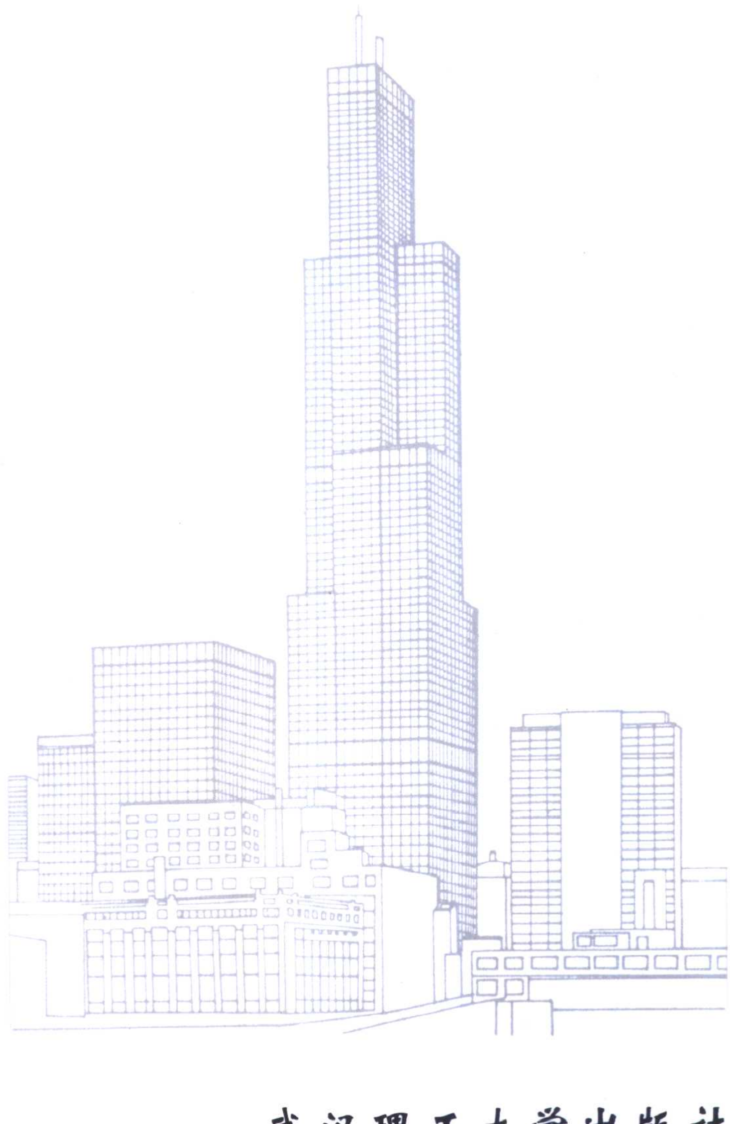
普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会　审订

弹性力学及有限元

T X L X J Y X Y

赵均海　汪梦甫　主编



武汉理工大学出版社

普通高等学校土木工程专业新编系列教材
中国土木工程学会教育工作委员会　审订

弹性力学及有限元

赵均海　汪梦甫　主编

武汉理工大学出版社
·武汉·

【内容提要】

本书为普通高等学校土木工程专业新编系列教材之一，分弹性力学和有限元两篇，共11章，内容有绪论、应力和应变、弹性力学平面问题的解法及一般定理、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、空间问题的解答、薄板弯曲问题、能量原理与变分法、平面问题的有限单元法、弹性力学平面问题的高精度单元、空间问题的有限元法、板壳问题的有限元法及附录。

本书可作为普通高等学校土木工程专业的教材，也可供土建类其它专业作为弹性力学和有限元的参考教材，也可用于土建工程技术人员参考。

【主编简介】

赵均海　男，工学博士，长安大学教授，博士生导师，现任副校长，政府特殊津贴获得者。主要从事固体力学、结构工程、生物力学、古建筑结构性能等的教学和研究工作。曾主持和参加的科研项目有国家自然科学基金、陕西省自然科学基金等10多项。已在国内外科技期刊、学术会议上发表论文80余篇，有8篇被美国工程索引(EI)收录，2篇被国际会议论文索引(ISTP)收录，20余篇被《力学文摘》收录。出版专著3部，出版教材1部。曾获陕西省高等学校优秀科学研究成果一等奖、陕西省大专院校土建专业优秀毕业设计指导教师三等奖、陕西省第七届自然科学二等优秀学术论文奖。主要学术兼职为：中国力学学会生物力学专业委员会委员、陕西省力学学会副理事长、陕西省土木建筑学会青年委员会副主任、陕西省生物医学工程学会理事。

E-mail：zhaojunhai@263.net

汪梦甫　男，湖南大学教授，博士。香港大学高级访问学者。主持完成国家计委资助项目、教育部博士点基金项目、"九五"科技攻关项目、湖南省自然基金项目6项，主持完成各种横向课题7项。在国内外重要学术刊物发表论文60余篇，出版学术专著2部，获省部级科技成果奖5项。

E-mail：mfwang@hnu.net.cn

图书在版编目(CIP)数据

弹性力学及有限元/赵均海，汪梦甫主编. —武汉：武汉理工大学出版社，2003.8
ISBN 7-5629-1988-7

Ⅰ. 弹… Ⅱ. ①赵… ②汪… Ⅲ. ①弹性力学-高等学校-教材 ②有限元法-高等学校-教材　Ⅳ. ①O343 ②O241.82

出版发行：武汉理工大学出版社(武汉市武昌珞狮路122号　邮政编码：430070)
经 销 者：各地新华书店
印 刷 者：武汉理工大印刷厂
开　　本：880×1230　1/16
印　　张：15.25
字　　数：505千字
版　　次：2003年8月第1版
印　　次：2003年8月第1次印刷
书　　号：ISBN 7-5629-1988-7/TU・204
印　　数：1～3000册
定　　价：21.50元

普通高等学校土木工程专业新编系列教材
编　审　委　员　会

出 版 说 明

1998年教育部颁布了高等学校本科专业的新专业目录后，1999年全国的高等学校都开始按照新专业目录招生。为解决土木工程专业教材缺乏的燃眉之急，武汉理工大学出版社(原武汉工业大学出版社)于2000年年初率先组织编写了这套“普通高等学校土木工程专业新编系列教材”。经中国土木工程学会教育工作委员会审订并向全国高校推荐，三年来，本套教材已为众多院校选用，并受到了普遍欢迎。其中多种教材荣获教育部全国高等学校优秀教材奖或优秀畅销书奖。截至2002年年底，系列教材中单本销量最高的已接近7万册。这充分说明了系列教材编审委员会关于教材的定位、特色和编写宗旨符合新专业的教学要求，满足了新专业的教学急需。

正如初版的出版说明中所说，本套教材是新专业目录颁布实施后的第一套土木工程专业系列教材，因此，尽管我们的编审者、编辑出版者夙兴夜寐、尽心竭力，不敢稍有懈怠，它仍然还会存在缺点和不足。首先是教材中涉及的各种国家规范问题。教材编写时正值各种规范全面修订，尚未定稿，新规范正式颁布的时间还不能确定，而专业教学对新教材需求的急迫又使编写、出版工作不能等待，因此系列教材中很多涉及到规范的地方只能按照当时基本定稿的新规范内容进行讲解或说明。当各种新的国家规范陆续正式颁布后，本套教材中相关的部分就已按照新规范及时编写了修订稿，准备作为第2版出版。其次，2002年10月，高等学校土木工程专业指导委员会编制的本科教育培养目标、培养方案及课程教学大纲正式公布，各门课程教材的修订有了更明确的方向。第三，初版教材在各院校使用过程中，师生们根据教学实践提出了很多中肯的意见，我们虽然在每本教材重印时进行了局部的修改，但仍感到存在一些问题，需要做较大的修订。因此，系列教材编审委员会决定全面修订、出版全套教材的第2版。根据土木工程专业的教学需求，本套系列教材还将增补13种，也与第2版教材同时推出。教材的编审委员会委员也相应地进行了增补和调整。

第2版教材的修订及增补教材的编写仍然秉承编审委员会一贯的宗旨，把教材的质量放在第一位，力求更好地满足课程教学的需要。我们更希望使用教材的师生一如既往，继续关心本套教材，及时反馈各校专业建设和教学改革的信息与要求，多提意见和建议，以便我们及时修订，不断完善和提高，把教材打造成名副其实的精品。

武汉理工大学出版社

2003.2

前　言

本教材是为了适应我国高等学校本科土木工程专业教学的发展和变化，根据土木工程本科专业“弹性力学”和“有限单元法”课程的教学大纲编写的。内容包括绪论、应力和应变、弹性力学平面问题的解法及一般定理、用直角坐标解平面问题、用极坐标解平面问题、空间问题的解答、薄板弯曲问题、能量原理与变分法、平面问题的有限单元法、弹性力学平面问题的高精度单元、空间问题的有限元法、板壳问题的有限元法及附录等。章节中包括了典型的例题，而且各章均有提要、小结、思考题和习题，供学生和教师使用。

本书为普通高等学校土木工程专业新编系列教材之一，由普通高等学校土木工程系列教材编审委员会组织撰稿。由赵均海、汪梦甫担任主编，其中绪论和第4章由赵均海编写，第1、2、3章由王敏强编写，第5、6、7章由王晓春编写，第8、9章及附录由马石城编写，第10、11章由汪梦甫编写，全书由赵均海修改定稿。

本书计划讲授64学时，各校可根据实际情况取舍。其学时分配建议如下：

参考学时数

章节	学时数	理论教学	实践教学
0	2	2	
1	4	4	
2	6	6	
3	4	4	
4	6	6	
5	6	6	
6	4	4	
7	4	4	
8	8	6	2
9	8	6	2
10	6	6	
11	6	4	2

本书可作为普通高等学校土木工程专业的教材，也可供土建类其它专业作为弹性力学和有限元的参考教材，也可用于土建工程技术人员参考。

在本书的编写过程中，参考了许多同行专家的成果，我们向这些专家表示诚挚的谢意。

由于时间仓促，水平有限，书中难免有不妥之处，恳请各位同行和广大读者在使用后提出意见，以便进行修改完善。

编　者

2003年2月

目　　录

第二篇　有限元

0 绪　论

0.1 弹性力学的内容

弹性力学是固体力学的一个分支学科。它是研究可变形固体在外部因素(力,温度变化,约束变动)作用下所产生的应力、应变和位移的经典科学。

弹性力学的任务与材料力学、结构力学的任务原则上是一样的,但也有区别,主要是:

(1)材料力学在解决问题时常常需要一些特殊的假设,如平截面假设,且往往采用简化了的数学模型;弹性力学则不需要这种附加的基本假设,而采用较精确的数学模型。

(2)弹性力学解决问题的范围比材料力学、结构力学要大得多。如孔边应力集中,深梁的应力分析等问题用材料力学和结构力学的理论是无法求解的,而弹性力学则可以解决这类问题。对于板和壳体结构,则必须以弹性力学为基础,才能进行研究。

(3)尽管有些工程问题可以用材料力学和结构力学求解,但无法就本身理论的精确度给出适当的评价,而弹性力学对这些初等理论的可靠性与结果的精确度可以给出适当的评价。

(4)弹性力学又为进一步研究板、壳等空间结构的强度、振动、稳定性等力学问题提供理论依据,它还是进一步学习塑性力学、断裂力学等其它力学课程的基础。

0.2 弹性力学中的几个基本概念

(1)体力　这种力是分布在物体质量上的力,如重力,惯性力。

如图 0.1 所示,假设作用于 ΔV 的体力是 ΔQ,则体力的平均集度为 $\Delta Q/\Delta V$。现令:

$$\lim_{\Delta V\to 0}\frac{\Delta Q}{\Delta V}=\boldsymbol{F} \tag{0.1}$$

式中　$\boldsymbol{F}$ 是矢量,即物体在 P 点所受体力的集度,$\boldsymbol{F}$ 的方向就是 ΔQ 的极限方向。$\boldsymbol{F}$ 在坐标轴 x,y,z 上的分量分别是 f_x,f_y,f_z,称为体力分量。

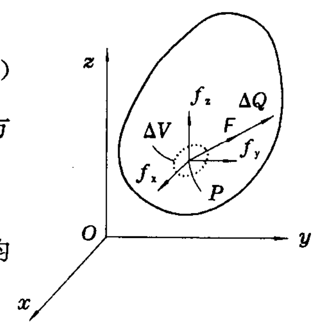


图 0.1　体力示意图

(2)面力　这种力是分布在物体表面上的力,如流体压力和接触力。

如图 0.2 所示,假设作用在物体表面 ΔS 上的面力为 ΔT,则面力的平均集度为 $\Delta T/\Delta S$。

令:

$$\lim_{\Delta S\to 0}\frac{\Delta T}{\Delta S}=\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}} \tag{0.2}$$

式中　$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$ 也是矢量。$\boldsymbol{F}_{\mathrm{S}}$ 在坐标轴 x,y,z 上的分量分别是 $X_{\mathrm{N}},Y_{\mathrm{N}},Z_{\mathrm{N}}$,称为面力分量。

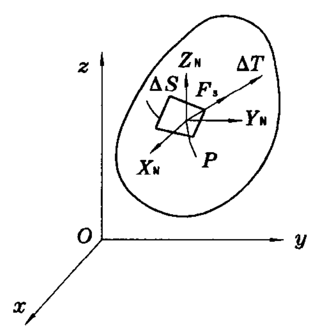


图 0.2　面力示意图

(3)应力　这种力是分布在物体内部任意点上的力,所以,实质上它是面力的一种。

用过 P 点的任意截面把物体分为 A 和 B 两部分(如图0.3 所示)。如将 B 部分移去,则 B 对 A 的作用应代之以 B 部分对 A 部分的作用力。这种力在 B 部分移去以前是物体内 A、B 间在截面 mn 上的内力,且为分布力。如从 mn 面上任一点 P 的某个小领域取出一包括 P 点在内的微小面积元素 ΔA,而 ΔA 上的内力矢量为 $\Delta \boldsymbol{T}$,则我们有:

$$S = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta T}{\Delta A} \tag{0.3}$$

这个极限矢量S就是物体在截面mn上P点的应力。在材料力学里我们已经知道应力的法向分量为正应力，用σ记之；应力的切向分量为切应力，用τ记之。

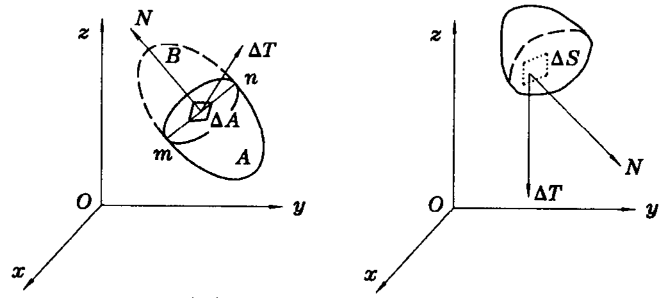


图0.3　应力示意图

由上面的分析可知，过P点可以作无数个平面，也就是说在物体内同一点P，不同截面上的应力是不相同的。所以，为了描述任一点的应力，我们不仅要知道它的大小、方向，而且还要知道其作用面。因此，必须将应力理解成张量。因为它不仅与确定一个矢量所必须的大小和方向有关，而且还与表征其作用面的矢量有关。下面我们详述应力张量诸分量的记法。

如果截面mn的外法线方向N和y轴一致(图0.4)，对截面mn称为正面。作用在正面上P点的应力的正方向应与坐标轴的正方向一致。应力σ_{ij}的第一个角标表示微分面的外法线方向，第二个角标表示应力分量的指向(与坐标轴的正方向一致)。于是，σ_{yy}即应力作用的微分面的外法线方向是y轴(第一个角标)，这个应力指向y轴的正方向(第二个角标)。再如该微分面上的切应力τ_{yz}，第一个角标表示τ_{yz}的作用面的外法线方向与y轴一致；第二个角标表示这个切应力分量指向z轴的正方向。其它正面上的应力分量可依此类推。如图0.5所示，截面mn的外法线方向与y轴相反，则我们称这个截面为负面。作用在负面上点P的应力的正方向与坐标轴的正方向相反。

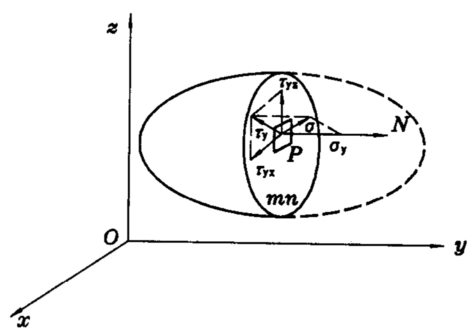


图0.4　应力张量示意图

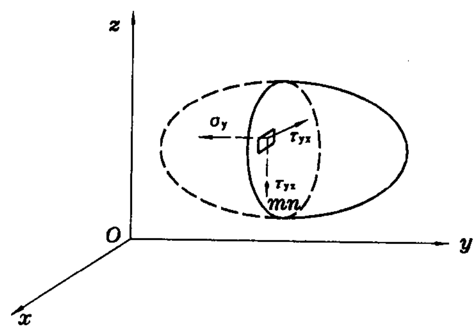


图0.5　负面应力示意图

如上所述，不同面上的应力是不同的。于是，我们不禁要问：究竟如何描绘一点处的应力状态？与材料力学的截面法不同，在弹性力学中，我们总是用一个微小的平行六面体作为分析、研究问题用的力学模型。

为研究P点处的应力状态，我们在P点处沿坐标轴x,y,z方向取一个微小的平行六面体(图0.6)，其六个面的外法线方向分别与三个坐标轴的正负方向重合，各边长分别为$\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z$。由于各个微分面很小，故可认为应力在各面上均匀分布。因此，各面上的应力便可用作用在各面中心点的一个应力向量来表示。每个面上的应力向量又可分解为一个正应力和二个切应力分量。按前面约定的表示法，图0.6给出的各应力分量均为正方向。

不难想像出，当微小的平行六面体趋于无穷小时，微分六面体上的应力就代表点P处的应力。因此，点P处的应力分量共有九个，为：

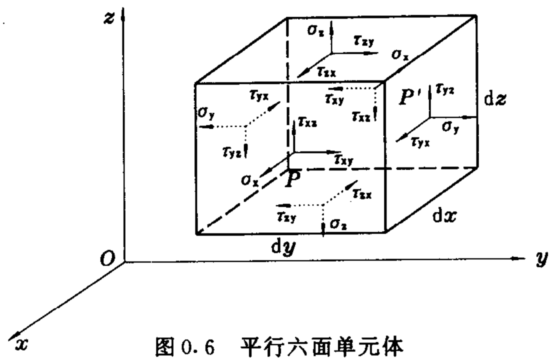


图0.6　平行六面单元体

$$\sigma_{ij}=\begin{bmatrix}\sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz}\\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz}\\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz}\end{bmatrix} \tag{0.4}$$

式中　σ_{ij}——应力张量,此处$i,j=x,y,z$。

(4)应变　是描述物体受力后发生变形的相对概念的力学量,称为正应变和切应变。

正应变——平行六面体每边长的单位长度的相对伸缩;

切应变——平行六面体各边之间直角的改变,用弧度表示。

所以,正应变有三个,即ε_{xx},ε_{yy},ε_{zz},切应变有六个,ε_{xy},ε_{xz},ε_{yx},ε_{yz},ε_{zx},ε_{zy},或记作:

$$\varepsilon_{ij}=\begin{bmatrix}\varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz}\\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz}\\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz}\end{bmatrix} \tag{0.5}$$

式中　ε_{ij}——应变张量,此处$i,j=x,y,z$。

(5)位移　物体内任一点位置的移动。

物体内任一点P的位移,可用它在坐标轴x,y,z上的分量u,v,w来表示,切应变分别是u,v,w对x,y,z的偏导数的线性组合。以后我们将证明$\varepsilon_{xy}=\frac{1}{2}\gamma_{xy}=\frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y})$,等等。

0.3　弹性力学的基本假设和解题基本方法

为了使线弹性力学能够统一下述两个矛盾问题,即,使我们的理论尽可能准确地描述真实材料在外力作用下所呈现的性态,同时又要使我们的理论在数学上简单得能够对大部分问题作出最后的解答。为此,我们就要引入下列假设:

(1)假设物体是连续介质。就是说,物体内部无空隙,因此物体中每点处的应力、应变、位移等量是连续的,可以用坐标的连续函数表示。这样,不仅避免了数学上的困难,更重要的是根据这一假设所作出的力学分析,是与大量的工程实践和试验研究的结论一致的。

(2)假设物体是均匀的和各向同性的。即认为物体内部各点及各方向上的介质相同,它们的物理、力学特性相同。这样,表征这些特性的力学参量(弹性模量,泊松系数)与位置和方向无关,是常量。必须指出,并非所有材料都是各向同性的,木材就是各向异性的材料,其顺纹和横纹的弹性性质有很大的差别。此外,许多经过碾压的金属材料也都是各向异性的。

(3)假设物体是完全弹性的。就是说物体在外部因素(荷载,温度变化,约束条件的改变等)的作用下产生变形,当外部因素去掉后,物体恢复其原来的形状而没有任何残余变形。这种性质我们称为弹性;具有这种性质的物体,我们称为弹性体。今后我们只限于研究材料在弹性极限内的各种性态。当然,在这种前提下,材料是服从虎克定律的,也即应力与应变成正比。

(4)假设物体内无初应力。即认为物体在外部因素作用之前,物体处于一种无应力的自然状态。这就是

说，弹性力学所求得的应力仅仅是由于外部因素所产生的。

（5）假设物体的变形是很小的。在外部因素作用下，物体的变形与物体原来的尺寸相比是很小的。这样，使得我们研究问题时就可以用变形以前的几何尺寸来代替变形以后的几何尺寸。也就是说，在具体计算时，可以把各点的应变和位移的二阶微量略去不计，从而使得几何变形线性化。

在上述基本假设中，除第五点是属于几何假设外，其余均属物理假设。

上列假设的根本目的在于把原来一个非线性的问题变成线性的问题，从而用线性化的理论去解决。所以，本书所讨论的理论也称为小变形的线弹性力学。

弹性力学解决问题的方法与材料力学的方法是不相同的。众所周知，在材料力学中，常用的是截面法。而在弹性力学中，常用的分离体是平行六面体或四面体，考虑这些分离体的平衡，可写出一组平衡微分方程，但未知的应力数总是超出微分方程数，所以，弹性力学的问题总是超静定的。因此，仅有静力平衡方程是不能解出所有的未知应力的，必须考虑变形的条件。由上节的假设（1）可知，物体发生变形后，还是一个连续体，即，应变必须协调，因此可得到一组表示应变协调的微分方程。此外，由虎克定律表示应力与应变之间的关系。由微分方程理论知道，解上列偏微分方程，还必须知道边界条件，这才能使问题有惟一确定的解。综上所述，求解弹性力学问题，必须考虑静力平衡方程、几何方程、物理方程以及边界条件，这就是所谓的偏微分方程的边值问题。

由于弹性力学涉及的都是偏微分方程（个别的也有常微分方程），通解往往不易求得，故常用逆解法。即先假设一个解答，若这个解答能满足所有的微分方程，同时也满足边界条件，则这个解答就是正确的，也是惟一的。有时也用半逆解法，即先设一部分解答，另一部分在解题过程中求出。

我们知道，偏微分方程的解析解一般不易得到，所以人们通过两个途径去求近似解。一是数学上的近似，如差分法，加权残数法；另一是物理上的近似，如有限单元法。上述几种方法都是常用的有力工具。

0.4 有限元的基本概念及内容

有限单元法是随着电子计算机技术的进步而发展起来的一种新兴数值分析方法，它在数值分析方法研究领域内具有重大突破性的进展。它的数学逻辑严谨，物理概念清晰，易于理解和掌握，应用范围广泛，能够灵活地处理和求解各种复杂问题，特别是它采用矩阵形式表达基本公式，便于运用计算机编程运算，这些优点赋予了有限元法强大的生命力。

有限单元法的基本思想是将连续的求解区域离散为一系列几何形状比较简单的子域（三角形、四边形、四面体、六面体等）（这个子域称为单元或元素），并且按一定方式把单元相互联结在一起的单元的组合体。由于单元能按不同的联结方式进行组合，且单元本身又可以有不同形状，因此可以模型化几何形状复杂的求解域。有限单元法作为数值分析方法的另一个重要特点是利用在每一个单元内假设的近似函数来分片地表示全求解域上待求的未知场函数。单元内的近似函数通常由未知函数或其导数在单元的各个结点的数值和其插值函数来表达。这样一来，一个问题的有限元分析中，未知场函数或其导数在各个结点上的数值就成为新的未知量（也即自由度），从而使一个连续的无限自由度问题变成离散的有限自由度问题。一经求解出这些未知量，就可以通过插值函数计算出各个单元内场函数的近似值，从而得到整个求解域上的近似解。显然随着单元数目的增加，也即单元尺寸的缩小，或者随着单元自由度的增加及插值函数精度的提高，解的近似程度将不断改进。如果单元是满足收敛要求的，近似解最后将收敛于精确解。

有限单元法的基本思路是将结构物看成由有限个划分的单元组成的整体，以单元结点的位移或结点力作为基本未知量求解。按选取基本未知量的不同，可分为位移法、力法和混合法。位移法选取结点位移为基本未知量，力法选取结点力作为基本未知量，而混合法选取一部分结点位移和一部分力作为基本未知量。在结构力学中常称杆件结构的有限单元法为结构矩阵分析，并分为矩阵位移法、矩阵力法等，这只是名称的不同而已。由于位移法应用最广泛，本书只介绍有限元位移法。

从应用数学角度来看，有限单元法基本思想的提出，可以追溯到Courant在1943年的工作，他第一次尝试应用定义在三角形区域上的分片连续函数和最小位能原理相结合，来求解St. Venant扭转问题。一些应用数学家、物理学家和工程师由于各种原因都涉足过有限单元的概念。但只是到1960年以后，随着电子数值计

算机的广泛应用和发展，有限单元法的发展速度才显著加快。

有限元方法由于节点可任意配置，对复杂形状的物体可以使边界节点完全落在区域边界上，因而在边界上给出良好的逼近；对由几种材料组合而成的物体，可以把单元的一边取在分界面上而得到较好的处理，并可根据实际需要，在一部分求解区域中（如应力集中处）配置较密集的节点，而在另一部分求解区域中配置较稀疏的节点，使其在不过分增加节点总数的情况下，提高计算精度。有限元法与以往的数值计算方法比较，既有许多共同之处，亦有其特别的优点，主要表现在：

(1)节点可任意配置，边界适应性良好，能用不同形态、不同大小和不同类型的单元划分任意几何形状的结构物。

(2)能够适应任意支承条件和任意荷载，包括温度荷载。

(3)能够模拟由不同结构元件组成的复合结构，例如带加强筋板的壳体是板、梁、块体的组合体。

(4)有限元法计算过程已形成一定的规格，国内外已有大型通用结构分析程序可供使用，掌握亦较容易。

这一方法最初应用于宇航工程，并迅速推广于造船、土木建筑、机电工业等部门。

有限元法未来的发展主要是在各工程中的应用、提高，并完善有限元方法的基本技巧。随着计算机辅助设计(CAD)在工程设计中日益广泛的应用，有限元法程序包已成为CAD常用的计算方法库中不可缺少的内容之一。并与优化设计形成集成系统，即通过计算机建立模型→有限元分析→最优结构设计→结果图形显示→判断决策→修改结构形状→有限元分析……，重复进行，直至满足设计要求为止。

有限元在今后一段时间内的发展趋势是：

(1) 在完善各种特殊领域内的线性有限元方法软件的同时，大力研制高效率的非线性有限元法软件；

(2) 逐步完善大型有限元法软件的自适应性，以提高其运行效率，并尽量减少设计人员对软件系统的干涉；

(3) 配备功能较强的前后置处理程序块，没有前后置处理及不包含CAD技术的大型有限元软件，将会逐步失去竞争力；

(4) 结构分析的有限元-优化一体化程序的发展，其中心是减少在结构优化计算过程中重作有限元分析的次数，缩短计算时间，提高计算效率，减少计算费用。

从长远看，将会有更多的有限元法软件引进人工智能技术，形成比较完善的专家系统，实现有限元分析智能化。

第一篇 弹性力学

1 应力和应变

本章提要

本章主要任务是建立弹性力学的基本方程。先从弹性体内的微元体平衡建立平衡微分方程，应用斜面应力与应力分量的关系进行应力分析；再通过变形分析给出应变分量与位移分量的几何关系，以及变形协调方程；最后将应力分量表达成为应变分量的线性组合，建立应力应变关系的正交各向异性、正交各向同性、各向同性材料的物理方程。

1.1 平衡微分方程

如果一物体在外力作用下处于平衡状态，则将其分割成若干个任意的小块以后，每一个小块都处于平衡状态；反之，分割后每一个小块是平衡的，则整个物体也平衡。平衡微分方程就是要研究物体内部微元体的静力平衡所必须满足的条件，或简称平衡条件。如果微元体满足这些条件，则物体内部是平衡的。此外，我们还有必要研究边界上的微元体与外力的平衡必须满足的条件，称为静力边界条件，如果对于每个边界上的微元体均满足这些条件，则物体在边界上是平衡的。如果物体内部和边界上都是平衡的，则物体是平衡的。

微元体是在物体内部取出的、边长分别为 dx、dy、dz 的微分六面体，它是用三组假想的平行于三个坐标平面截面组截开物体形成的(图1.1)。为了叙述方便，常常把微元体上微面的外法线与坐标轴相同的微面，叫做正面，反之为负面。负面上的应力分量为σ_x、τ_{xy}、τ_{xz}、σ_y、τ_{yx}、τ_{yz}、σ_z、τ_{zy}、τ_{zx}，由于平行六面体的每一个面都是微分面，所以作用在这些面上的应力都可看作为均匀分布的，而且是随坐标改变而改变的。例如在 x 的微分面上$\sigma_x(x,y,z)$，在$x+dx$ 的增量微分面上，由于x 的增量dx 改变了微分面上的应力，成为$\sigma'_x(x+dx,y,z)$，这个应力可由泰勒展开公式求得，即：

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx + \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2}(dx)^2 + \cdots \tag{1.1}$$

略去高阶小量，可有：

$$\sigma'_x = \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}dx$$

同理有：

$$\tau'_{xy} = \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x}dx, \tau'_{xz} = \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x}dx$$

依此类推，对于 y、z 方向各增量微分面上应力分量，见图 1.1，为：

$$\sigma'_y = \sigma_y + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y}dy, \tau'_{yx} = \tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}dy, \tau'_{yz} = \tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}dy,$$

$$\sigma'_z = \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z}dz, \tau'_{zy} = \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}dz, \tau'_{zx} = \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}dz$$

现在建立微元体的静力平衡方程。一个空间物体的平衡包括第一组三个力的平衡和第二组三个矩的平

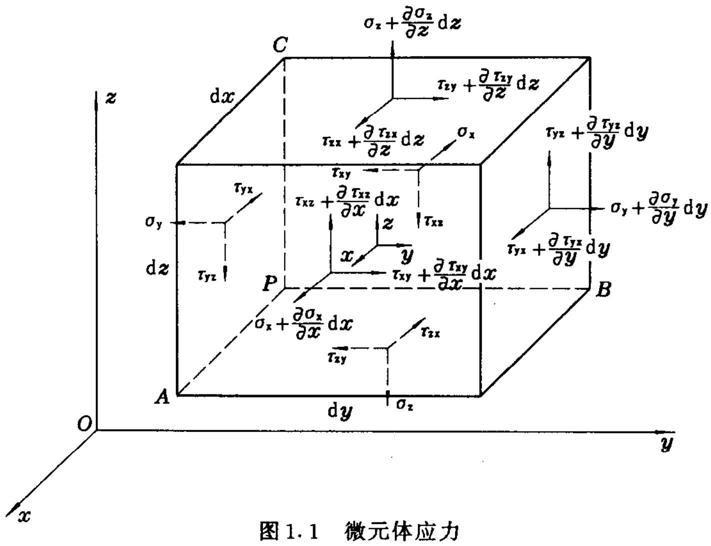


图1.1　微元体应力

衡,分别写为：

第一组,力的平衡：　　　　$\sum F_x = 0, \sum F_y = 0, \sum F_z = 0$；

第二组,力矩的平衡：　　　　$\sum M_x = 0, \sum M_y = 0, \sum M_z = 0$

第一组的第一个方程是将作用于微元体上的应力和外力(体积力)转化成为力,再投影到x,并累加,即：

$$(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x}\mathrm{d}x)\mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z - \sigma_x \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z + (\tau_{yx} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x - \tau_{yx}\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x$$

$$+ (\tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z}\mathrm{d}z)\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y - \tau_{zx}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y + X\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \cdot \mathrm{d}z = 0$$

化简后可得x方向的微元体静力平衡方程式：

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + X = 0 \tag{1.2a}$$

由另外两个方程分别可以得到y、z方向的平衡方程：

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + Y = 0 \tag{1.2b}$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z = 0 \tag{1.2c}$$

必须指出,应力是一个二阶张量,只有乘以所在的微面的面积成为力,才能投影和建立平衡关系,用张量表示的平衡微分方程为：

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0 \qquad (i,j = x,y,z) \tag{1.3}$$

第二组方程给出的是力矩的平衡方程。由$\sum M_x = 0$条件,注意到取矩平衡与参考轴的位置无关,所以可对取过微元体中心且平行于x轴的直线取矩(见图1.1),注意到所有正应力产生的矩均为零,故有：

$$(\tau_{yz} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y}\mathrm{d}y)\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}y}{2} + \tau_{yz}\mathrm{d}z \cdot \mathrm{d}x \frac{\mathrm{d}y}{2} - (\tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z}\mathrm{d}z)\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}z}{2} - \tau_{zy}\mathrm{d}x \cdot \mathrm{d}y \frac{\mathrm{d}z}{2} = 0$$

上式两边同除以$\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,并忽去小量项,得：

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} \tag{1.4a}$$

同理,由第二组的其它两个力矩平衡方程,可得：

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}, \tau_{xy} = \tau_{yx} \tag{1.4b}$$

或：

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad (i,j = x,\ y,\ z,\ 且\ i \neq j) \tag{1.5}$$

这就是材料力学中给出的、比它更为广泛意义的切应力互等定理,它表明:在两个相互垂直的平面上,与两平面的交线垂直的切应力分量的大小相等、方向指向或背离这条交线。定理还表明:式(1.2)中包含的9个应力分量中只有6个是独立的,这6个应力分量描述了物体内任意一点的应力状态。