GANGQIAO

11

〔日〕小西一郎 编

钢桥

中国铁道出版社

钢　　桥

第十一分册

〔日〕小西一郎　编
张　健　峰　　译
陈英俊　等　校

中　国　铁　道　出　版　社
1 9 8 4 年·北京

钢　　桥

第十一分册

〔日〕小西一郎　编

张健峰　译

陈英俊等　校

中国铁道出版社出版

责任编辑　王能远

封面设计　赵敬宇

新华书店北京发行所发行

各 地 新 华 书 店 经 售

中国铁道出版社印刷厂印

开本：$787\times1092\frac{1}{16}$ 印张：13.75 字数：325 千

1 9 8 4 年 2 月 第 1 版　1 9 8 4 年 2 月 第 1 次印刷

印数：0001— 2,300 册　定价：2.15 元

内 容 提 要

本分册内包括三大部分：1．在钢结构安全性、可靠性的统计方法中，讲述了随机现象的概率统计理论基础，安全性、可靠性分析的动力方法基础，结构体系可靠性分析的基础，抗风抗震设计中的统计方法以及模拟技术在安全性、可靠性分析中的应用；2．在电子计算机的应用方面讲述了最优设计及其应用，规范的表现与组成方法及数字控制和图形处理；3．在长大桥的架设方面列举了大量架设方法实例以及形状调整和应力调整方法，还对临时性机械设备作了说明。

本书可供高等院校桥梁专业师生和有关工程技术人员参考。

本书校阅人员分工：第13章　陈英俊

第14章　王道堂

第15章　董其震

出 版 说 明

本书是一部详细阐述现代桥梁设计理论及设计方法的巨幅著作。原书为日本丸善株式会社1976年版，共四册，分为设计篇及基础篇。前者阐述各式桥梁的设计方法及介绍结构实例，后者着重介绍桥梁设计所用的基础理论及基本资料。

虽然本书是针对钢桥写的，但本书中所述设计原则及力学分析也适用于同样结构型式的钢筋混凝土桥及预应力混凝土桥。我们深信本书的翻译出版，将有助于我国桥梁事业的发展。

为了及早与读者见面，我们将全书分为11个分册陆续出版。

全书主要内容及分册划分见下页。

原书	内容	译本
设计篇Ⅰ	第一章　桥面系构造	第一分册
	第二章　板梁桥	第二分册
	第三章　桁架桥	第三分册
设计篇Ⅱ	第四章　拱　桥 第五章　斜拉桥	第四分册
	第六章　悬索桥	第五分册
	第七章　曲线桥、斜桥 第八章　纵向联结系、横向联结系、桥门架 第九章　支　座	第六分册
基础篇Ⅰ	第一章　绪　论 第二章　荷　载 第三章　结构材料 第四章　安全系数、安全度、可靠度 第五章　强度设计法	第七分册
	第六章　构件连接法 第七章　平板理论 第八章　格子梁理论	第八分册
	第九章　屈曲理论 第十章　构件设计	第九分册
基础篇Ⅱ	第十一章　抗风设计 第十二章　抗震设计	第十分册
	第十三章　钢结构的安全性、可靠性的统计方法 第十四章　电子计算机的应用 第十五章　长大桥的架设	第十一分册

目　录

第十三章　钢结构安全性、可靠性分析的统计方法

13.1 概　　述

随着近年来技术的飞速发展，结构物日益大型化，而且不得不使用于严酷的自然环境条件之下。从桥梁、建筑物、飞机之中的任何一种来看都可以知道，结构物一般对于社会都承担着重要的任务，它们的破坏直接关系到很多人的生命安全，而且在很多情况下，对有机的社会活动有造成破坏之虞。因此，在它们的设计工作中，一方面要在现代结构工程学所能达到的最高技术水平上进行充分的考虑，而且，还有必要通过进一步不断的努力，以确立一种更为经济的、其安全性和可靠性很高的合理的设计方式[1]。

因为作用于结构物上的外力通常是变化着的，极不规则，因而必然要用统计的方法来考虑它。而且，构成结构物的部件的强度，从本质上说也具有非确定性的性质。因此，为了进行合理的设计，对这种概率统计的两个重要因素相结合的事物进行考察，是必不可少的环节[2]。而且对于所作的设计是否是安全的和适当的（这也就是设计的安全性和可靠性）作出评价，当然也有必要在概率统计理论的基础上作出判断。在本章中，参照以上各点，对与结构物的安全性、可靠性设计有关的统计方法的各种手段进行简单而具体的说明。

结构物在自然环境或运用状态中要承受荷载或环境应力。例如，以桥梁而论，可以设想除恒载、活载之外还要承受由风荷载、地震荷载、温度变化引起的荷载。但作用于结构物上的这类外部荷载几乎大部分是不规则外力。因为结构物一受到不规则外力作用，就会出现与它的动力特性有复杂关系的随机响应，因此如果对这种动力响应特性缺乏足够认识，就无法进行合理的设计。这些都必需用概率统计理论来处理。所以在13.2节中叙述了与随机现象的概率统计理论处理方法有关的基本要点，为的是对这一点加深认识。在13.3节中，对与安全性、可靠性分析有关的动力方法的一些基础概念进行了说明。谱密度是表示结构物动力特性的一个重要概念，所以对它进行了详细讨论，作为随机外力概率模型的理想化的正态的概念，以及对结构物随机振动的概率统计的计算，也都进行了具体的论述。在13.4节中，叙述了可靠性理论、设计安全度及荷载系数等结构物可靠性分析中不可缺少的基本概念。以上述基本概念为基础，在13.5节和13.6节中，作为实际可靠性设计中的统计方法，提出了风和地震的问题，特别以悬索桥为重点，介绍了应该如何具体的进行抗风和抗震的可靠性设计。

鉴于本章所处理的课题非常重要，我们将尽可能简明而又广泛地加以叙述，但由于篇幅的限制，很多部分不得不省略或简化，也许很多地方理解起来会感到困难。希望读者去参看合适的参考文献。在本章末列出了与本章全部内容有密切关系的可靠性工程学方面的著作以供参考，见文献[3]~[30]。

本章的大致内容已如上所述，这里我们想明确一下通常所用的比较含糊的安全性、可靠性或可靠性分析等词汇的确切含意。如前所述，结构物承受着前面已谈到的种种随机荷载的作用，这类结构物的所谓可靠性（reliability）可定义为“结构物在指定期间内能够无阻碍地达到既定目的的概率”[1][31]。必须注意的是作为判断可靠性目标的“既定的目的”，它

并不一定意味着破坏。例如公路桥，当我们从它的社会使用功能（serviceability）的观点来考虑可靠性时，在混凝土桥面局部遭到破损而使桥面交通发生障碍（即使是暂时的）的情况下，虽然整个公路桥结构的安全性并无问题，但这时公路桥还是没有达到它“既定的目的”；另一方面，这个桥的主要结构，譬如说主梁，如果由于某种原因发生破损的情况，就形成了结构物的“安全性”问题，这时的可靠度也变得具有安全度（safety）的意义。因此，可靠度与安全度相比，是对更为一般的结构物的性能（performance）所使用的词汇，在特殊情况下包括安全度的意义在内。再则，安全性（safety）和可靠性（reliability）还分别用来表示安全度和可靠度随时间变化的程度。

如果可靠度用上述概率来定义，则狭义的可靠性分析（reliability analysis）就具有“为推断这个概率而进行的分析”的意义。因此，结构物的可靠性分析应该充分反映能够得到的信息的量和质，当然也必须充分反映以下内容的研究现状[32]：

（1）结构分析（structural analysis）或应力分析（stress analysis）

（2）预测结构物破坏形式的技术或破坏现象的分析（failure analysis）

（3）实际运用条件下荷载或环境的分析（environmental and/or load analysis）

（4）结构物的检验技术或维修能力（inspection and/or maintenance）

很明显，这样求得的可靠性的确切程度，反映了信息的正确性及有关各工程学科领域研究水平的现实情况。各个研究领域的技术水平直接给可靠性分析以极大的影响，在对这一点进一步加深认识时，作为真正理想的可靠性分析，应该考虑对各种重要因素，进行充分的综合权衡（trade off），这就是广义的可靠性分析的含意。也就是说，所谓广义的可靠性分析，应该从下述概念来掌握和理解：“以设计和建造反映结构工程本质的、可靠度高而且更为安全的结构物为目的，并将为达到此目的的一切努力（人力、财力资源的投入）加以综合调整的系统工程学的一个部门。”

在以上的说明中，所谓可靠度是用表示为某个概率的东西来定义的。可是，能使用概率来规定的东西是真正的统计现象，或现象本身过于复杂而不得不用统计方法来进行处理的现象——主要是风压、地震力、波浪力之类的自然现象或金属材料的疲劳现象等。其它的不确定性，特别是与应力分析、破损分析有关的不确定性或者还完全不知道、或者由于只得到不完全的信息而存在不确定性时〔这称为功能不确定性（functional uncertainty）〕，就无法对它进行统计处理；而对于荷载分析来说，关于将来的荷载状态的不确定性〔这称为操作的不确定性（operational uncertainty）〕——若以公路桥情况为例，如由于交通量增加或车辆重量增加而引起的整个荷载增加的推断——就难以用统计手段来解决。这些不确定性的处理方法，第一，对于功能的不确定性，应改进应力分析和破损分析的方法，以解析和实验的手段对结构物的行为直至非线性或大变形的区域进行深入探讨，以极力减少不确定性。第二，以经验和研究为依据，并以对将来的深刻洞察力和想象力为基础的工程学和技术的判断，来解决操作的不确定性问题。在某种程度上消除了这两种不确定性之后，统计的不确定性才在可靠性的确定上占较大比重，为推断它而作的人力、财力方面的努力才有意义。在本章全章中，记述了可能的统计的不确定性的处理方法，一面展开求可靠度的方法，同时也考虑把其它两种不确定性引入其方法论中。

在这里我们对结构工程学必然要处理的随机现象再进行少许深入的考察，以作为对下节的引入。一般在考虑结构物的计划、设计和建造的过程时，结构工程技术人员面临的最大问题之一，就是这个结构物所处的环境中包括有什么样的随机现象，在这过程中是否引入了这

些随机现象？如所周知，这时的随机现象不仅有地震、风、波浪等引起的外力，而且还必须考虑构成结构物的材料本身具有的强度（例如屈服点、破坏强度等）的随机性。作为对结构物强度有重要影响的因素，不管工厂组装还是工地组装（当然影响程度是有区别的），都有工作人员的技艺（workmanship）是否精良的问题。而现在这方面还缺乏很系统的研究。例如结构物部件的安全性，如果考虑到对它的端部及几何不规则性是非常敏感的，这个问题的重要性就能理解了。

从结构工程学的角度对上述随机现象进行合理的处理，决不是一件轻而易举的事，这主要是因为有如下一些原因：

（1）关于随机现象对结构物的影响和造成后果的研究，都是以这种随机现象处于非常简单的理想化状态（例如认为由地震引起的地面运动是平稳正态随机过程）为出发点的，主要是在实验室中进行研究或仅仅是对比较简单的结构物进行研究的结果。

（2）从能够得到结构工程学上所必需的信息的立场出发，对于“随机现象应如何理想化”这类方法论的问题，在工程技术人员之间还没有取得明确一致的意见。如果只是徒劳无益地使理论或数值分析变得复杂起来，从搜集技术信息的角度来看，这种与简单模型相比收获甚少的理想化，不管它与实际是多么接近的理想化，看来也是应该尽量避免的。当然，这就变成了结构物的响应对随机现象的哪种性质最为敏感的灵敏度研究（sensitivity study）问题了[33]，我们认为这样的问题应是大学或政府的研究所今后必须加以研究的有兴趣的而且是有用的理论和数值分析研究的有代表性的课题之一。在13.5.3小节中，将以悬索桥的抗风设计为例对灵敏度分析的手法进行具体介绍。

（3）这一点与上述随机现象的理想化有关，一般现在的意见倾向于认为：对于所谓随机现象，仅仅在过去的相对频率概念的基础上，用统计学及概率论来加以概括，这样做究竟还行不行，看来已很成问题。这与以下三点有密切关系。

a）关于荷载集度（intensity）对结构物安全性有重要影响的随机外力，或关于结构物强度及几何因素性质的随机性，这几方面有关的记录都很少。

b）对于自然现象以外的随机外力进行长期预测有困难，例如对公路桥上的汽车荷载。

c）在研究结构物处于一种荷载状态下是否安全的问题时，要进行实验或进行所谓结构分析，同时必需有全部技术过程能说明结构物的强度足以承受所给的荷载状态，其中由于信息不足（ignorance）而需要在结构计算及破坏形式方面引入假定或近似。应如何评价这类假定或近似对结构物的安全性的影响，这个问题还未得到解决。

将随机现象作成理想化模型时，上述*a*）*b*）两项就是模型本身以及该模型内所含的参数的不确定性的原因。而*c*）又提出了结构工程学上另一个重要因素——信息不足应如何处理的问题。对于这样一个棘手的问题，现在还没有确立一种有效的解决方法，例如有时用贝叶斯法（Bayesian approach），而有时用引入信息不足因子（ignorance factor）的方法。

（4）对于结构物来说，尤其从土木建筑物设计的立场出发，并从法律的角度看来，设计标准（design code）是很有必要的。而这样的标准从它的特性看来，又可以说是建立在非常一般的规定之上的，这是当然的。例如，把结构物建筑地点的局部性随机现象考虑进去，或把以这种随机现象为基础的外力强度并非固定值这一点在设计标准中很好地反映出来，这都是有限的。因而对于一个结构物的安全性，考虑到局部性条件等等因素，很多情况下不得不以设计后的结构物为基础进行研究。这就是所谓设计后的分析（post design analysis）。

这与结构物的所谓等安全度设计的观点是不相容的，这就成了问题越来越复杂的原因。

一方面，从结构工程的角度，对处理上述随机现象的种种问题要有足够认识，同时在本章中还要叙述对这些问题的解决方法，并概述以统计手段为基础的结构物安全性、可靠性设计的合理方法。

13.2 研究随机现象的概率统计理论基础

如上所述，随机现象根本上是没有重现性的非确定性的现象，因此对它的处理必然只能立足于概率统计理论的基础之上[35]。所以在本节中，对用概率统计理论说明这种随机现象时所需要的基础事项加以说明，并作为关于本章中所述的用于钢结构安全性、可靠性的统计方法的入门。

13.2.1 随机变量、随机过程和概率分布[36]~[41]

首先让我们从工程学的观点，对随机变量（random variable；一般用大写字母表示）X和随机过程（random process）$X(t)$作一简单定义。所谓随机变量X，是表示某些实验或观察结果的数值，也就是结果值（outcomes；通常用与随机变量相对应的小写字母表示）的集合，按照该集合所遵从的概率法则无法唯一地预测出实验结果，但它具有概率性预测的意义。也就是说，只要给出了X及其概率法则，就能求出例如X满足某种关系E的概率$P\{E\}$。这个概率如果用相对频率来解释，即可表为下式

$$P\{E\}=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{E\}}{n} \tag{13.1}$$

式中　n——重复实验的次数；

$n\{E\}$——在n次重复实验中实验结果满足所给关系E的次数。

当然，这样重复进行的各次实验，要彼此之间互不发生影响，也就是应该在各次之间具有统计独立性（statistically independent）的情况下重复进行。这里我们要注意式(13.1)中表示的极限。无限次重复进行实验事实上是不可能的，因而在现实中也不可能求得上式的极限值，无法求出真正的概率。这就是统计推理（statistical inference），特别是贝叶斯方法[34]十分有用而且越来越必需的原因。

X是表示实验结果的数值的集合，因此在只有有限个实验结果时，随机变量也只有有限个值。这种情况下的X称为有限离散型随机变量（finite discrete random variable）。另外，例如我们用1枚硬币作投掷实验，若以正面首次出现时的投掷次数作为随机变量X，则X是1、2、……的集合，即可写为$X=\{1，2，……\}$。这样，X由无限多个而又是离散的数的集合组成的情况下，X就叫做无限离散型随机变量（infinite discrete random variable）。

最后我们以一根钢杆的屈服点来作为连续型随机变量(continuous random variable)的例子。这种情况下屈服点应该取某个正值（原则上应取从0到∞的任意值），是连续型。但这根钢杆如果设想是由假设的无限多根钢杆组成的总体中任意抽出的，就无法用相对频率的概率来解释。这时$P\{x_1<X<x_2\}$表示该钢杆的屈服点X在x_1和$x_2(>x_1)$之间的概率。而按照相对频率的说法，这个概率恰恰说明上述钢杆总体中屈服点在x_1与x_2之间的钢杆所占的

比例按相对比来说是$P\{x_1<X<x_2\}$。

X为离散型时，$X=\{x_0,\ x_1,\ x_2,\ \cdots\cdots\}$，特别当$E=\{X=x_k\}$时

$$p_k=P\{E\}=P\{X=x_k\} \tag{13.2}$$

而X为连续型时，设$E=\{x<X\leqslant x+dx\}$，则定义为

$$f_X(x)dx=P\{x<X\leqslant x+dx\} \tag{13.3}$$

在这里，$p_k(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots)$称为（1维）概率函数（probability mass function），$f_X(x)$称为（1维）概率密度函数（probability density function），$f_X(x)dx$称为概率元素（probability element）。p_k和$f_X(x)$都是非负值，容易理解它们应满足下列条件

$$\sum_{k=0}^{\infty}p_k=1,\quad \int_{-\infty}^{\infty}f_X(x)dx=1 \tag{13.4}$$

而且，无论对于离散型还是连续型，都把用下式定义的$F_X(x)$称为（1维）概率分布函数（probability distribution function）

$$F_X(x)=P\{X\leqslant x\} \tag{13.5}$$

$F_X(x)$具有以下性质：

$$\left.\begin{array}{ll}(1) & P\{a<X\leqslant b\}=F_X(b)-F_X(a)\\ (2) & F_X(x)\text{是}x\text{的非减函数。}\\ (3) & \lim\limits_{x\to-\infty}F_X(x)=0,\ \lim\limits_{x\to\infty}F_X(x)=1\\ & 0\leqslant F_X(x)\leqslant 1\end{array}\right\} \tag{13.6}$$

概率分布函数$F_X(x)$还可以用概率函数或概率密度函数用下式表示

$$\left.\begin{array}{ll}\text{离散型：} & F_X(x)=\sum\limits_{k;\,x_k\leqslant x}p_k\\ \text{连续型：} & F_X(x)=\int_{-\infty}^{x}f_X(x)dx\end{array}\right\} \tag{13.7}$$

以上所研究的概率变量的定义实验结果是可以用数值的集合来表示的情况，而根据实验，这个结果在很多情况下都是时间的函数$x(t)$。而当从很多个时间函数（也包括无限多个的情况）中选择1个作为1次实验结果时，就把这个时间函数的总体（ensemble）称为随机过程$X(t)$。特别是在有必要时，就用图13.1所示的$x^{(k)}(t)$来表示第k次实验结果（k-th sample function of the ensemble，即总体的第k次样本函数）。这里特别应该指出的是$X(t)$的独立变量t是确定性变量，而不是概率的因素，只要指定了t，$X(t)$即可作为随机变量来处理。由于篇幅关系，这里只考虑连续型的情况。那么上述的式（13.1）、式(13.3)都可照样适用于$X(t)$。例如式(13.1)中当$E=\{x_1<X(t)<x_2\}$时，式（13.1）就可以用随机过程$X(t)$在时刻t具有x_1与x_2之间

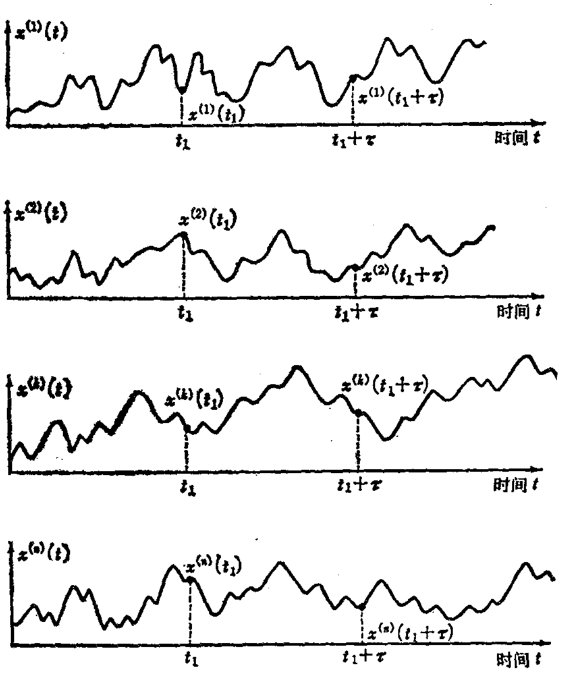

图13.1 概率过程$X(t)$的图形表示

的概率的相对频数来加以解释。而式（13.3）可写为

$$f_{X(t')}(x)dx = \mathrm{P}\{x < X(t') \leqslant x + dx\} \tag{13.8}$$

$f_{X(t')}(x)$就成为$X(t)$在时刻t'的（1维）概率密度函数。

描述随机现象有两种情况，一种是可用随机变量来表示，一种是必须用随机过程来表示。例如，其作用时间远比结构物的（基本）自振周期长得多的随机外力，即使它是具有最严格意义的时间函数$X(t)$，它也只具有静力的效果，因此它的最大效果通常是时间可能变化范围$[0, T_0]$内的最大绝对值也就是$|X(t)|$的最大值的函数。所以如果用X_m表示这个最大值，从结构工程学来说，这个随机现象可只用随机变量X_m来表示。但可以把结构物的响应作为静态来处理的只是特殊情况，一般必须把随机外力作为随机过程$X(t)$来处理。而就连这样的情况，对结构工程学意义上的结构物的$X(t)$，其响应$Y(t)$的最大绝对值Y_m在很多情况下也是有明确的意义的。因此，即使在这种情况下，最后也应该能够用1个随机变量Y_m来表示随机现象$X(t)$对结构物造成的后果，顺序必须是这样的：先以随机过程理论为基础，来计算结构物对$X(t)$的响应$Y(t)$，然后求Y_m。如果设$X(t)$表示由地震引起的地面加速度，则X_m和Y_m的关系在工程上有很大的意义[1]。总之，对这方面问题的详细讨论将在以后适当的地方加以叙述。

13.2.2 概率分布的参数

作为与随机变量的概率性质相关联的问题，为了易于由直观感觉加以判断，一般常用到的是分布的中心趋势及其偏离程度。这时，最经常用来表示中心趋势的值是均值（mean level）或期望值（expectation value）。随机变量X的期望值$\mathrm{E}[X] = \mu_X$可用下式定义：

$$\mu_X = \mathrm{E}[X] = \sum_{k=0}^{\infty} x_k p_k \text{（离散型随机变量）} \tag{13.9a}$$

$$\mu_X = \mathrm{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx \text{（连续型随机变量）} \tag{13.9b}$$

这里式（13.9a）表示伦于沿x轴的距离为x_0、x_1、……处各点上，质量为p_0、p_1、……的各质点组成的体系的重心。同样式（13.9b）表示横放在x轴上的每单位长度质量为$f_X(x)$的等截面杆的重心位置。正如重心是在力学意义上表示出质量体系的代表性位置一样，期望值是在统计的意义上表示出随机变量的代表性位置。而与此类似，把p_k或$f_X(x)$作为x的函数得到的曲线图，称之为随机变量X的“分布”（对应于质量的“分布”），这样做的合理性是可以理解的吧！

用期望值的2阶矩（如果是质量体系，就是绕重心的2阶矩，或惯性矩）来作偏离程度的测度（measure），称为方差（variance），记为$\mathrm{Var}[X]$。而且$\mathrm{Var}[X]$也可写成$\mathrm{E}[(X-\mu_X)^2]$，由式（13.9）的定义可以明白：

$$\mathrm{Var}[X] = \sum_k (x_k - \mu_X)^2 p_k \text{（离散型）} \tag{13.10a}$$

$$\mathrm{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu_X)^2 f_X(x) dx \text{（连续型）} \tag{13.10b}$$

还有，取方差的平方根，叫做标准差（standard deviation），如所周知，标准差用σ_X表示。

$$\sigma_X=\sqrt{\mathrm{Var}[X]} \tag{13.11}$$

如果用质量体系作比喻，σ_X就相当于回转半径。Var[X]与σ_X一道用来表示偏离程度的大小，因为σ_X与X具有同样的量纲，所以用σ_X来量度偏离程度有很多方便之处。

将标准差σ_X用均值μ_X进行正规化处理，就是离差系数δ_X（coefficient of variation）。

$$\delta_X=\sigma_X/\mu_X \tag{13.12}$$

还有，均值或方差的一般化表示方法，就是围绕原点的n阶矩及对期望值的n阶矩或n阶中心矩，以连续型随机变量为例，可分别用以下二式表示：

$$\mathrm{E}[X^n]=\int_{-\infty}^{\infty}x^n f_X(x)dx \tag{13.13}$$

$$\mathrm{E}[(X-\mu_X)^n]=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu_X)^n f_X(x)dx \tag{13.14}$$

正如由式（13.9）所知道的那样，均值等于绕原点的1阶矩，而方差由式（13.10）可知，等于2阶中心矩。

这里用前面考虑随机变量X的方法来研究随机过程$X(t)$在某一固定的时刻t的情况。那么$X(t)$就是如上所述的随机变量（假定是连续型），就可以用式（13.9b）、式(13.10b)来定义E[$X(t)$]和Var[$X(t)$]。当然严格说来，这时应该用$f_{X(t)}(x)$来代替$f_X(x)$。这些量有时也是t的函数，有时却不是。

如果E[$X_{(t)}$]和Var[$X_{(t)}$]中只要有1个是t的函数，那么，正如后面将要谈到的那样，随机过程就成了非平稳过程。

13.2.3　多维概率密度函数和平稳性[42]~[46]

为了定义上述的平稳、不平稳及遍历性（ergodicity），假定随机过程$X(t)$不论在哪个时刻都是连续型随机变量而引入多维概率密度函数。将时刻t_1，t_2，……，t_N的$X(t)$值用$X(t_1)$，$X(t_2)$，……，$X(t_N)$表示，E_1，E_2，……，E_N表示下面的事件

$$E_1=\{x_1<X(t_1)\leqslant x_1+dx_1\},\ E_2=\{x_2<X(t_2)\leqslant x_2+dx_2\},\ \cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots,\ E_N=\{x_N<X(t_N)\leqslant x_N+dx_N\}$$

也就是说，一般地，E_i是当$X(t)$取时刻t_i的值时，在x_i和x_i+dx_i之间的事件。这些事件E_1，E_2，……，E_N的全部同时实现的概率，可用下式表示。

$$\mathrm{P}\{E_1,E_2,\cdots\cdots,E_N\}=f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)dx_1dx_2\cdots dx_N \tag{13.15}$$

式中的$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)$就叫做$N$维概率密度函数，经常是非负数，与1维时同样，它能满足下式

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)dx_1dx_2\cdots\cdots dx_N=1 \tag{13.16}$$

而且$(N-1)$维密度函数作为N维密度的(例如关于x_N的)边缘密度（marginal density），可由下式求出。

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_{N-1})}(x_1,x_2,\cdots\cdots x_{N-1})=\int_{-\infty}^{\infty}f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}\times(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)dx_N \tag{13.17}$$

采用这样的多维概率密度函数，不仅能对下述的随机过程给出更严密的定义，而且还能使平稳、非平稳以及遍历性等的定义更为明确。

首先对随机过程$X(t)$重新定义如下。即：所谓随机过程，是具有某个概率特性的时间的函数$x^{(k)}(t)$的集合，这个概率特性，是由所给出的$X(t_1)$，$X(t_2)$，……，$X(t_N)$的N维概率密度函数

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)$$

的全部N值，以及全部集合$\{t_1,t_2,\cdots\cdots,t_N\}$所规定的。为简单起见，让我们来观察2维的情况。这时

$$E_1=\{x_1<X(t_1)\leqslant x_1+dx_1\},\quad E_2=\{x_2<X(t_2)\leqslant x_2+dx_2\}$$

用相对频度解释密度函数如下。

首先考虑最初的样本函数（sample function）$x^{(1)}(t)$，在时刻t_1及t_2时，考察其是否满足下列2式

$$x_1<x^{(1)}(t_1)\leqslant x_1+dx_1 \tag{13.18a}$$

$$x_2<x^{(1)}(t_2)\leqslant x_2+dx_2 \tag{13.18b}$$

然后同样依次考察$x^{(2)}(t)$，$x^{(3)}(t)$，……，$x^{(n)}(t)$。于是有

$$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,\ x_2)dx_1dx_2=\lim_{n\to\infty}\frac{n\{E_1,E_2\}}{n} \tag{13.19}$$

式中，$n\{E_1,\ E_2\}$是n个样本函数中在t_1和t_2时满足于与式（13.18）相同条件的函数的数。这样的$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,\ x_2)$就是2维概率密度函数。由这个说明可以知道，随机过程虽然应该作为时刻t的函数的集合来理解，但从本质上来说，还应该注意观察每一个样本函数的变动情况。

其次，让我们来定义平稳过程。在上述的随机过程的定义中，如果$X(t_1)$，$X(t_2)$，……，$X(t_N)$的N维概率密度函数，与$X(t_1+\tau)$，$X(t_2+\tau)$，……，$X(t_N+\tau)$的概率密度函数，关于N、τ值的全部t_1，t_2，……，t_N的全部集合，都完全相同，即当下式成立时：

$$f_{X(t_1)X(t_2)\cdots\cdots X(t_N)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N)=f_{X(t_1+\tau)X(t_2+\tau)\cdots\cdots X(t_N+\tau)}(x_1,x_2,\cdots\cdots,x_N) \tag{13.20}$$

也就是式（13.15）所示的N维概率密度函数随着时间平移（time shift）而不发生变化时，我们把$X(t)$叫做“强平稳过程”（strongly stationary）*。它意味着$X(t)$的概率特性不随时间而变化。但实际问题是：

（1）很多情况下都很难证明$X(t)$是强平稳过程；

（2）很多情况下3维及3维以上（$N\geqslant 3$）的概率密度函数在工程上和物理学上并无多大意义；而且

（3）很多情况下，3阶及大于3阶的矩在由输入数据进行推断时将产生较大的误差。

由于上述原因，一般在工程上通常只用到$N=2$的平稳问题。也就是说，上述的平稳性至少对于概率密度函数$f_{X(t)}(x)$及$f_{X(t_1)X(t_2)}(x_1,x_2)$是成立的，这时$X(t)$（至少）可称为“弱平稳过程”（weakly stationary）**。由此可知下述情况是很重要的。

如果$X(t)$是弱平稳过程

* 亦称严平稳过程——译注

** 亦称宽平稳过程——译注