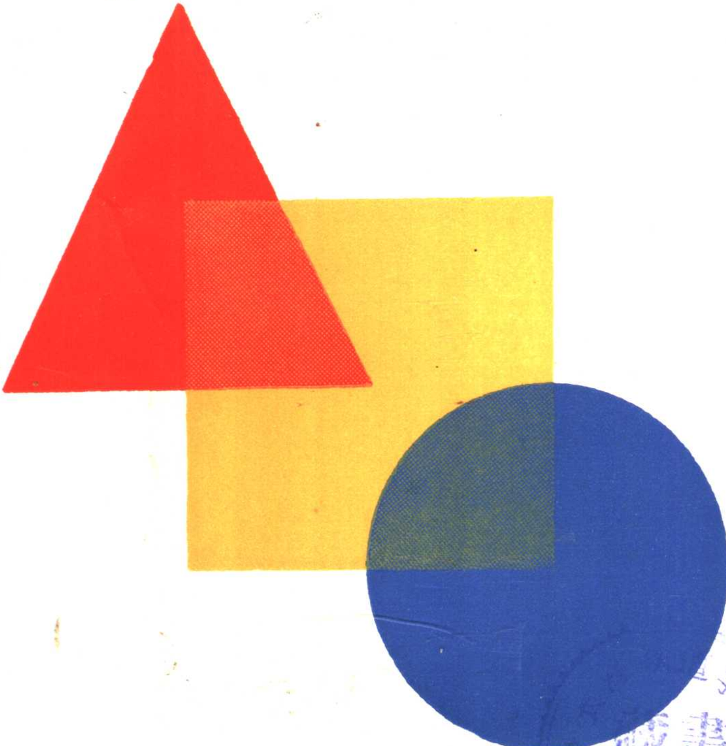
PINGMIANJIHE de ZHENGTIJIQIAO



平面几何的证题技巧

青海人民出版社

平面几何的证题技巧

杨清和 编 1982

青海人民出版社

西 宁

封面设计　任素贤

平面几何的证题技巧

杨　清　和　编

青海人民出版社出版
（西宁市西关大街96号）
青海省新华书店发行　青海新华印刷厂印刷

开本：787×1092毫米 1/32　印张：3.5　字数：77,000
1982年5月第1版　1982年5月第1次印刷
印数：1—36,700

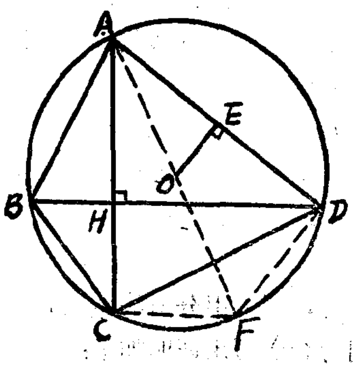
统一书号：13097·45　定价：0.28元

目　录

绪　论

有的同学在碰到较难证明的平面几何题时，往往不知道该怎么分析，从哪里下手，冥思苦想了半天也作不出来，感到焦急和苦恼。那么，证题到底有没有点规律或技巧，证题时需采取哪些步骤呢？一般来说，有以下几个步骤：

（一）**要弄清题意**.不论哪种题目，都由已知条件和需要证明的结论两个部分组成。所以，我们拿到一个题目，首先就要将题目中哪些是已知条件，哪些是需要证明的结论弄清楚。然后画出正确的图形。譬如下面这道题："若圆内接四边形的对角线互相垂直，则这个四边形任意一边的长等于圆心到它的对边的距离的两倍。"题目中"若"字之后、"则"字之前全是已知条件；"则"字之后就需要仔细一点了："……到……的距离"这个概念的特定含义也属于已知条件；只有"……是……的两倍"是结论。于是我们写出"已知"和"求证"并画出图形。



已知：如图，四边形$ABCD$是$\odot O$的内接四边形，$AC\perp BD$，垂足为H，$OE\perp AD$，垂足为E。

求证：$BC=2\cdot OE$.

（二）**找出已知条件与结论之间的关系**。这方面用得最多的是分析法和

综合法。

分析法是执果索因。就是要证得结论，需要找出什么，我们不妨简称之为“需知”。以上题为例，结论是 $BC = 2\cdot OE$，假定我们作⊙O的直径 AF，连结 DF（为什么要画这样的辅助线，后面将详细讨论）。根据垂径分弦定理和三角形中位线定理，我们知道 $DF = 2\cdot OE$，只要我们能证得 $DE = BC$，就一定能得到 $BC = 2\cdot OE$，所以“$DF = BC$”就是经分析找出的“需知”.下面我们再作进一步的分析，如果再连结 CF，只要证出四边形 $BCFD$ 是一个等腰梯形，立刻就能得到“$DF = BC$”。所以“需知”就成了“$BCFD$ 是等腰梯形”。

综合法是由因导果.就是从已知条件出发，看看经过一些推理，还可以得到一些什么，我们不妨简称之为“可知”。仍以上题为例，$AC \perp BD$ 是已知，可知 $\angle AHD = 90°$，AF 是直径这是由作图知道的，可以作为已知，于是 $\angle ACF = 90°$，这是可知。由 $\angle AHD = \angle ACF$，可以导出 $BD \parallel CF$，这又是可知。

只要能由“已知”和“可知”推出“需知”，问题就解决了.这就是证题的关键所在.象上题中，由 $BD \parallel CF$，用定理“平行弦之间所夹的弧相等”可以得到 $\overset{\frown}{BC} = \overset{\frown}{DF}$，再用定理“同圆或等圆中，相等的弧所对的弦相等”就可得到 $BC = DF$。从而命题得证。

（三）写出证明。上面讲了分析法和综合法，而实际上在探求证题思路时，主要用分析法。因为用综合法往往枝节横生，去向不明。但是，在写出证明过程时，用综合法却比较好，因为用分析法叙述起来措词往往不易得当。如上题可用综合法写出证明如下：

证明：作直径AF，连结FD，CF。

$\because$ $OE\perp AD$，$\therefore AE=ED$。

又 $AO=OF$，$\therefore DF=2\cdot OE$。

$\because$ AF是直径，$\therefore \angle ACF=90^\circ$。

又$\because AC\perp BD$，$\therefore BD /\!/ CF$。

从而 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{DF}$，$BC=DF$。

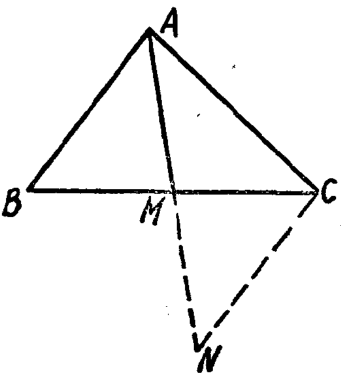
故 $BC=2\cdot OE$。

同学们！平面几何的内容是很丰富的，仅证明题而言，种类就很多，证题方法也各不相同。光是死记定理，死记某几类问题的证法是不行的。重要的应当是掌握一般的思维方法和证题规律。这本书的着眼点就是给大家介绍点思维方法、证题思路和技巧，证明过程则写得较简单，以能看清头绪为原则，免得同学们看了一大篇证明过程而得不到要领，所以书中的证明全叫“略证”。另外，本书绝大部分例题都只给出了一种证明方法，以说明一个观点。当然，许多题可以有多种证明方法。

下面我们通过各种例题，向同学们介绍证平面几何题的一些基本方法，希望大家在掌握课本知识的基础上读了这本小册子能得到进一步的提高。

常用的引辅助线的方法

正如同学们已经知道的那样，在平面几何中，有很多题目单单利用原有图形来进行证题是很难证出来的。举个例子来说吧：AM是$\triangle ABC$中BC边上的中线，求证：$AB+AC>2AM$。这一题目，如果直接来证明是很难证出来的。但是，如果利用添加适当的辅助线这一方法，那就很容易证明出来。我们延长AM到N，使$MN=AM$，并连结CN，那末就可以利用"三角形任意两边之和大于第三边"这个定理得到$NC+AC>AN$，从而使本题得到证明。由此看来，有相当一部分平面几何题，需要用添加辅助线的方法来证明。引辅助线的方法是多种多样的。但是，也不象一些同学想象的那样无章可循。规律还是有的。这里给大家介绍两种最常用的方法：一是从已知条件入手，看怎样的已知条件引怎样的辅助线；二是从结论入手，看该如何引辅助线。



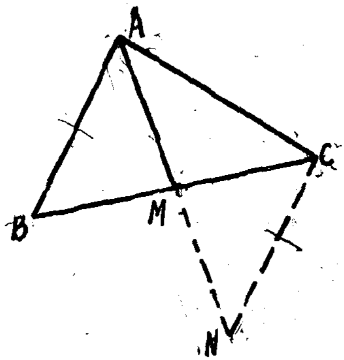
下面分别来讲。

（一）从已知条件入手，寻求辅助线。

1.有关三角形中线的题目，常将中线加倍。

例1 AM是$\triangle ABC$中BC边上的中线，求证：

$AB+AC>2AM$。



略证 延长AM到N，使$MN=AM$。连结NC。

从$\triangle ABM\cong\triangle NCM$可得

$$AB=NC,$$

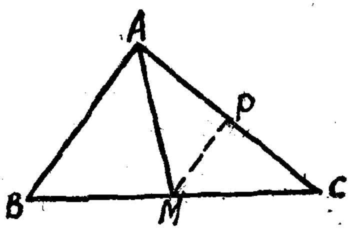
而 $NC+AC>AN$，

故 $AB+AC>2AM$。

2.含有中点的题目，常利用三角形的中位线。

例2 （同例1）。

略证 过M作$MP\parallel AB$交AC于P。



于是 $AP=\frac{1}{2}AC$，

$$MP=\frac{1}{2}AB.$$

但 $MP+AP>AM$，

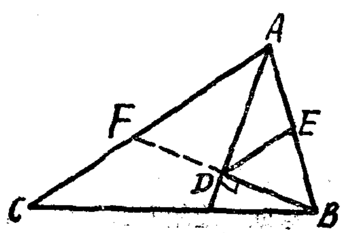
即 $\frac{1}{2}AB+\frac{1}{2}AC>AM$，

故 $AB+AC>2AM$。

3.含有角平分线的题目，常以角平分线为对称轴画出全等三角形。

例3 从$\triangle ABC$的顶点B作$\angle A$的平分线的垂线，垂足为D。作$DE\parallel CA$交AB于E。求证：

$AE=BE$。



略证 延长BD交AC于F，

于是 $\triangle ABD \cong \triangle AFD$，

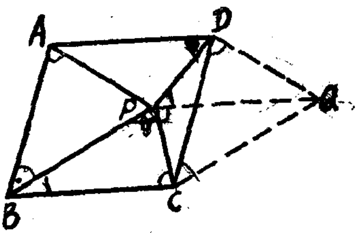
$\therefore$ $BD=DF$.

又$\because$ $DE \parallel AC$，

$\therefore$ $AE=BE$.

4.已知条件和结论在图中较为分散的题目，可将某些线段平行移动，使它们相对集中。

例4 设P是$\square ABCD$内部的一点，且$\angle PAB=\angle PCB$，则$\angle PBA=\angle PDA$.



分析 过P作$PQ \perp AD$，连结CQ、DQ.显然有$PQ \perp BC$.

这样已知条件中的两个角、结论中的两个角便集中到了四边形$PCQD$中。

略证 易见$\angle QDC=\angle PAB$，$\angle QPC=\angle PCB$.

从而 $\angle QDC=\angle QPC$.

$\therefore$ P、C、Q、D四点共圆，

从而 $\angle QCD=\angle DPQ$.

但 $\angle QCD=\angle PBA$，$\angle DPQ=\angle PDA$，

故 $\angle PBA=\angle PDA$.

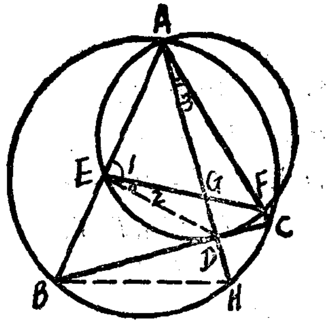
5.已知条件中有直径出现的题目，常画出其上的圆周角，得到直角。

例5 延长$\triangle ABC$的高AD交其外接圆于H。以AD为直径作圆分别交AB、AC于E、F，连结EF交AD于G.求证：$AD^2=AG \cdot AH$.

略证 连结DE.在$Rt\triangle ABD$中，应用射影定理得

$AD^2 = AE \cdot AB$。

连结BH。



∵ $\angle 1 + \angle 2 = 90°$，

$\angle C + \angle 3 = 90°$，

且 $\angle 2 = \angle 3$，

∴ $\angle 1 = \angle C = \angle H$。

∴ B、H、G、E四点共圆，

从而 $AG \cdot AH = AE \cdot AB$。

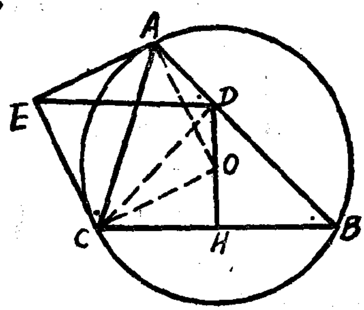
故 $AD^2 = AG \cdot AH$。

6.已知条件中有圆的切线出现的题目，常画出过切点的半径或弦切角。

例6 $\triangle ABC$中，BC边的垂直平分线分别交AB、BC于D、H，过A、C分别作外接圆的切线AE、CE。求证：$DE \parallel BC$。

略证 连结OA、OC、CD。

显然 $\angle ACE = \angle B$。



∵ $\angle AOC = 2\angle B \stackrel{m}{=} \overset{\frown}{AC}$，

$\angle ADC = \angle B + \angle DCB = 2\angle B$，

∴ $\angle ADC = \angle AOC$。

但 $\angle AOC + \angle AEC = 180°$，

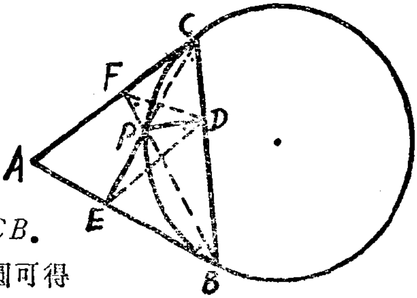
∴ $\angle ADC + \angle AEC = 180°$，

从而 A、E、C、D四点共圆，

于是 $\angle ADE=\angle ACE=\angle B$，

故 $DE\parallel BC$。

例7 自圆周上一点P至两切线AB、AC及两切点的连线BC引垂线PE、PF、PD，垂足分别为E、F、D.则$PD^2=PE\cdot PF$。



略证 连结PB、PC。

显然 $\angle PBA=\angle PCB$。

由B、E、P、D四点共圆可得

$\angle PBA=\angle PDE$，

由C、D、P、F四点共圆可得

$\angle PCD=\angle PFD$，

$\therefore\ \angle PDE=\angle PFD$。

同理可得 $\angle PED=\angle PDF$。

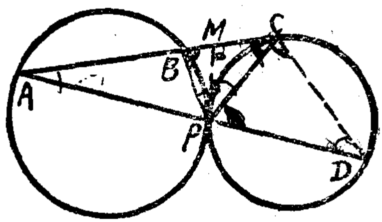
从而 $\triangle PDE\backsim\triangle PFD$，

$$\therefore\ \frac{PD}{PF}=\frac{PE}{PD}$$

故 $PD^2=PE\cdot PF$。

7.已知条件中有相切的两个圆的题目，常画出这两个圆的公切线。

例8 两圆外切于P，一直线与一圆相交于A、B而与另一圆相切于C。延长AP交后圆于D。求证：$PC^2=PB\cdot PD$。



略证 过P作两圆的公切线交AC于M。连结CD。

$$\angle BPC=\angle MPB+\angle MPC$$
$$=\angle A+\angle MCP=\angle CPD.$$

又 $\angle MCP=\angle D$,

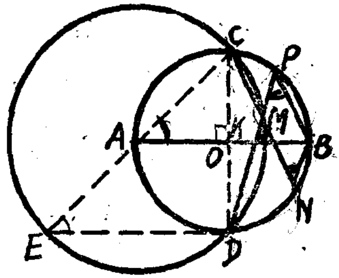
∴ $\triangle BPC\backsim\triangle CPD$,

∴ $\dfrac{PC}{PD}=\dfrac{PB}{PC}$,

故 $PC^2=PB\cdot PD$.

8.已知条件中有相交的两个圆的题目，常画出公共弦.

例9 以AB为直径的⊙O交⊙A于C、D两点，M为⊙A上一点，CM、DM的延长线分别交⊙O于N、P. 则四边形$MNBP$是平行四边形.



略证 连结CD，交AB于K，作⊙A的直径CE，连结ED.

∵ $\angle EDC=\angle AKC=Rt\angle$,

∴ $ED\parallel AB$,

从而 $\angle E=\angle CAB$.

（画出公共弦后，往往设法用“圆内接四边形的外角等于它的内对角”这个定理）

又∵ $\angle DMN=\angle E$,

∴ $\angle CAB=\angle DMN$.

而 $\angle N=\angle CAB$,

∴ $\angle N=\angle DMN$,

∴ $PM\parallel BN$.

另一方面 $\overset{\frown}{BC}=\overset{\frown}{BD}$,

$\therefore \quad \angle N = \angle P$，

$\therefore \quad \angle P = \angle DMN$，

$\therefore \quad PB \parallel MN$。

故　$MNBP$是一个平行四边形。

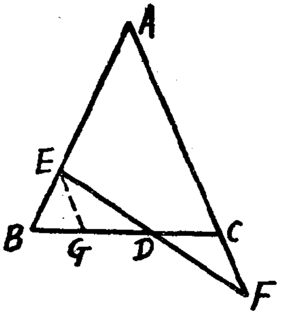
（二）从结论入手，寻求辅助线。

在某几类问题中，画辅助线是有固定办法的；而一般地，我们可以先暂时把结论也当作已知条件和题中原有已知条件合到一起，进行推理，以寻求适当的辅助线。

我们先来看几种类型的问题。

1.结论是两条线段相等这类题目，常画辅助线构成全等三角形，或利用关于平分线段的一些定理。

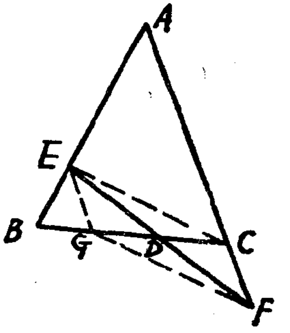
例1 $\triangle ABC$中，$AB = AC$。E是AB上一点，F是AC的延长线上一点，$BE = CF$，EF交BC于D。求证：$DE = DF$。



略证1 过E作$EG \parallel AF$交BC于G，由$\triangle DEG \cong \triangle DFC$，可得

$$DE = DF.$$

说明： 过F作$FH \parallel AB$交BC的延长线于K，证$\triangle BDE \cong \triangle KDF$或过$E$、$F$分别作$EM \perp BC$、$FN \perp BC$，$M$、$N$为垂足，证$\triangle EMD \cong \triangle FND$均可。



略证2 过E作$EG \parallel AF$交BC于G，连结GF、EC。由$EGFC$是一个平行四边形，可得

$DE=DF$.

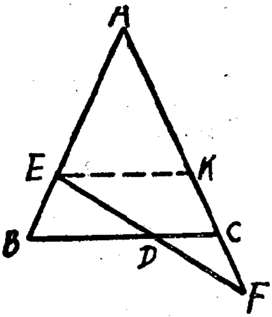
略证3 过E作$EK\parallel BC$交AC于K。由$\angle B=\angle ACB$可知$BCKE$是一个等腰梯形，从而

$$CK=BE=CF.$$

又在$\triangle FKE$中，

$$CD\parallel KE,$$

故 $DE=DF$.



2.结论是一条线段与另一条线段之和等于第三条线段这类题目，常采用截长法或补短法。

所谓截长法，就是将第三条线段分为两部分，证其中的一部分等于第一条线段而另一部分等于另一条线段。如：

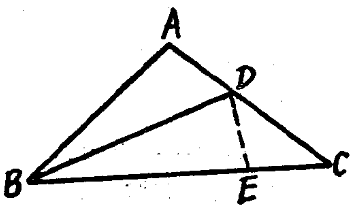
例2 在$\triangle ABC$中，$\angle A=100^\circ$，$AB=AC$，BD为$\angle B$的平分线。求证：$AD+BD=BC$.

略证 在$\triangle BCD$中，

$$\angle BDC=120^\circ,$$

$\therefore$ $BC>BD$.

在BC上截取$BE=BD$，连结DE。



由$\angle C=40^\circ=\angle CDE$可得

$$DE=EC,$$

由$\triangle DEC\backsim\triangle BAC$及$BD$平分$\angle B$可得

$$DE=AD,$$

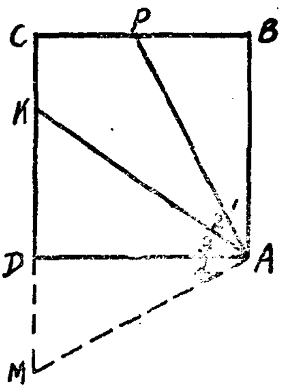
$\therefore$ $EC=AD$,

故 $AD+BD=EC+BE=BC$.

所谓补短法，就是延长第一条线段，作出两条线段的和，再证它等于第三条线段。如：

例3 已知K为正方形$ABCD$的CD边上的一点，$\angle BAK$的平分线交BC于P。求证：$BP+KD=AK$。

略证 延长KD到M，使$DM=BP$，连结AM。由$\triangle ADM \cong \triangle ABP$可得



$$\angle M=\angle BPA,$$

$$\angle 1=\angle 4.$$

而 $\angle BPA=\angle PAD$

$=\angle 2+\angle 3$

$=\angle 4+\angle 3$

$=\angle KAM,$

$\therefore$ $\angle M=\angle KAM,$

从而 $KM=AK,$

即 $DM+KD=AK,$

故 $BP+KD=AK.$

3.结论是一线段等于另一线段的两倍这类题目，常采用折半法或加倍法。

所谓折半法，就是找出或作出等于较长线段的一半的线段，证它与较短线段相等。

一般来说，折半法常用的思路有二：一是取长线段的中点，直接得到较长线段之半；二是利用三角形的中位线定理，视较长线段为一边，则与其平行的中位线长等于它的一半。如：

例4 已知在$\triangle ABC$中，$AB=AC$，延长AB到D，使$BD=AB$，作AB上的中线CE，连结CD。求证：$CD=2CE$。

略证1 取CD的中点H，连结BH。

则 $BH=\frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB=BE$，

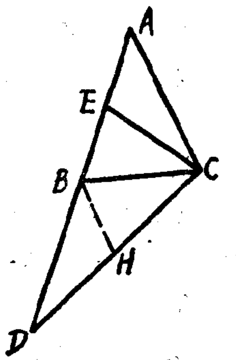
又∵ $\angle HBC=\angle ACB=\angle ABC$，

及 $BC=BC$，

∴ $\triangle HBC\cong\triangle EBC$，

从而 $CH=CE$，即$\frac{1}{2}CD=CE$，

故 $CD=2CE$。



略证2 取AC的中点K，连结BK。

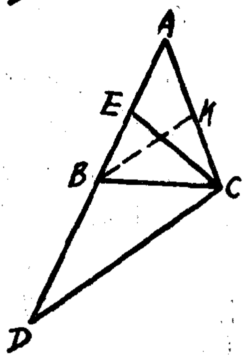
∵ $AB=BD$，$AK=KC$，

∴ $BK=\frac{1}{2}CD$，即$CD=2BK$。

易证 $\triangle EBC\cong\triangle KCB$，

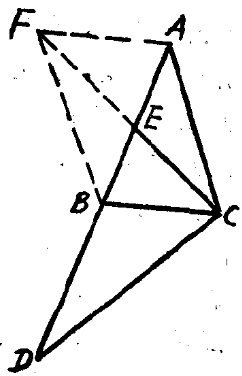
从而 $CE=BK$，

故 $CD=2CE$。



所谓加倍法，就是找出或作出等于较短线段两倍的线段，证它与较长线段相等。

一般来说，加倍法常用的思路有二：一是延长较短线段，使延长线等于原线段，于是得到较短线段之二倍；二是利用三角形的中位线定理，若较短线段为某三角形的一条中位线，则与之平行的那条边长就等于较短线段的二倍。如上题还可以有以下两种证法。



略证3 延长CE到F，使$EF=CE$，连结FA、FB。显然，$AFBC$是平行四边形。