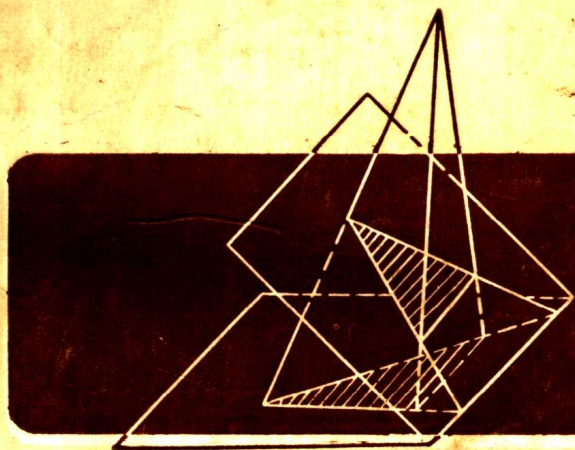


560792

立体几何双基训练

第二版

主 编 翟 连 林



中国农业机械出版社

数学自学丛书

立体几何双基训练

第二版

主编 翟连林

编者 王家宝 董克诚 岳明义
杨志刚 姚桂枝 张文鞠

中国农业机械出版社

内 容 简 介

本书是“数学自学丛书”之一。第一版出版后受到广大读者的欢迎，这是第二版。全书更突出了自学的特点，每章都增加了“解题方法小结”和“自我检查题及解答”。

全书包括直线和平面，多面体，旋转体，综合训练，多面角、正多面体及拟柱体等内容。采用列表的方法帮助读者归纳和总结基础知识，通过对典型例题的分析、解答和评注以及基本训练题和综合训练题的安排，帮助读者扎扎实实地掌握基础知识，开阔思路，培养分析问题和解决问题的能力，特别是提高空间想象能力。

本书可供自学青年、青年职工补课和复习使用，亦可供各类中学的学生和数学教师参考。

立体几何双基训练

第二版

主编 翟连林

编者 王家宝 董克诚 岳明义

杨志刚 姚桂枝 张文鞠

★

中国农业机械出版社出版

北京市东城区阜成门内大街乙七号

北京市密云县印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

新华书店经售

★

787×1092 $\frac{1}{32}$ 开 19 $\frac{3}{4}$ 印张 426千字

1983年12月北京第一版

1985年12月北京第二版·1985年12月北京第二次印刷

印数：132,001—155,000 定价：3.20元

统一书号：7216·58

序

为适应我国四化建设的新形势，从根本上提高广大职工的科学文化水平，已成为当务之急。从我国广大职工的实际出发，科学水平的提高尤感迫切。中共中央、国务院《关于加强职工教育工作的决定》，正是针对着这一迫切需要而作出的。但是这样的认识在许多实际工作中往往得不到贯彻，总认为抓教育、提高科学文化水平只是久缓的计议，不是当务之急，这样当然就谈不上有什么迫切感了。其实这种看法既不符合中央的方针，又和广大群众的需要相违背。中国农业机械出版社编辑出版的《数学自学丛书》（第一版）问世以来，受到极为广泛的读者热烈欢迎，很重要的一个因素，就是因为它适应了当前的迫切需要。

数学已日益成为一切近代科学技术的重要基础。当前已不只是理、工、农、医的各专业愈来愈需要数学，就象心理学、经济学、语言学等专业的发展也都离不开数学，而且还需要很高深的近代数学。要提高我国广大职工的科学水平，如果数学不首先提高，就将成为拦路虎。所以这套丛书的出版具有深远的意义。

这套丛书在编写方面有许多特点，归结起来有以下三个方面。

一、取材允当，适用面广

事实上，该丛书是根据中学和大学专科数学的内容，由浅入深地编排，概括了全部中学和大学专科数学的内容，它不仅适合于广大职工自学的需要，也适合于在校的中学生和大学

专学生自修参考之用，以及中学数学老师进修提高之用。

二、重视双基，突出能力的培养

这套丛书的每一册都按基础知识提要、典型例题、习题三部分组成，而且内容精练，例题典范，习题多样。在内容的叙述中又注意揭露实质与规律，在典型例题的讲解中又能注意启发思路，在习题的设置上注意基本训练题与综合训练题的配合，从而既能使读者巩固地掌握基础知识，熟悉基本技能，又能使读者得到能力的培养，科学地处理了知识传授和能力培养这两个重要环节。

三、重视启发诱导，利于自学

该丛书针对自学青年缺乏辅导的情况，力求叙述简明，讲清思路的来龙去脉，揭示解题规律，纠正易犯的错误，循循善诱，利于自学。还通过提示方式，启发读者自行解题。既为读者提供自学的方便，又能启发读者独立思考。

以上是概括这套丛书的特点，当然不是说每一本书都一样，更不是每一本书都是完美无缺。而且随着形势的发展，今后还必须继续更新，使这套丛书在我国四化建设中继续发挥它的根本性的作用。

程民德

1984年12月20日

注：程民德教授是中国科学院学部委员，中国数学学会副理事长，北京大学数学研究所所长。

前 言

为了帮助广大职工和自学青年学好中学数学和大学专科数学基础知识，加强基本技能的训练（基础知识和基本技能简称“双基”），我们参照现行普通中学、职工业余中学和电视大学、职工大学的数学教材，结合自学特点，编写了这套《数学自学丛书》。

这套丛书包括：

一、初中部分

1. 《初中代数双基训练》；
2. 《平面几何双基训练》；
3. 《初中数学总结辅导》。

二、高中部分

1. 《高中代数双基训练》；
2. 《立体几何双基训练》；
3. 《平面三角双基训练》；
4. 《平面解析几何双基训练》；
5. 《高中数学总结辅导》。

三、大学专科部分

1. 《一元微积分双基训练》；
2. 《多元微积分双基训练》；
3. 《线性代数双基训练》；
4. 《概率统计双基训练》；
5. 《复变函数双基训练》；
6. 《逻辑代数与BASIC语言双基训练》。

为便于自学，在这套丛书的各册中，首先帮助读者系统地归纳和总结数学基础知识；然后通过对典型例题的分析、解答和评注，帮助读者总结常用的解题方法和技巧，分析并纠正常易犯的错误；最后通过各种类型的基本训练题、综合训练题以及自我测验题（包括解答或提示）的演算，帮助读者巩固概念，熟悉定理、公式和法则，提高正确迅速的运算能力、逻辑思维能力和空间想象能力。

在本书编写过程中，河北青县一中的潘树松老师帮助核算一部分题目，在此表示感谢。

由于我们的水平有限，书中的缺点、错误在所难免，请广大读者批评指正。

编者

1985年1月

引 言

几何是研究图形的形状、大小、位置关系及其性质的科学。平面几何研究的对象是平面图形，即由同一平面内的点、线所构成的图形；而立体几何研究的对象是空间图形，即由空间的点、线、面所构成的图形，也可以看成是空间点的集合。

立体几何是在平面几何的基础上，进一步研究空间图形的几何性质、画法、计算以及它们的应用。

目 录

序

前言

引言

第一章 直线与平面	1
一、基础知识提要	1
1. 空间图形	1
2. 平面	2
3. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系	5
4. 平行	8
5. 垂直	14
6. 其他问题	19
7. 与平面几何的联系和类比	24
8. 水平放置的平面图形的直观图的画法	27
二、基本训练举例	29
三、解题方法小结	52
1. 共线、共面问题	52
2. 线共点问题	54
3. 异面直线问题	55
4. 线线平行、线线垂直问题	58
5. 线面平行、线面垂直问题	60
6. 面面平行、面面垂直问题	62
7. 三垂线定理的应用问题	65
8. 二面角问题	67
9. 折转问题	71
四、基本训练题	73

五、基本训练题解答或提示	86
六、自我检查题及解答	134
第二章 多面体	141
一、基础知识提要	141
1. 多面体	141
2. 棱柱、棱锥、棱台	141
3. 正棱柱、正棱锥、正棱台的特性	147
4. 简单多面体	148
5. 棱柱、棱锥、棱台的直观图	148
6. 展开图及侧面积计算	151
7. 体积的计算	155
8. 棱柱、棱锥、棱台侧面积公式及体积公式间的联系	157
二、基本训练举例	158
三、解题方法小结	186
1. 利用多面体中的特殊图形解题	186
2. 截面的画法	189
3. 侧面上任意两点间最短距离的求法	196
4. 引入辅助元素解题	200
5. 利用体积解题	203
四、基本训练题	206
五、基本训练题解答或提示	218
六、自我检查题及解答	279
第三章 旋转体	288
一、基础知识提要	288
1. 圆柱、圆锥、圆台	288
2. 球	292
3. 表面积的计算	294
4. 体积的计算	295
5. 直观图	296

二、基本训练举例	301
三、解题方法小结	322
1. 圆柱、圆锥、圆台、球中的特殊图形	322
2. 圆柱、圆锥、圆台侧面上两点间的最短距离	325
3. 简单几何体间的切、接问题	327
4. 关于组合体问题	330
5. 关于旋转问题	332
四、基本训练题	335
五、基本训练题解答或提示	347
六、自我检查题及解答	399
第四章 综合训练	408
一、综合训练举例	408
1. 几何综合题	408
2. 代数、立体几何综合题	419
3. 三角、立体几何综合题	424
4. 代数、三角、立体几何综合题	429
二、“立体”化“平面”的方法与异面直线距离的求法	436
1. 立体几何问题转化为平面几何问题的几种常用方法	436
2. 求异面直线间距离的几种方法	449
三、关于一题多变、一题多问的题组	460
四、用微积分的知识解立体几何问题	491
五、综合训练题	496
六、综合训练题解答或提示	508
七、自我检查题及解答	588

第一章 直线与平面

本章主要是研究平面的基本性质，空间直线和平面的位置关系及有关性质。这一章在立体几何中占有极其重要的地位，是进一步学习空间图形的重要基础。平面的基本性质又是学习本章的重要基础。学习本章应特别注意平面图形与空间图形的联系和区别，把眼光由平面拓展到空间。

一、基础知识提要

1. 空间图形

点是最简单的几何图形，任何几何图形都可以看成是满足某些条件的点的集合。

空间的基本图形是：点、直线和平面。它们是不加定义的原始概念。

点常用大写字母 A 、 B 、 C 等来表示，直线常用小写字母 a 、 b 、 l 、 m 等来表示，也可以用两个大写字母来表示，如直线 AB 等；平面则常用希腊字母 α 、 β 、 γ 或一个大写字母 M 、 N 、 P 等来表示，如图 1-1 中，平面 α 、平面 M ，也可以用两个大写字母来表示，如图 1-1 中，平面 AC 。

平面图形的点都在同一平面内；空间图形（或称立体图形）的点，不一定在同一平面内。平面图形上的直线（如平行的直线，相交的直线）都在同一平面内；而空间的两条直线却不一定在同一平面内。

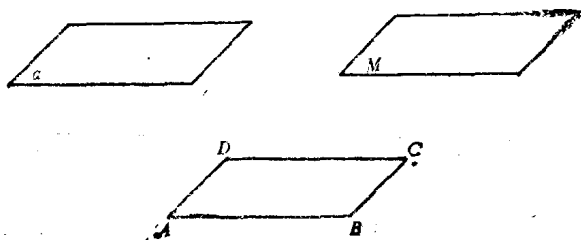


图 1-1

2. 平面

(1) 平面

平面通常用平行四边形来表示。当平面是水平放置时通常把平行四边形的锐角画成 45° ，水平方向的边长等于它的邻边长的 2 倍。当一个平面的一部分被另一个平面遮住时，应把被遮部分的线段画成虚线或不画，如图 1-2 (甲)、(乙)。

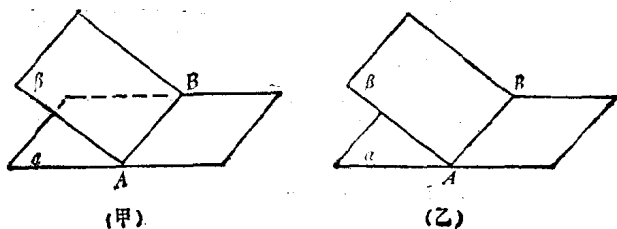
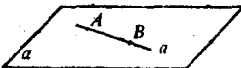


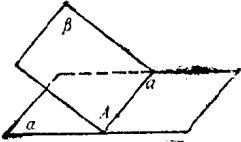
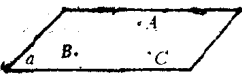
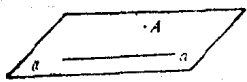
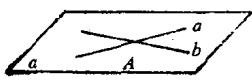
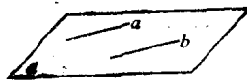
图 1-2

(2) 平面的基本性质 (见表 1-1)

表 1-1

图 示	基 本 性 质
	公理 1：如果一条直线上的两点在一个平面内，那么这条直线上所有的点都在这个平面内 如左图： $\left. \begin{array}{l} \text{点 } A, B \in \text{直线 } a \\ \text{点 } A, B \in \text{平面 } \alpha \end{array} \right\} \Rightarrow a \subset \alpha$

(续)

图 示	基 本 性 质
	公理 2: 如果两个平面有一个公共点, 那么它们有且只有一条通过这个点的公共直线 如左图: $\left. \begin{array}{l} \text{点 } A \in \text{平面 } \alpha \\ \text{点 } A \in \text{平面 } \beta \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \alpha \cap \beta = \text{直线 } a \\ A \in a \end{array} \right.$
	公理 3: 经过不在同一直线上的三点, 有且只有一个平面 如左图: 点 A、B、C 不在一条直线上, A、B、C 三点共属于平面 α, 且 α 是唯一的
	推论 1: 经过一条直线和这条直线外的一点, 有且只有一个平面 如左图: $\left. \begin{array}{l} a \text{ 是任意一条直线} \\ \text{点 } A \notin a \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a \text{ 与 } A \text{ 共属于平面 } \alpha \\ \alpha \text{ 是唯一的} \end{array} \right.$
	推论 2: 经过两条相交直线, 有且只有一个平面 如左图: $\left. \begin{array}{l} a \text{ 是任意一条直线} \\ b \text{ 是任意一条直线} \\ A = a \cap b \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} a, b \text{ 共属于平面 } \alpha \\ \alpha \text{ 是唯一的} \end{array} \right.$
	推论 3: 经过两条平行直线, 有且只有一个平面 如左图: $a, b \text{ 是两条直线且 } a \parallel b \Rightarrow a, b \text{ 共属于平面 } \alpha, \text{ 且 } \alpha \text{ 是唯一的}$

(3) 平面基本性质的意义

平面的基本性质包括了三个公理和三个推论，它揭示了点、直线、平面之间的密切关系，是学习和研究空间直线和平面位置关系的基础，也是空间确定平面位置的理论根据。

1) 公理 1 给出了判定直线在平面内，用直线鉴定平面；判定点在平面内（如果点在直线上，直线在平面内，那么点在平面内）的方法。依据公理 1，要判定一条直线是否在一个平面内，只要直线上有任意两点在一个平面内，就可以断定已知直线一定在这个平面内。

一条直线在一个平面内，也可以说成“平面通过这条直线”。

2) 公理 2 是判断两个平面是否相交的根据，只要两个平面有一个公共点，就可以判定它们一定相交于过这点的一条直线，也可以利用这个公理，判定某点是否在两相交平面的交线上。

3) 公理 3 及其三个推论给出了确定平面的条件。

“有且只有一个平面”，也可说成“确定一个平面”。“确定”二字包括两个方面，即“存在性”与“唯一性”。例如：过一点可以有一条直线，这是存在性，但不只有一条直线，即不“唯一”，因此，一个点就不能“确定”一条直线。又如，过已知的三点，不一定有一条直线，即不一定“存在”。当然更谈不上唯一了。所以三点也不能“确定”一条直线。

过两点，不但有一条直线即“存在”，而且只有这条直线，即“唯一”。所以，两点“确定”一条直线。

“确定”平面的意义也是如此理解。例如：过一条直线可以作一个平面，但所作的平面不是唯一的；而过任意两条

直线就不一定能作平面，但过两条相交的直线可以作且只能作一个平面。

学习以上的公理和推论，不仅要透彻理解它们的确切含义，掌握三个推论的证明，还要联系生活和生产中的实际。例如，用拉直的两条互相交叉的细绳来检查椅子的四条腿的支点是否共面，就是应用推论 2 的实例（如图 1-3）。又如，照像机、探测仪等的三角支架，就是应用公理 3 确定平面的例子。

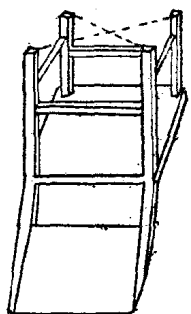


图 1-3

3. 直线与直线、直线与平面、平面与平面的位置关系

(1) 直线与直线的位置关系（见表 1-2）

我们把不在任何一个平面内的两条直线叫异面直线。要深刻理解异面直线的概念，不在任何一个平面内的两条直线，它的含义是：无法找到一个平面，使得这样的两条直线同在此平面内。这两条直线既不相交，也不平行。

如图 1-4、图 1-5、图 1-6 中，虽然直线 a 、 b 分别在平面 α 和 β 内，但它们或是相交或是平行，所以 a 和 b 仍可以共在某一平面内。因此， a 与 b 并不是异面直线。也就是

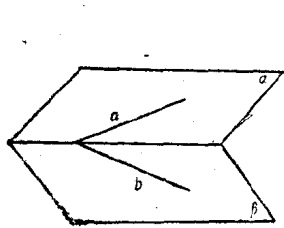


图 1-4

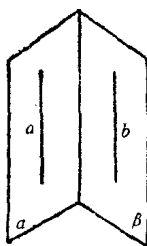


图 1-5

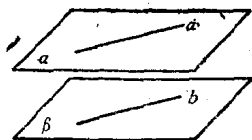
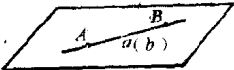
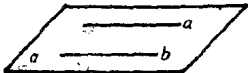
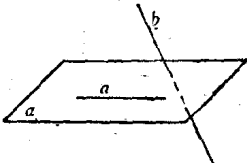


图 1-6

表 1-2

关系	图 形	公共点数目与记法
共 面 关 系	重 合 	两条直线至少有两个不同的公共点 如左图: 直线 a 、 b 有公共点 A 、 B , 则直线 a 与直线 b 重合
	相 交 	两条直线只有一个公共点 如左图: 直线 $a \cap$ 直线 $b = \text{点 } A$
	平 行 	两条直线没有公共点, 但可以共在一个平面内 如左图: 直线 $a \cap$ 直线 $b = \phi$, 且 $a \subset \text{平面 } \alpha$, $b \subset \text{平面 } \alpha$, 或直线 $a \parallel$ 直线 b
异 面 关 系	 	两条直线没有公共点, 又不能共在一个平面内 如左图: 直线 $a \cap$ 直线 $b = \phi$, 且 $a \subset \text{平面 } \alpha$, $b \not\subset \text{平面 } \alpha$, α 为过 a 的任意平面

说, 分别在两个平面内的两条直线不一定是异面直线。

画异面直线时, 常用平面衬托法。即把异面直线 a 与 b 中的一条直线 (如 a) 画在某一个平面 α 内, 而另一条直线画成与平面 α 相交, 但交点不在直线 a 上。如图 1-7 所示是用一个平面来衬托; 而图 1-8 所示的两异面直线是用两个平面来衬托的。