编写,第二章由杨正家负责编写,第三章由李道洲负责编写,第四章由江国华负责编写,第五章由宋德秀负责编写,第八章由叶锦义负责编写,第九章由沈全洪负责编写,第十章由齐敏负责编写。全书由李道洲统稿。

关于探索性数学问题的研究和教学实践还在进行之中,希望本书的出版对促进这项研究的深入发展能发挥积极作用。限于编者的水平和见识,书中的粗疏和错误之处在所难免,请读者批评指正。书中引用了一些训练效果显著的成题,汲取了一些教师的研究成果和有益经验;华东师范大学出版社倪明同志为本书的编写和出版做了大量的工作,在此向这些同志表示深切的谢意。

本书编者

2003.8.



# 初中数学探索性问题概述

在数学学习过程中,离不开做数学题目,每个学生对此都有切身的体验.美国数学家哈尔莫斯曾经说过:“数学真正的组成部分应该是问题和解,问题才是数学的心脏.”这个观点,已经被数学界普遍接受.在数学教育中,解题活动是最基本的活动形式.

广义地说,凡是以数学为内容,或者需要运用数学的概念、理论、方法才能解决的问题,都是数学问题.我们这里所说的数学问题,主要是指教师在课堂上提出的以数学为内容的问题、有关的例题和课内外练习题,还有数学测验或考试中的试题等.在教学中我们可以看到,数学理论的导出总是通过提出和解决数学问题来完成的,这些理论都是问题的结果.教材中还配置有一定数量的例题、习题,供学生学习和训练.应该说,数学题目是数学教学中生动具体、形象有趣、最具活力的内容.学生要形成数学概念、理解数学命题,要掌握数学方法和技能,要发展智力、提高能力、锤炼意志和品质等,都必须通过“解决问题”这一活动来实现.而对学生的知识和发展水平进行评价时,常常采用测验、考试的方法,也是把“解题”作为一种重要的检测手段.所以,要提高数学学习水平,就必须充分重视解题活动,切实发挥数学题目的训练价值和功效.

## 一、对探索性数学问题的认识

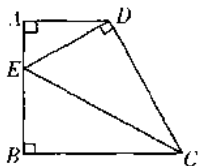
一个数学题目的构成含有四个要素,即题目的条件、解题的依据、解题的方法、题目的结论.这四个要素中,至少应有一个要素是解题者已经知道的,其余要素可能不知道,要通过解题活动加以明确.如果题目所含的四个要素都是解题者已经知道的,或者结论虽未指明,但它是完全确定的,那么“解题”就是利用题目给出的条件,运用已有的数学知



识和方法,推出题目的结论.这样的数学题目是常见的,是一种封闭性的数学问题.

请看下面一道数学题目:

例 1 如图,已知梯形  $ABCD$  中,  
 $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $BC = 2b$ ;  
 又  $\angle CDE = 90^\circ$ ,  $DE$  交  $AB$  于点  $E$ .  
 求证:



(1)  $\triangle DCE \sim \triangle ADE$ ;

(2) 当  $a = \sqrt{3}b$  时,  $\triangle DCE$  与  $\triangle BCE$  相似.

这道题目的条件已经明确给出,结论也是知道的.解题的依据是教材中的有关知识,解题的方法在教学中一般都有类似的训练,所以这题属于常见的封闭性数学问题.我们只要仔细审题,经过探究、分析后,不难提出解题思路,再运用学过的知识和方法,就能解决问题.对于这类问题,通过解题活动,可以帮助我们深入理解和巩固所学的数学知识,掌握学过的数学方法,对培养数学能力和训练思维品质有积极的作用.

如果把例 1 略加改编,变为如下一道题目:

例 2 如图,已知梯形  $ABCD$  中,  $\angle A = \angle B = 90^\circ$ ,  $AB = a$ ,  $AD = b$ ,  $BC = 2b$ ; 又  $\angle CDE = 90^\circ$ ,  $DE$  交  $AB$  于点  $E$ . 对于①  $\triangle DCE$  与  $\triangle ADE$ , ②  $\triangle DCE$  与  $\triangle BCE$ , 试判断各组中的两个三角形是否相似? 如果一定相似,请加以证明; 如果一定不相似,要说明理由; 如果不一定相似,请指出它们相似时  $a$ 、 $b$  应满足的等量关系.

把例 2 与例 1 相比较,这两道题目的条件基本上是一样的,但在例 2 中没有直接给出结论,只是指出了对结论进行探讨的范围和要求.由于  $a$ 、 $b$  的具体数值没有确定,所以相应的图形也不确定,这样在①、②两组中两个三角形的相似关系有三种可能性,即一定相似、一定不相似、不一定相似.例 2 要求首先对结论的各种可能性进行判断,然后再进一步作出解答,其中有一个探索发现结论的过程.要对结论作出判断,这就需要展开观察、试验、类比、归纳、猜测等探索活动,把直觉思维与逻辑思维结合起来.这样的活动,有启迪科学方法的作用,有创造发



现的意义,具有较高层次的训练价值.这样的题目,就是一种探索性数学问题.

一般来说,探索性数学问题是相对于封闭性数学问题而言,它的形式多种多样,难以全面地、完整地概括.我们这里只能对一些探索性数学问题作简单的描述.探索性数学问题一般具有以下特征之一:

(A)给出了条件,但没有明确的结论,或者结论是不确定的;

(B)给出了结论,但没有给出或没有全部给出应具备的条件;

(C)先提出特殊情况进行研究,再要求归纳、猜测和确定一般结论;

(D)先对某一给定条件和结论的问题进行研究,再探讨改变条件时其结论相应发生的变化,或改变结论时其条件相应发生的变化;

(E)解题方法需要独立创新.

显然,对数学题目的四个要素进行分析,还可以列出具有其他特征的探索性问题.我们应注重探索性问题的本质,这就是必须经过观察、试验、分析、比较、类比、归纳、猜测、推断等探索活动把题目的某一个或几个要素加以明确,然后解决问题.

## 二、对探索性数学问题解题思路的探讨

为了理出探索性数学问题的解题思路,我们提出探索性问题的几种基本类型,再分别加以说明.

### 1. 判断型

这类题目一般具有特征(A)或(B).在(A)的情况下,一般会给出结论的可能范围,解题思路是:展开探索活动,猜测结论并加以证明.在(B)的情况下,一般要求判断并完善条件的充分性,解题思路是:分析结论成立时应具备的条件,再加以比较,或找出条件与结论之间的矛盾.

这类问题还有一种表现形式,就是判断“是否存在”.要说明存在,只需要找出一个符合要求的对象;或者假设存在并进行推理,若结果合理则假设成立,若结果出现矛盾则假设不成立.要说明不存在,即无论用什么方法都找不出符合要求的对象,这时一般要用反证法进行推理





论证,或者举出反例.

## 2. 分析型

这类题目一般具有特征(B)或(E).在(B)的情况下,可以采用“分析法”,按执果索因的思路,找出结论成立时应具备的条件,其答案可能有多种,具有开放性.在(E)的情况下,要具体分析,打破常规,进行多向思维,大胆尝试并善于总结,它没有一般思路,具有研究性.

## 3. 归纳型

这类问题一般具有特征(A)或(C).在(A)的情况下,当结论不能由已知条件直接推出时,通常是先考察一些特殊情况,通过观察、分析、归纳,猜测出一般性的结论,然后再加以证明.在(C)的情况下,题目已指明从特殊到一般的递进过程,解题的关键在于归纳和猜测.

## 4. 讨论型

这类题目可能具有特征(A)、(B)或(D).解题时需要分门别类地进行讨论,应从问题的要求出发,具体分析,收集和挖掘题目提供的各种信息,全面进行研究.

由探索性数学问题的特征可以看出,它不具有定向的解题思路.解题时总要有合情合理、实事求是的分析,要把归纳与演绎协调配合起来,把直觉发现与逻辑推理(包括运算这种至精至简的推理)相互结合起来,把一般能力和数学能力同时发挥出来.因此,通过探索性数学问题的解题活动,不仅可以促进数学知识和数学方法的巩固和掌握,而且更加有利于各方面能力的整体发展和思维品质的全面提高,有利于加强主体精神、探究态度、科学方法和创造能力的培养,这正是当前在数学教学中积极引进探索性数学问题的意义所在.而在测验、考试中引进这类问题,则具有更加全面的检测效果,也有正确导向的作用.

探索是数学发现的先导,培养创新精神和创造能力是素质教育的重点.所以,重视探索性数学问题的研究和解题实践,是数学发展的需要,是创造型人才成长的需要.基于这一认识,把探索性数学问题纳入数学训练体系中,是非常必要的.



# 目 录

初中数学探索性问题概述	1
第一章 丰富的数学乐园	1
第二章 数与式	7
第三章 方程与不等式	35
第四章 函数	61
第五章 统计与概率	81
第六章 空间图形	106
第七章 三角形与四边形	114
第八章 相似形与解直角三角形	133
第九章 圆	173
第十章 综合题	204
参考答案与提示	240



# 第一章 丰富的数学乐园

同学们,当你走进生活中,你会看到各种各样平面的、立体的图形展现在你的面前,世界由此而缤纷多彩。

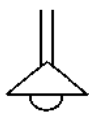
今天,当你踏入丰富的数学乐园,带着数学家的眼光去审视世界,你又会发现有许多美丽的图案正等着你去欣赏,而这些图案是由直线、三角形、四边形、圆等基本几何图形所组成的。

先请你欣赏两组图形。

第一组图形是用几何图形“ $\triangle$ ”、“ $\parallel$ ”、“ $\bigcirc$ ”(一个三角形,两条平行线段,一个半圆)作为构件,拼成具有独特构思且有意义的图形。



山上凉亭



吊灯



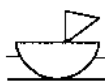
雷达



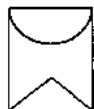
降落伞



网球拍



乘风破浪



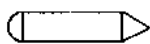
文件袋



愁眉苦脸



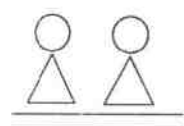
酒杯



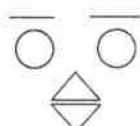
带橡皮的铅笔

第二组是由“ $\bigcirc\bigcirc$ ”、“ $\triangle\triangle$ ”、“ $\parallel$ ”(两个圆、两个三角形、两条平行线)作为构件,拼成具有独特构思且有意义的图形。

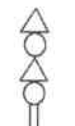




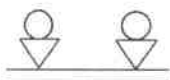
让我们荡起双桨



笑脸常在



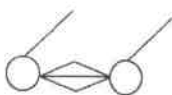
糖葫芦



天平



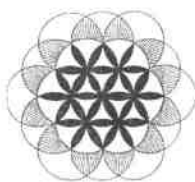
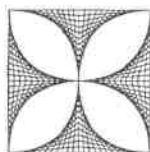
好朋友



眼镜

可以看到,在数学乐园中,用几何图形可以构造出许许多多的富有意义的图形.

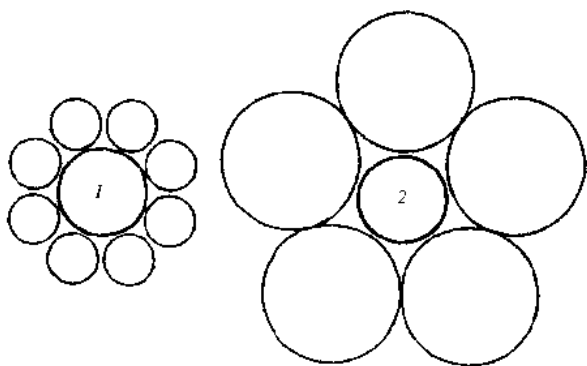
几何在世界各地的文化领域以及艺术形式中充满了活力.



上面有些是自然界的实物,有些是由不同图案重叠而构成的,这些美丽的图案让人难以相信都是由基本的几何图形创作得出的.

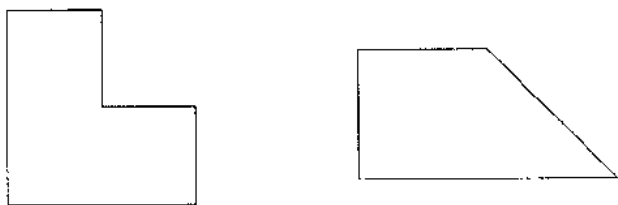
再请你目测一下,下图中1号圆和2号圆哪个大些?哪个小些?



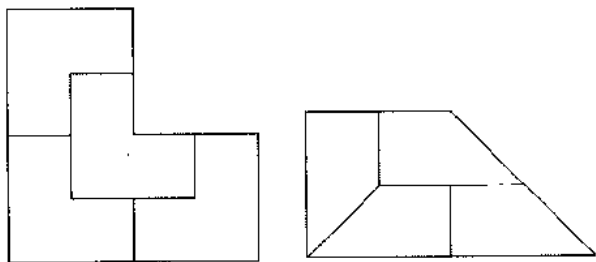


由于受环境的影响,我们的视觉往往会产生一种错觉,以为是1号圆大,而真实的情况是1号圆和2号圆一样大。

人的相貌会遗传,图形的“相貌”也可以“遗传”。下面两幅图,能否各分成四个小块,使它们的形状、大小完全相同,并且与原图的形状也相同?



根据观察与测量,这两幅图都可以分割,具体分割见下图:



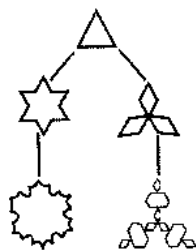
同样,有某一矩形园地,现要在园地上建一个花坛,使花坛的面积是原园地面积的一半,并且具有对称性,如何设计?

图形的对称性有轴对称与中心对称之分,因此花坛的设计,式样可以是多种多样的.花坛可以是三角形、多边形、圆形或其他具有对称性的图形组合.另外,花坛的设计也要注意有可操作性.以下是部分设计图形:



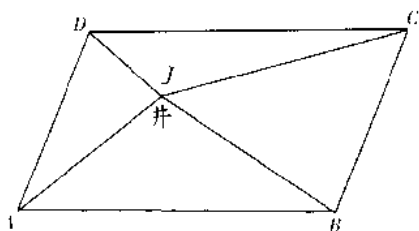
以上这些设计,既体现了题目的要求,同时又有一种赏心悦目之感.北方,年年下雪,同学们是否知道美丽的雪花曲线呢?

从一个正三角形开始,可以得到两个曲线序列:正反雪花曲线.



如图示:雪花曲线的产生规则是:将正三角形每一边三等分,而以其居中的那一条线段为底边再向外作正三角形,然后去掉作底边的那条线段,便得到第一条雪花曲线,对此雪花曲线,将它的每条折线段都三等分,重复前面过程,便可产生后继雪花曲线.另外,如果是向内作正三角形,所得到的雪花曲线称之为反雪花曲线.

显然,雪花曲线是由等长度的折线段连结而成.



有一位老农民有一块地,如图,形状是平行四边形,记为 $ABCD$ .地里有一口井,位置在图中的点 $J$ ,他将水井与地的四角分别相连,将地分为四块,然后对两个儿子说,这地分给你们,每人各取两块;水井不能分,两家用.如果每人拿相邻的两小块,明显有大小不同.现在让你



们都拿相对的两块,究竟谁拿哪两块,互相协商,看着办吧.

兄弟两人都说,这样很好,没有意见.也没有什么好协商的,哥哥拿长边  $AB$  和  $CD$  上的两块,弟弟拿短边  $AD$  和  $BC$  上的两块.

是哥哥分到的地多呢,还是弟弟分到的多?

如果设平行四边形的底边  $AB = a$ ,高为  $h$ ,那么地的总面积是  $S = ah$ .

设水井  $J$  到  $AB$  的距离为  $x$ ,那么  $J$  到  $CD$  的距离是  $h - x$ .所以哥哥分到的两小块土地的面积之和是

$$\frac{1}{2}ax + \frac{1}{2}a(h - x) = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2}S.$$

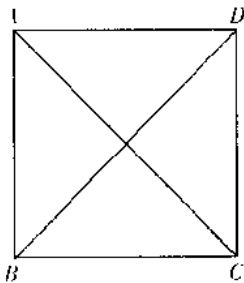
不多不少,刚好一半.

所以两人分到的地一样多.

你看到了吗? 在生活中存在着丰富多彩的图形,而许多图形与我们的数学世界有着千丝万缕的联系,让我们再继续往数学乐园的深处探索,寻找新的发现.

### 习 题 一

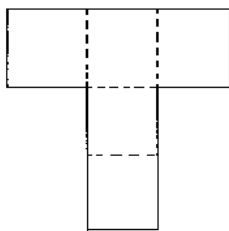
1. 在平面上有且只有四个点,这四个点有一个独特的性质,每两个点之间的距离有且只有两种长度.如正方形  $ABCD$  中,有  $AB = BC = CD = DA$ ,  $AC = BD$ ,请画出具有这种性质的另外四种不同的图形,并标明相等的线段.



(第1题)

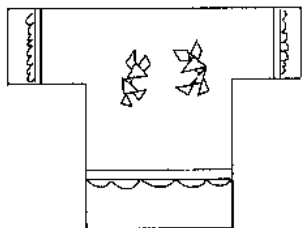


2. 一块 T 形边角木料, (如图, 由 5 个小正方形组成) 能否将它锯成 4 块, 然后拼合, 组成正方形?



(第 2 题)

3. 左图是用硬纸板做成的 T 恤衫模型. 它的几何形状, 是由 8 个全等的小正方形拼成的, 两只短袖各一个正方形, 中间部分 6 个正方形.



(第 3 题)

现在需要将这 T 恤衫纸板剪成几小块, 重新拼合, 成为一个正方形. 应该怎样剪拼?





## 第二章 数 与 式

数与式部分包括实数和代数式两大板块的内容.

为了对实数的运算与大小比较的方法进行研究, 首先应掌握如下知识要点: 实数按不同标准进行分类; 实数与数轴上的点之间的对应关系; 实数的符号, 绝对值的意义; 实数的大小比较法则; 实数的运算法则, 包括指数运算的法则及科学记数法. 其次应掌握建立在这些知识要点基础上的探索方法, 主要包括尝试法、分析法、归纳法、猜想法、枚举法、特殊值法等.

由于探索性问题往往没有给出现成的结论, 或者问题的结论不确定, 因此需通过上述各种方法去探寻, 然后再通过计算或证明把问题完整地表示出来.

代数式主要包括整式、分式和根式. 在这方面的探索性问题主要依赖以下知识要点: 整式的分类和运算; 乘法公式和因式分解; 分式的意义和运算法则; 分式的通分和约分; 根式的基本性质; 根式的运算和分母有理化; 同类根式、同次根式和最简根式.

有关代数式问题的探索方法, 除上述各种方法外, 还包括分类讨论法、分子有理化法、递推法、构造法、穷举法等.

有关代数式的探索题一般比有关实数的探索题要复杂, 变化更多, 因此解决此类问题需要更高的综合能力.

统计初步知识有利于培养学生以局部刻画全局的思维方式. 统计初步的内容主要包括: 一些基本的概念, 如总体、样本、个体等等; 平均数、中位数的概念和求法; 方差、标准差的概念和求法; 频数、频率的概念和求法; 频数、频率的分布直方图的画法和有关的计算意义等. 另外还有折线图、扇形图等统计图形的意义及有关计算等.

