电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

主 编 郜佑诚 房少军

副主编 栾秀珍 金 红

主 审 王百锁

大连海事大学出版社

电磁场与电磁波

DIANCICHANG YU DIANCIBO

主　编　邰佑诚　房少军
副主编　栾秀珍　金　红
主　审　王百锁

大连海事大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

电磁场与电磁波 / 郜佑诚，房少军主编. —大连：大连海事大学出版社，2003.3

ISBN 7-5632-1635-9

Ⅰ. 电…　Ⅱ. ①郜…　②房…　Ⅲ. ①电磁场　②电磁波　Ⅳ. O441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 004718 号

大连海事大学出版社出版

地址：大连市凌水桥　邮编：116026　电话：4728394　传真：4727996

http://www.dmupress.com　E-mail:cbs@dmupress.com

大连海事大学印刷厂印装　　大连海事大学出版社发行

幅面尺寸：185 mm × 260 mm　印张：12.625

字数：315 千字　　印数：1 ~ 2 000 册

2003 年 3 月第 1 版　　2003 年 3 月第 1 次印刷

责任编辑：张宏声　　版式设计：申　中

封面设计：王　艳　　责任校对：陈　航

定价：19.00 元

内 容 提 要

本书为工科电子信息类电磁场理论和应用课程教材。

全书共 8 章。内容包括：麦克斯韦方程，静电场，恒定电流及其电场，恒定磁场，交变电磁场，平面电磁波，波导与谐振腔，各向异性媒质中的电磁波。书中注意基本理论与应用技术的很好结合，重点内容配编了例题，各章后面都附有练习题。

本书对从事电磁工程类方面的技术人员和教学工作者有一定的参考价值。

前　言

《电磁场与电磁波》一书是根据大连海事大学电子信息工程专业和通信工程专业的“电磁场理论和应用”课程教学大纲的要求编写的。“电磁场理论和应用”课程共54学时，它是电子信息工程专业和通信工程专业的主要专业基础课之一。这门课程是在学生学完“高等数学”、“工程数学”和“大学物理”等课程之后开设的后续课程，因而与这些课程有着十分紧密的联系。“电磁场理论和应用”课程中的内容理论严谨，为电子信息工程专业和通信工程专业的许多后续课程打下坚实的理论基础。这些课程包括：“微波理论与技术”、“电波与天线”、“数字微波通信”、“电磁兼容理论与应用”以及所有关于通信、无线电导航设备的有关课程。学习本课程对培养学生学会正确思维并掌握处理工程问题的科学方法有着十分重要的意义。

本书内容共分为8章。第1章麦克斯韦方程；第2章静电场；第3章恒定电流及其电场；第4章恒定磁场；第5章交变电磁场；第6章平面电磁波；第7章波导与谐振腔；第8章各向异性媒质中的电磁波。本书在编写过程中，一方面注重课程内容与“高等数学”、“工程数学”和“大学物理”等课程内容的衔接，另一方面又注意为后续的专业基础课和专业课打下良好的基础。本书加强了对重点和难点内容物理概念的描述，同时也注重对基本理论部分进行严谨的数学推导。学习“电磁场理论和应用”课程的目的是使学生在学完有关课程的基础上，掌握电磁场和电磁波的基本原理和基本特性。通过本课程的学习，能够为学生以后学习各门专业基础课和专业课打下牢固的基础，同时也能提高学生在实际工作中处理和解决有关电磁工程方面问题的能力。

在编写本书的过程中，特别注重突出它主要作为教材使用的特点。为了便于学生复习并掌握课程的主要内容，书中配编了一定数量的例题。编者对每一章后面的练习题都作过验算。

由于学时有限，编写本书的字数受到一定的限制，因而在一定程度上会使本书的系统性和完整性受到影响，不过编者已尽了最大努力使这种影响降到最小。因为时间仓促，书中难免存在着一些缺点和错误，在此谨向阅读本书的读者致歉。同时，编者诚恳地欢迎读者在阅读本书之后能提出宝贵的意见，这对我们今后的工作会有很大的帮助，在此向各位读者致谢！

本书由郃佑诚、房少军主编，栾秀珍、金红副主编，由王百锁教授主审。在编写本书过程中，编者曾受到王百锁老师的悉心指导，在此我们谨向王老师表示深深的谢意。本书中所有的插图都是由我们的学生和年轻的同事帮助绘制和处理的，他们是：温金旺、袁丽、张雷、佟亮和杜赟，在此向他们致以诚挚的谢意。

编　者

2002年12月

目　　录

第 1 章　麦克斯韦方程

§ 1-1　基本电磁量

我们在“大学物理”课程中学习了一些电磁量。电磁量大体上分为两大类：源量和场量。源量包括电荷与电流；场量包括电场强度矢量、电位移矢量、磁场强度矢量、磁感应强度矢量，以及标量电势等。

一、源量

1. 电荷

从“大学物理”课程中我们知道，电荷是一种物质，它遵守电荷守恒原理，即电荷既不能被创造也不能被消灭。这一观点是物理学的基本假设之一。

假设电量为 q 的电荷分布在体积 V 内，在该体积之内任何一点 $P(x,y,z)$处，体积元 $\Delta\tau$ 内的电荷量 Δq 与其体积之比的极限值称为电荷密度，有时也称为电荷体密度 $\rho(x, y, z)$，即

$$\rho(x,y,z)=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta\tau}\,(\mathrm{C/m^3}) \tag{1-1-1}$$

电荷 q 还可以分布在良导体表面厚度为 h 的很浅的薄层之内，我们可以不考虑薄层的厚度，就把电荷看做分布在良导体的表面 Σ 上。在该曲面 Σ 上任何一点 $P(x, y, z)$ 处，面积元 Δs 内的电荷量 Δq 与其面积之比的极限值，称为表面电荷密度，也称为电荷面密度 $\rho_S(x, y, z)$，即

$$\rho_S(x,y,z)=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta s}\,(\mathrm{C/m^2}) \tag{1-1-2}$$

如果电荷 q 分布在横截面很细的细线 L 上，这时我们可以不考虑细线 L 的粗细，只考虑电荷 q 沿长度方向的分布。在细线 L 上任何一点 $P(x, y, z)$ 处，线元 Δl 内的电荷量 Δq 与其长度之比的极限值，称为线电荷密度，或称为电荷线密度 $\rho_L(x, y, z)$，即

$$\rho_L(x,y,z)=\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta l}\,(\mathrm{C/m}) \tag{1-1-3}$$

一般说来，无论电荷分布在体积、面积还是长度上，都不一定是均匀的，因此上面三种电荷密度都是空间坐标 $P(x,y,z)$ 的函数，在交变场中它们还是时间 t 的函数。图 1-1-1 给出了三种电荷密度的示意图。

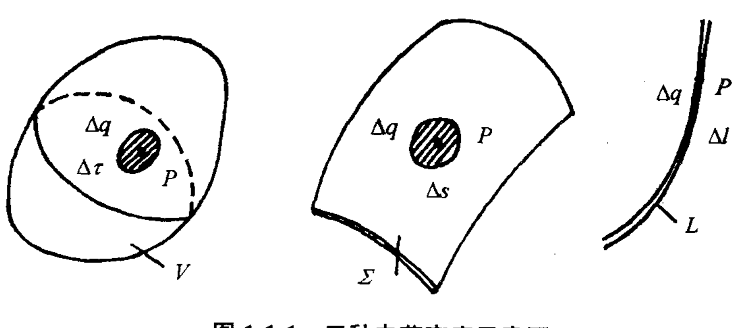

图 1-1-1　三种电荷密度示意图

反之，如果已知电荷在空间 V，表面 Σ 或细线 L 上的分布关系，通过对相应电荷密度函数的体积分、面积分或线积分，就能求出总的电荷量

$$q=\iiint_V \rho\,\mathrm{d}\tau,\qquad q=\iint_\Sigma \rho_S \mathrm{d}s,\qquad q=\int_L \rho_L \mathrm{d}l \tag{1-1-4}$$

2. **电流**

电荷流动就形成了电流。显然，电流是电荷 q 对时间 t 的变化率，即

$$I=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta q}{\Delta t}=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\,(\mathrm{C/s}\text{或 A}) \tag{1-1-5}$$

当电流在空间流动时，各处的大小和方向都是不同的。为了反映这些特征，我们引入电流密度矢量的概念。空间任意给定点 $P(x,y,z)$ 的电流密度矢量定义为电流流动方向的单位横截面上通过的电流，即

$$\boldsymbol{J}(x,y,z)=\boldsymbol{n}\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta s}\,(\mathrm{A/m^2}) \tag{1-1-6}$$

上式中，$\boldsymbol{n}$ 为电流流动方向的单位矢量。图 1-1-2 给出了电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 的示意图。

反之，如果已知电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 的分布函数，则在任何形状曲面 Σ 上流过的电流可以由曲面积分来计算

$$I=\iint_\Sigma \boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_\Sigma \boldsymbol{J}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s \tag{1-1-7}$$

上式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}\mathrm{d}s$，称为矢量面积元，简称矢量面元。

对于良导体，由于趋肤效应，高频电流主要是分布在良导体表面以下很浅的薄层内。为此我们引进表面电流的概念。在良导体表面上的点 $P(x,y,z)$，作与电流线垂直的线元 Δl，假设垂直通过 Δl 的表面电流为 ΔI，则点 $P(x,y,z)$ 处的表面电流密度矢量定义为

$$\boldsymbol{J}_S(x,y,z)=\boldsymbol{n}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta l}\,(\mathrm{A/m}) \tag{1-1-8}$$

上式中单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 的意义与式(1-1-6)相同。表面电流密度矢量 $\boldsymbol{J}_S$，从其定义式可以看出，它的量值实际上是垂直通过单位宽度横截线的电流，因此其单位是安培每米(A/m)，而不是安培每平方米($\mathrm{A/m^2}$)。实际上表面电流是在很薄的薄层内通过的。假设表面电流沿薄层深度方向不发生变化，当薄层深度为 Δh 时，则电流流动方向的横截面为 $\Delta s=\Delta h\Delta l$，因此电流密度矢量为

$$\boldsymbol{J}=\boldsymbol{n}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta h\Delta l}=\frac{1}{\Delta h}\boldsymbol{n}\lim_{\Delta l\to 0}\frac{\Delta I}{\Delta l}\ (\mathrm{A/m^2}) \tag{1-1-9}$$

把上式与式(1-1-8)相比较可知，两种电流密度矢量的关系为

$$\boldsymbol{J}_S=\boldsymbol{J}\Delta h \tag{1-1-10}$$

为了与表面电流密度矢量 $\boldsymbol{J}_S$ 相区别，有时也把式(1-1-6)定义的电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 称为体电流密度矢量。之所以叫体电流密度矢量，是因为电流在体积里流动。但是，我们必须注意，体电流密度是垂直通过单位横截面的电流，因此它的单位是安培每平方米($\mathrm{A/m^2}$)，而不是安培每立方米($\mathrm{A/m^3}$)。

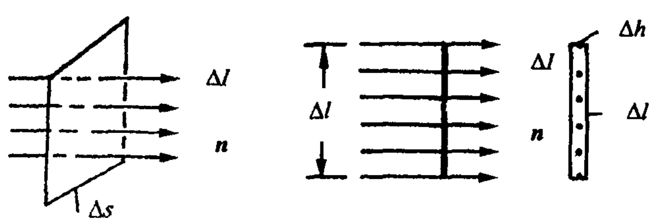

图 1-1-2　电流密度矢量的示意图

在电导率为 σ 的导电媒质中，如果存在电场，在电场的作用下自由电子将发生定向运动形成电流，这种电流称为传导电流。传导电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 与电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 的关系为

$$\boldsymbol{J}=\sigma\boldsymbol{E} \tag{1-1-11}$$

这就是我们在“大学物理”课程中学过的微分形式的欧姆定律。上式中电导率 σ 的单位是电阻率单位欧姆米（$\Omega\cdot$m）的倒数，叫做西门子每米，通常用符号记作（S/m）。铜的电导率为 $\sigma=5.8\times10^{7}$ S/m，橡胶的电导率为 $\sigma=10^{-13}$ S/m。

在气体或真空中，如果存在自由电荷，在电场的作用下将发生定向运动形成电流，这种电流称为运流电流。它由自由电荷密度 ρ 和电荷的平均运动速度 $\boldsymbol{v}$ 来确定

$$\boldsymbol{J}_v=\rho\boldsymbol{v} \tag{1-1-12}$$

3．电流连续性方程

现在我们来考察一个任意形状的封闭曲面 Σ 内外的电荷与电流的关系，如图 1-1-3 所示。设流出这个封闭曲面 Σ 的电流为 I，在封闭曲面 Σ 上的电流密度矢量为 $\boldsymbol{J}$，而封闭曲面内部随时间变化的电荷量为 q。根据式（1-1-5）对电流的定义可知，流出封闭曲面 Σ 的电流应等于该曲面 Σ 以外的电荷 $q_{外}$ 对时间 t 的变化率，即

$$I=\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{\mathrm{d}q_{外}}{\mathrm{d}t} \tag{1-1-13}$$

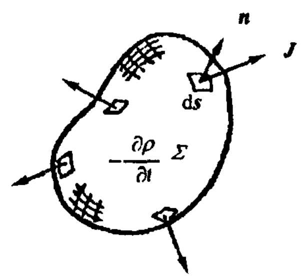

图 1-1-3　电流连续性方程示意图

显然，封闭曲面 Σ 内部电荷 q 与外部电荷 $q_{外}$ 的变化率应互为相反数，即

$$\frac{\mathrm{d}q_{外}}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_{V}\rho\,\mathrm{d}\tau=-\iiint_{V}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau \tag{1-1-14}$$

上式中，V 是封闭曲面 Σ 所包围的体积。因为时间变量 t 与坐标变量 (x,y,z) 是相互独立的变量，所以上式可以交换时间变量和坐标变量的微积分次序。比较上面两式可知，从封闭曲面 Σ 流出的电流应等于该曲面内部电荷变化率的负值，即

$$\oiint_{\Sigma}\boldsymbol{J}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\iiint_{V}\frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau \tag{1-1-15}$$

这就是反映电流与电荷关系的电流连续性方程。

二、场和场量

如果在全部和部分空间里的每一个点，都对应着某个物理量确定的值，这个空间就确定了该物理量的一个场。简言之，这个物理量是空间位置的函数。如果空间位置的函数是矢量，相应的场就是矢量场，例如电场强度矢量 $\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(x,y,z)$；如果空间位置的函数是标量，相应的场就是标量场，例如“大学物理”课程中学过的电势 $\varphi=\varphi(x,y,z)$。矢量场和标量场中的物理量统称为场量。我们来回顾一下“大学物理”课程中所学过的矢量场。

1．电场强度矢量

在“大学物理”课程中，库仑定律给出了静电场的电场强度矢量

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{e}_r\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\ (\mathrm{N/C})或(\mathrm{V/m}) \tag{1-1-16}$$

上式中

$$\varepsilon_0=\frac{1}{36\pi}\times10^{-9}\ (\mathrm{F/m}) \tag{1-1-17}$$

为真空的介电常数。我们以后还要学习随时间变化的交变电场。

2. 电位移矢量

在“大学物理”课程中我们知道，电介质就是我们平时所说的绝缘体。把一块介质放到电场中，它要受到电场的影响，同时它也影响电场。电介质中每个分子都是一个非常复杂的带电系统，有正电荷，也有负电荷。电介质中的任何一个分子都可以看成是由正、负电荷组成的电偶极子，整个介质就是由大量的这种微小的电偶极子构成的。H_2O，CO 等分子具有固有的电偶极矩，称为极性分子；而 H_2，O_2 和 CO_2 等分子不存在固有电偶极矩，称为非极性分子。在外电场的作用下，非极性分子的正、负电荷中心分开，成了电偶极子，产生了感应电偶极矩；而极性分子将沿电场的方向产生感应电偶极矩。外电场越强电偶极子的感应电偶极矩排列越整齐。这样，每个电偶极子的电偶极矩为

$$\boldsymbol{p}=q\boldsymbol{l}\ (\mathrm{C\cdot m}) \tag{1-1-18}$$

电偶极矩矢量 $\boldsymbol{p}$ 的正方向从负电荷指向正电荷。在电介质内部的宏观微小区域内，正、负电荷的电量相等，因而仍表现为中性。但是，在介质表面上却出现了只有正电荷或只有负电荷的电荷层。这种出现在电介质表面的电荷称为束缚电荷(或极化电荷)。在外电场的作用下，电介质表面出现束缚电荷的现象，叫做电介质的极化。电介质的电极化状态，可用电介质的电极化强度矢量来表示。电极化强度矢量定义为单位体积内分子的电偶极矩的矢量和

$$\boldsymbol{P}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum\boldsymbol{p}}{\Delta\tau}\ (\mathrm{C/m^2}) \tag{1-1-19}$$

在各向同性电介质中，若电场强度并非特别强，电极化强度矢量与电场强度矢量成正比

$$\boldsymbol{P}=\varepsilon_0(\varepsilon_r-1)\boldsymbol{E} \tag{1-1-20}$$

上式中，ε_r 称为电介质的相对介电常数。

电场中的电介质受电场的作用产生了束缚电荷，束缚电荷反过来也要影响电场的分布。总的电场强度矢量为自由电荷电场与束缚电荷电场的矢量之和。在“大学物理”课程中，在讨论介质中的高斯通量定理的时候，引进了电位移矢量

$$\boldsymbol{D}=\varepsilon_0\varepsilon_r\boldsymbol{E}=\varepsilon_0\boldsymbol{E}+\boldsymbol{P} \tag{1-1-21}$$

有了电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 将会给分析介质中的电场带来很大的方便。这里所讨论的电介质是线性各向同性的，以后我们还要讨论更复杂的媒质。

3. 磁感应强度矢量

“大学物理”课程中，指出磁场就是产生磁力的场，引进了磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 来描述磁场的物理性质。磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 是由毕奥－萨伐尔定律来确定的，它的单位是韦伯每平方米，记作($\mathrm{Wb/m^2}$)，但也经常称它为特斯拉(T)。以速度 $\boldsymbol{v}$ 运动的电荷 q 要受到磁场力的作用，这个力称为洛伦兹力

$$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B} \tag{1-1-22}$$

4. 磁场强度矢量

磁介质在磁场中被磁化以后，在一个小体积之内的各个分子的磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的矢量和不再是零。单位体积内分子磁矩 $\boldsymbol{m}$ 的矢量和称为磁介质的磁化强度

$$\boldsymbol{M}=\lim_{\Delta\tau\to 0}\frac{\sum\boldsymbol{m}}{\Delta\tau}\ (\mathrm{A/m}) \tag{1-1-23}$$

磁介质的磁化强度随外磁场的增强而增大。磁化强度和外磁场成正比

$$M=\frac{\mu_r-1}{\mu_0\mu_r}B \tag{1-1-24}$$

上式中的比例式写成这种特殊复杂的形式是由于历史的原因。“大学物理”课程中，在讨论磁介质中安培环路定律的时候，引进了磁场强度矢量

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0}-\boldsymbol{M}\ (\mathrm{A/m}) \tag{1-1-25}$$

把式(1-1-24)代入式(1-1-25)可得

$$\boldsymbol{H}=\frac{\boldsymbol{B}}{\mu_0\mu_r} \tag{1-1-26}$$

上面三式中，μ_r是相对磁导率，而

$$\mu_0=4\pi\times10^{-7}\ (\mathrm{H/m}) \tag{1-1-27}$$

是真空的磁导率。还可以反过来用磁场强度矢量来表示磁感应强度矢量

$$\boldsymbol{B}=\mu_0(\boldsymbol{H}+\boldsymbol{M})=\mu_0\mu_r\boldsymbol{H} \tag{1-1-28}$$

这里所涉及到的磁介质实际上是各向同性的，以后我们还会涉及到更复杂的媒质。

5. **矢量场的通量和环量**

从“大学物理”课程中我们还知道，电场或磁场的强弱分别可以用电场线或磁感线来描述，它们通称为矢量线。表示矢量线多少的物理量称为通量。场矢量 $\boldsymbol{A}$ 的通量Φ_A定义为它在曲面 Σ 上对坐标的曲面积分，即

$$\Phi_A=\iint_\Sigma \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} \tag{1-1-29}$$

场矢量 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{E}$，$\boldsymbol{H}$ 和 $\boldsymbol{D}$ 对应的通量分别为磁通量 Φ_B，电通量 Φ_E，磁场强度通量 Φ_H 和电位移通量 Φ_D。这些通量中用得最多的要数磁通量，因此磁通量的符号常常省略下标“B”，记作 Φ。显然，把式(1-1-7)与上式相比可知，电流 I 也是电流密度矢量 $\boldsymbol{J}$ 的通量。从式(1-1-29)中可以看出，场矢量的量值是单位面积上的通量，因而场矢量的量值实际上就是通量密度。例如，磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 是表示磁通密度大小，同时也是表示磁场中磁感线方向的物理量。

场矢量 $\boldsymbol{A}$ 的环量定义为它在闭合环路 L 上对坐标的曲线积分，即

$$\Gamma_A=\oint_L \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-1-30}$$

式中，$\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 称为矢量线元，其大小等于积分路径上的线元 $\mathrm{d}l$，方向为积分路径 L 前进的方向。环量又称为环流量，是用来判断场矢量涡旋程度的物理量，环量 $\Gamma_A=0$ 的矢量场称为无旋场；环量 $\Gamma_A\neq0$ 的矢量场称为有旋场。在下一节中我们将涉及到环量的运算。在“大学物理”课中，大家学习了安培环路定理

$$I=\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} \tag{1-1-31}$$

显然，磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 沿闭合环路 L 的环量值，就是穿过闭合环路 L 的电流 I。

§1-2 麦克斯韦方程组的积分形式

在“大学物理”课程中大家学习了积分形式的麦克斯韦方程组。方程组是由高斯通量定理、磁通连续性原理(又称为磁场的高斯通量定理)、法拉第电磁感应定律和全电流定律(又

称为一般形式下的安培环路定理)4 个方程式所组成的

$$
\begin{aligned}
&\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\frac{q}{\varepsilon_0}=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_{V}\rho\,\mathrm{d}\tau \\
&\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0 \\
&\oint_{L} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\frac{\mathrm{d}\Phi_B}{\mathrm{d}t}=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&\oint_{L} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\mu_0 I+\frac{1}{c^2}\frac{\mathrm{d}\Phi_E}{\mathrm{d}t}=\mu_0\iint_{\Sigma}\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}+\frac{1}{c^2}\iint_{\Sigma}\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}2\text{-}1)
$$

上式中

$$
c=\frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}}=3\times 10^8\ (\mathrm{m/s}) \qquad (1\text{-}2\text{-}2)
$$

是自由空间中的光速。请读者注意麦克斯韦方程组各方程式的积分限：第 1 式和第 2 式中，等号左边是场矢量在封闭曲面 Σ 上对坐标的曲面积分，等号右边是在 Σ 所包围的体积 V 内的体积分；第 3 式和第 4 式中，等号左边是场矢量在任意形状闭合曲线 L 上对坐标的曲线积分，等号右边的曲面 Σ 是以 L 为周界的任意形状的曲面，Σ 的正方向与 L 的环绕方向呈右手螺旋关系。麦克斯韦方程组式(1-2-1)中曲线积分、曲面积分和体积分的积分符号没有沿用《大学物理》教科书中的写法，而是沿用了《高等数学》教科书中的写法。“大学物理”课程中给出的麦克斯韦方程组，实际上是真空中电场强度矢量 $\boldsymbol{E}$ 和磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 的相互关系。对于介质中的情况，“大学物理”课程中讨论了电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的高斯通量定理，但并没有讨论一般形式下的磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 的安培环路定理。如果利用式(1-1-26)的关系，把磁感应强度矢量 $\boldsymbol{B}$ 的一般形式下的安培环路定理推广到连续介质的情况，就可以得到一般形式下磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 的安培环路定理。对于连续介质，麦克斯韦方程组可以写成

$$
\begin{aligned}
&\oint_{L} \boldsymbol{E}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&\oint_{L} \boldsymbol{H}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_{\Sigma}\boldsymbol{J}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}+\iint_{\Sigma}\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \\
&\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{D}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iiint_{V}\rho\,\mathrm{d}\tau \\
&\oiint_{\Sigma} \boldsymbol{B}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s}=0
\end{aligned}
\qquad (1\text{-}2\text{-}3)
$$

这样改写之后，麦克斯韦方程组的物理意义就更加完善了。下面我们逐个讨论方程组中各方程式的物理意义。

方程组的第 1 式为法拉第电磁感应定律。法拉第电磁感应定律最初的意义是这样的：方程式等号左边任意形状的闭合导体回路 L 上的曲线积分也就是回路中的感应电动势 e。法拉第电磁感应定律等号右边曲面 Σ 上的曲面积分，是通过该曲面的磁通量 Φ_B 对时间 t 的变化率。由于时间变量与坐标变量是相互独立的自变量，因此式中交换了微积分的次序。该式中等号右边的负号最初是由楞次定律所确定的，它说明闭合导体回路 L 中的感应电动势 e 所引起的感应电流 I 总是企图阻止原来磁通 Φ_B 的变化。麦克斯韦把法拉第电磁感应定律推广到任意媒质(虽然也包含闭合导体回路，但并不仅限于闭合导体回路)之中，只要磁场随时间发生变化就会产生感应电场。

方程组的第 2 式为全电流定律。全电流定律的等号左边为磁场强度矢量 $\boldsymbol{H}$ 在任意媒质中沿着任意形状的闭合回路 L 对坐标进行的曲线积分。全电流定律等号右边的两项是以 L 为周

界的任意形状的曲面 Σ 上对坐标的曲面积分：第 1 项为电荷流动引起的电流，既包含传导电流 I 也包含运流电流 I_v；交换微积分次序后可以看出，第 2 项为电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的通量 Φ_D 随时间 t 的变化率，即位移电流 I_D。麦克斯韦推广了安培环路定律，不仅传导电流、运流电流可以引起磁场，而且变化的电场即位移电流也可以引起变化的磁场。图 1-2-1 给出的是位移电流和传导电流一起引起磁场的示意图。

方程组的第 3 式高斯通量定理说明，在任何封闭曲面 Σ 上电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的通量 Φ_D 就等于封闭曲面 Σ 内包围的全部电荷量 q。麦克斯韦把这一关系推广到随时间变化的交变电场之中。方程组的第 4 式磁通连续性原理说明，任何形状的封闭曲面 Σ 上总的磁通量 Φ_B 为零，即磁感线是闭合曲线。麦克斯韦把这一关系也推广到随时间变化的交变磁场之中。

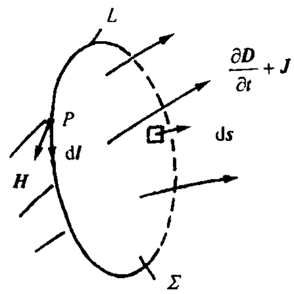

图 1-2-1　位移电流示意图

麦克斯韦方程组不仅能反映交变电磁场的客观规律，同样也能反映静电场、恒定电场和恒定磁场的基本规律。当电场、磁场不随时间发生变化时，方程组中的第 1 式就变成了静电场的环路定理；第 2 式就变成了恒定磁场的安培环路定律；而第 3 和第 4 式原来就是静电场和恒定磁场中的基本原理。

麦克斯韦在前人的基础上，发展了法拉第电磁感应学说，提出了位移电流的设想，推广了安培环路定律。麦克斯韦全面总结了宏观电磁现象的各种规律之后，完成了以麦克斯韦方程组为核心的理论体系。这不仅能说明当时已知的所有电磁现象，还成功地预言了电磁波的存在。

例 1-2-1　交流电源 $u(t)=U_0\sin(\omega t)$ 接在平板电容器 C 的两端，如图 1-2-2 所示。(1) 试证电容器 C 中的位移电流 I_D 与导线中的传导电流 I 相等；(2) 计算导线 MN 周围的磁场强度（忽略另外三段导线的影响）和极板内的磁场强度。

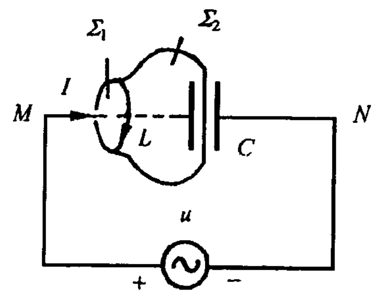

图 1-2-2　例 1-2-1 示意图

解：(1) 导线中的传导电流为

$$I=C\frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t}=\omega CU_0\cos(\omega t)$$

极板面积为 A，极板间距为 d，介电常数为 ε 为的电容器的电容量为

$$C=\varepsilon\frac{A}{d}$$

若不计边缘效应，则电压在电容器中建立的均匀电场 $E=u/d$，因此电位移和位移电流分别为

$$D=\varepsilon E=\varepsilon\frac{U_0}{d}\sin(\omega t)$$

$$I_D=\iint_\Sigma\frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\omega\varepsilon\frac{A}{d}U_0\cos(\omega t)=\omega CU_0\cos(\omega t)=I$$

证毕。

(2) 在平板电容器附近，与导线垂直的平面上，以导线中心 O 为圆心取一个半径为 r 的圆形的平面，忽略稍远处导线的影响，可认为这个圆形平面上的磁场线都是同心圆。在这个环面的周界 L 上磁场处处相等，因此麦克斯韦方程组第 2 式等号左边的环路积分为

$$\oint_L \boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=2\pi rH_\varphi$$

由于只有传导电流 I 通过这个环面，根据全电流定律可知，电容器极板外的磁场强度为

$$H_\varphi = \frac{I}{2\pi r} = \frac{\omega C}{2\pi r} U_0 \cos(\omega t)$$

如果极板的形状是半径为 R 的圆形，若忽略边缘效应，还可以求两极板间的磁场强度

$$2\pi r H_\varphi = \oint_L \boldsymbol{H} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \frac{\partial D}{\partial t} \pi r^2$$

$$H_\varphi(r) = \frac{r}{2}\frac{\partial D}{\partial t} = \frac{r}{2\pi R^2} \omega C U_0 \cos(\omega t)$$

上式中

$$C = \varepsilon \frac{A}{d} = \varepsilon \frac{\pi R^2}{d}$$

是圆形平板电容器的电容量。

例 1-2-2 已知某良导体的电导率为 $\sigma = 10^7$ S/m，相对介电常数 $\varepsilon_r = 1.0$。如果导体中的电场为 $E = E_0\cos(\omega t)$，试求位移电流密度的振幅值 J_D 与传导电流密度的振幅值 J 之比。

解：由已知条件可求得位移电流、传导电流分别为

$$J_D(t) = \frac{\partial D}{\partial t} = -\omega\varepsilon E_0 \sin(\omega t), \qquad J(t) = \sigma E_0 \cos(\omega t)$$

从上式可以看出，位移电流超前于传导电流 90° 相角。从上式可求得位移电流与传导电流的振幅之比

$$\frac{J_D}{J} = \frac{\omega\varepsilon E_0}{\sigma E_0} = \frac{\omega\varepsilon_r\varepsilon_0}{\sigma} = \frac{2\pi f \times 1.0 \times \frac{1}{36\pi} \times 10^{-9}}{10^7} = 5.556 \times 10^{-18} f$$

无线电波有效的频率范围是 10 kHz 到 30 GHz，因此一般无线电波在良导体内的位移电流远远小于传导电流。

积分形式的麦克斯韦方程组表示了某一范围内的电磁场量的之间的相互关系。但是，在实际工作中更重要的是了解场中某点的场量，因此必须将积分形式的麦克斯韦方程组变换成相应的微分形式的麦克斯韦方程组。

§ 1-3 麦克斯韦方程组的微分形式

在“高等数学”课程中，大家学习了高斯公式和斯托克斯公式。前者能够把任意形状封闭曲面 Σ 对坐标的曲面积分变为体积积分，后者能够把任意形状闭合环路 L 对坐标的环路积分变为曲面积分：

$$\begin{aligned} &\oiint_\Sigma \boldsymbol{D} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \iiint_V \nabla \cdot \boldsymbol{D} \mathrm{d}\tau \\ &\oint_L \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = \iint_\Sigma \nabla \times \boldsymbol{E} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{s} \end{aligned} \tag{1-3-1}$$

上面第 1 式中等号右边的体积积分限 V 的表面就是等号左边的 Σ；第 2 式等号右边的积分限 Σ 的周界就是等号左边的 L，曲面 Σ 的正方向与周界 L 的积分环绕方向呈右手螺旋关系。

在麦克斯韦方程组中，把法拉第电磁感应定律和全电流定律两式的等号左边运用斯托克斯公式，等号两边都成了曲面积分；把高斯通量定理和磁通连续性原理两式的等号左边运用高斯公式，等号两边都成了体积积分。由于等号左右两边的积分限相同，而且积分限形状可以是任意的，因此等号两边的被积函数必然相等。这样就可得到微分形式的麦克斯韦方程组

$$\left.\begin{aligned}&\iint_{\Sigma}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=-\iint_{\Sigma}\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&\iint_{\Sigma}\nabla\times\boldsymbol{H}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}=\iint_{\Sigma}\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}\\&\iiint_{V}\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau=\iiint_{V}\rho\,\mathrm{d}\tau\\&\iiint_{V}\nabla\cdot\boldsymbol{B}\,\mathrm{d}\tau=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\nabla\times\boldsymbol{E}=-\dfrac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\\\nabla\times\boldsymbol{H}=\boldsymbol{J}+\dfrac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\\\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\rho\\\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0\end{cases}\tag{1-3-2}$$

从“高等数学”课程中我们知道，上式中的“$\nabla\cdot$”和“$\nabla\times$”代表着不同的微分运算。书中附录五分别给出了在三种坐标系中矢量的这两种微分运算公式。在直角坐标系，仅在直角坐标系中，“∇”可以看成是微分算符，称为“纳布拉”算符或“哈密顿”算符

$$\nabla=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\tag{1-3-3}$$

在“高等数学”课程中，我们学习了矢量散度和旋度的概念。矢量场中任意给定点 P 的散度定义为封闭曲面 Δs 所包围的体积元 $\mathrm{d}\tau$ 中的通量 $\Delta\Phi$ 与 $\mathrm{d}\tau$ 比值的极限，由高斯公式以及体积积分的中值定理可得

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\lim_{\Delta\tau\to P}\frac{\oiint_{\Delta s}\boldsymbol{D}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta\tau}=\lim_{\Delta\tau\to P}\frac{\iiint_{\Delta\tau}\nabla\cdot\boldsymbol{D}\mathrm{d}\tau}{\Delta\tau}=\nabla\cdot\boldsymbol{D}\tag{1-3-4}$$

上式中，$\Delta\tau\to P$ 表示包围点 P 的体积元 $\Delta\tau$ 逐渐缩小成一点。从矢量场的散度定义不难看出，矢量的散度代表了矢量场中单位体积所发散出来的矢量的通量。

对于有旋的矢量场，在给定点各不同方向的涡旋程度是不一样的。为了考察矢量在某个给定点 P 处沿某个方向 $\boldsymbol{n}$ 的涡旋程度，通过该点以 $\boldsymbol{n}$ 为单位法向矢量做一个平面，围绕点 P 作一个很小的闭合回路 Δl，它所对应的矢量面积元是 $\Delta\boldsymbol{s}=\boldsymbol{n}\Delta s$。点 P 沿单位矢量 $\boldsymbol{n}$ 方向的环量面密度定义为闭合回路 Δl 上的环量 $\Delta\Gamma$ 与面积元 Δs 比值的极限，利用积分中值定理可得

$$\mu_n=\lim_{\Delta s\to P}\frac{\oint_{\Delta l}\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to P}\frac{\iint_{\Delta s}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to P}\frac{\iint_{\Delta s}\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}s}{\Delta s}=\nabla\times\boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}\tag{1-3-5}$$

上式中 $\Delta s\to P$ 表示包围点 P 的面积元 Δs 逐渐缩小成一点。从环量面密度 μ_n 的定义可以看出，它代表了矢量场中某点 P 在与所考察方向 $\boldsymbol{n}$ 垂直的单位面积上的环量值。可见，所考察点在某方向的环量面密度值 μ_n 越大，该方向的涡旋程度就越大。显然，式(1-3-5)中在点 P 的矢量

$$\mathbf{rot}\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{E}\tag{1-3-6}$$

所在方向上具有最大的环量面密度 $\mu_{\max}$，也就是说它既能表明点 P 最大的涡旋方向又能表明点 P 的在该方向上的涡旋程度。于是，就把 $\mathbf{rot}\boldsymbol{E}$ 定义为所考察的矢量场在点 P 的旋度。

在直角坐标系中，矢量的散度和旋度可以分别写成

$$\mathrm{div}\boldsymbol{D}=\nabla\cdot\boldsymbol{D}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot(\boldsymbol{i}D_x+\boldsymbol{j}D_y+\boldsymbol{k}D_z)=\frac{\partial D_x}{\partial x}+\frac{\partial D_y}{\partial y}+\frac{\partial D_z}{\partial z}\tag{1-3-7}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{E}=\nabla\times\boldsymbol{E}&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times(\boldsymbol{i}E_x+\boldsymbol{j}E_y+\boldsymbol{k}E_z)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\dfrac{\partial}{\partial x}&\dfrac{\partial}{\partial y}&\dfrac{\partial}{\partial z}\\E_x&E_y&E_z\end{vmatrix}\\&=\boldsymbol{i}\left(\frac{\partial E_z}{\partial y}-\frac{\partial E_y}{\partial z}\right)+\boldsymbol{j}\left(\frac{\partial E_x}{\partial z}-\frac{\partial E_z}{\partial x}\right)+\boldsymbol{k}\left(\frac{\partial E_y}{\partial x}-\frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\end{aligned}\tag{1-3-8}$$

上式中，“div”和“**rot**”分别是矢量进行散度和旋度运算的符号，它们分别与“$\nabla\cdot$”和“$\nabla\times$”的意义相同。有些书中用“**curl**”作为矢量旋度的符号，与“**rot**”的意义是完全一样的。矢量的散度是标量，而旋度则是矢量。为了强调矢量的旋度仍是矢量，故旋度的函数符号“**rot**”是加粗的。对于圆柱形坐标系和球坐标系的情形请读者参看本书后面的附录五。

如果一个矢量场在某个空间内的散度为零，那么在这个空间内的任意封闭曲面上，其通量必然为零。如果一个矢量场在某个空间内的旋度为零，那么在这个空间内任何闭合曲面上，其环量必然为零。

对于随时间变化的交变电场和交变磁场来说，它们不再是彼此孤立的。二者有着不可分割的必然联系。从法拉第电磁感应定律可以看出，只要磁场随时间发生变化就会引起变化的电场；从全电流定律也可以看出，只要电场随时间发生变化就会引起变化的磁场。交变电场不是像静电场那样的保守场(无旋场)，而是具有闭合电场线的涡旋场(有旋场)，因而其环路积分不为零；恒定磁场在电流分布区域的内部才是有旋场，而交变磁场在电流分布区域的内部和外部都是有旋场。交变磁场的环绕正方向与传导电流、位移电流的正方向呈右手螺旋关系，因而全电流定律表达式等号两边的符号相同。交变电场的环绕正方向与磁感应强度矢量的变化率呈左手螺旋关系，因而法拉第电磁感应定律表达式等号两边的符号相反。从这两个定律还可以看出，交变电场和交变磁场随时间的变化率越大，磁场和电场涡旋的程度就越大。在以后的课程中大家将会了解到，简谐交变电磁场的频率越高，电磁波辐射的能力就越强。

既然麦克斯韦方程组全面概括了宏观电磁现象，这个方程组中的各方程式之间有什么关系，方程组与前面我们讨论的电流连续性方程又有什么关系呢？下面我们就来分析这些关系。

麦克斯韦方程组的4个方程式中，两个旋度方程可以认为是独立的；而两个散度方程不是独立的，它们分别可以由相应的旋度方程导出来。可以证明，任何矢量在进行旋度运算之后再进行散度运算，其结果恒为零

$$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})\equiv 0 \tag{1-3-9}$$

把微分形式的法拉第电磁感应定律表达式等号两边同时取散度，等号右边必然也等于零

$$\nabla\cdot\left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)=-\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\equiv 0$$

把上式对时间变量 t 积分，并取积分常数为零，便可得到式(1-3-2)中的第4式，即磁通连续性原理微分表达式。

利用高斯公式，由积分形式的电流连续性方程式(1-1-15)可以导出微分形式的电流连续性方程

$$\iiint_V \nabla\cdot\boldsymbol{J}\mathrm{d}\tau=-\iiint_V \frac{\partial\rho}{\partial t}\mathrm{d}\tau \qquad\Rightarrow\qquad \nabla\cdot\boldsymbol{J}=-\frac{\partial\rho}{\partial t} \tag{1-3-10}$$

由式(1-3-9)给出的关系可知，对全电流定律表达式等号两边进行散度运算，等号左边为零必然导致右边也为零

$$\nabla\cdot\left(\boldsymbol{J}+\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}\right)=\nabla\cdot\boldsymbol{J}+\frac{\partial}{\partial t}\nabla\cdot\boldsymbol{D}\equiv 0$$

把微分形式的电流连续性方程代入上式，可得

$$\frac{\partial}{\partial t}(\nabla\cdot\boldsymbol{D}-\rho)=0$$

把上式对时间变量 t 积分，并取积分常数为零，便可得到式(1-3-2)中的第3式，即微分形式