掌握解题规律
提高学习效率

平面几何证题添辅助线歌诀十五句

PMJHZTTF
ZX · GJSUJ

陕西人民教育出版社

掌握解题规律

提高学习效率

平面几何证题添辅助线歌诀十五句

李旭辉　编著

陕西人民教育出版社

平面几何证题添辅助线
歌诀十五句
李旭辉　编著
陕西人民教育出版社出版
（西安和平门外标新街2号）
陕西省新华书店发行　西北电讯工程学院印刷厂印刷
787×1092毫米　1/32开本　7.5印张　170千字
1987年2月第1版　1987年2月第1次印刷
印数：1—10,000
统一书号：7387·361　定价：1.30元

序　言

中国教育学会数学教学研究会理事长
陕西省数学学会名誉理事长　魏庚人
陕西师范大学教授

平面几何解题时，常常需要添设辅助线。辅助线是几何解题中的有力工具，它在解题中起着桥梁和化难为易的作用。虽然几何课本中的例题、习题大都要用到辅助线，但添辅助线的一般方法和规律在课本中并未讲述，因此，如何添设辅助线的问题，不仅学生感到无从下手，教师也感到难以教好。《歌诀十五句》一书以歌诀的形式扼要地讲解了添设辅助线的规律，从而突破了几何教学中的一个难点。

本书作者用律诗和歌谣的形式概括总结了添辅助线的规律，叙述生动，论证严谨，把文学艺术与几何中作辅助线熔为一体，读起来顺口，又便于掌握和记忆，更能激发学生学习平面几何知识的兴趣。

本书又是作者精心设计的中学平面几何复习课的教案。从讲述歌诀──→理论根据──→使用方法──→典型例题──→课堂练习──→课后作业，对这六个环节从内容到时间都作了巧妙的安排，最后还有自测题及答案。这无论从每一节课或是从整个复习过程来看，都是科学的、完整的。

本书对广大中学生来说，是一本很好的课外读物；对中学数学教师又是一本很好的教学参考资料；对师范院校数学专业的学生也有一定的阅读和参考价值。

1986年7月

编 者 的 话

使学生掌握证题的基本技能技巧，是平面几何教学的一个重要方面，尽管我在多年的几何教学中对此作了一定的努力，但总是觉得学生在这方面学的不够好，特别是对需要添辅助线的几何证明题，虽然对学生讲了多种方法，但他们总觉得难，其原因是添辅助线无规律，碰到具体题目不知如何是好。这就给我们做老师者无声地提出了一个问题：如何概括这些添辅助线的方法，使其达到浅显、易懂、便记、速效。我在总结前人经验的基础上，重点分析了各类几何证明题的题设结构和结论的结构，以及几何图形的特征，编写了《平面几何证题添辅助线歌诀十五句》。作了三年试教，初步取得了成效，深受学生的欢迎。

本书的编写原则是：浅显、易懂、便记、速效。这八个字也可以说是本书的特点。针对此编写原则所采用的编写形式为：全书划分五个部分；第一部分集中给出十五句歌诀；第二部分分十五讲，即一个歌诀为一讲。在每讲中向读者说明为什么会总结出这个歌诀的理论依据，以及通过大量例题讲述如何使用此歌诀的方法，最后配有适当数量的习题；第三部分讲述了歌诀的联合使用去证一些几何题；第四部分为大量复习题；第五部分为五套自我测验题及其答案。

书中共讲解例题 32 道，配练习题 180 余道，自测题 25 道，共 240 余道习题。若当作教案时，可讲解 16 课时(每课时 45 分钟)，每课时讲解歌诀一句，举两例(约 30 分钟)，学

生当堂练习 3 道习题(约 15 分钟)，其余 2 道习题作为课外作业。

遵循编写原则，书中例题、习题都是针对中等偏下水平的学生所选的，并且都给出了多种证法或提示．有的是应用一个歌诀从几个角度给出不同的几种证法；有的是应用几个歌诀给出不同的几种证法。经过三年多的教学实践，效果显著。对于学习好的班级及学习好的学生，可以从第四部分复习题中选一些较难的题目作为例题和习题，以满足他们的求知欲望。

读者应当清醒地认识到这样一点：十五句歌诀所揭示的规律并不是万能的，有一定的局限性。它们只概括了大部分常见的添辅助线的问题，尚有一少部分添辅助线问题不含在歌诀内。所以读者在学习中，对某些几何证明题，不能一味地在十五句歌诀中去寻找解题途径，而应在所学知识的基础上更广泛地发掘门路。但我们还应认识到，十五句歌诀所揭示的规律是最基本的证明几何题的办法，它们对具体证明题来说毕竟提供了一条捷径。譬如说，对某一平面几何题，我们根据它所给的条件及图形特征首先应按某一歌诀所提示的办法去证，若能迅速证得结论，说明路子走对了；若证不出结论，再寻它法。这样做，比起盲目去证或无从下手来说，显然是利大于弊。故我认为本书对教师教学或学生学习能起到良好的作用。

我从 82 年 5 月开始着手编写此书，在编写过程中，得到了朱淑琼、何振芳、郭健康、张志让、徐建平、樊顺有、贺建祥、王胜贤等老师的大力支持和帮助。陕西省教育厅教学研究室张新吾教授、陕西省教育学院数学系主任贺佑武老师、陕西师范大学数学系冯汉桥副教授、陕西省教育学院数学系

《高等几何》讲师李亚楠老师等在百忙中曾对此书提了不少宝贵意见。在此向他们表示衷心的感谢！

由于我水平有限，书中错漏及不足之处，还望读者批评指正。

编　者

1986 年 5 月

目　　录

第一部分　歌诀十五句

1. 遇到中点配中点，连点添边中位线。
2. 遇到一边有中线，只须将其一倍延。
3. 遇到角角若为倍，添作大角分角线。
4. 遇到图形有等边，绕点旋转来变换。
5. 遇到垂线分角线，绕轴翻转来变换。
6. 遇到积和(差)式现，造角相似来变换。
7. 遇到图中相交圆，连心线及公共弦。
8. 遇到相离相切圆，连心线及公切线。
9. 圆心切点莫忘连；直角相对(共弦)想共(半)圆。
10. 遇到比较两条弦，圆心去连弦中点(向弦引垂线)。
11. 四边要连对角线，平行要添等线段。
12. 遇到等积变比例，等比移动平行线。
13. 遇到面积把高添，多边等积变三边。
14. 遇到和差就截延，倍分加倍或折半。
15. 遇到图中勾股弦，斜边中点连顶点。

第二部分　用法 举例 习题

第一讲　歌 诀 1

歌 诀 1：遇到中点配中点，连点添边中位线。

理论依据：三角形的中位线定理及梯形的中位线定理。

使用方法：紧紧抓住题设及图形中的“中点”这个条件，通过“配点”或“添边”(添边的目的在于造成完整的三角形或梯形)连成三角形或梯形的中位线，并利用中位线定理获得要证结论(如图 1-1～1-6 所示)。

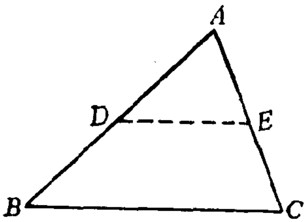

图　1-1

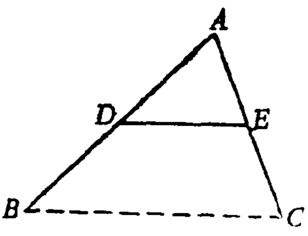

图　1-2

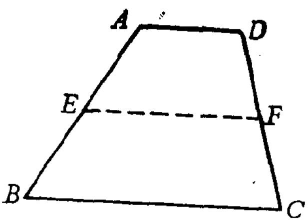

图　1-3

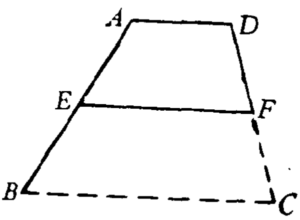

图　1-4

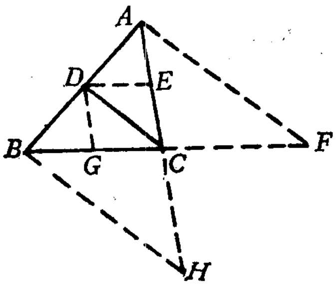

图 1-5

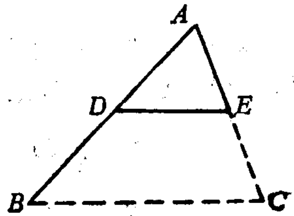

图 1-6

例1 已知：等腰$\triangle ABC$中，BC是底边，延长AB到D，使$BD=AB$，E是AB的中点，连CE。

求证：$CD=2CE$。

分析：紧紧抓住图形中的两个中点B和E，配点或添边连成中位线。

证法一：取CD的中点F（图1-7）连BF，那么：

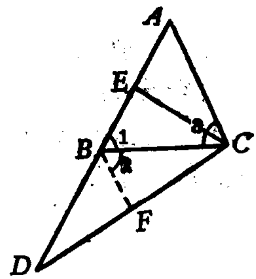

图 1-7

BF是$\triangle ADC$的中位线。

$\therefore\ BF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AC=\frac{1}{2}AB$,

$\because\ E$为AB之中点，

$\therefore\ BF=\frac{1}{2}AB=BE$;

又$\because\ BF//AC$，$AB=AC$，

$\therefore\ \angle 2=\angle 3$，$\angle 1=\angle 3$，

$\therefore\ \angle 1=\angle 2$且$BC$边公用，

$\therefore\ \triangle EBC\cong\triangle FBC$,

$\therefore \quad CE = CF = \frac{1}{2}CD$，故 $CD = 2CE$。

证法二：取 AC 之中点 F（图 1-8），连 BF，那么：

$$BF \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}CD.$$

$\because$ 等腰三角形两腰上的中线相等，

$\therefore \quad BF = CE$

$$= \frac{1}{2}CD,$$

故 $CD = 2CE$。

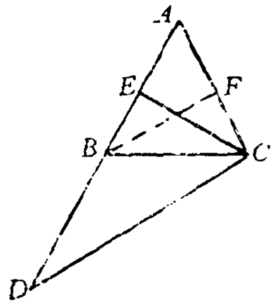

图 1-8

证法三：延长 BC 到 N（图 1-9），使 CE 成为$\triangle ABN$ 的的中位线，那么：

$$CE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}AN,$$

$\because \quad AC = AB = BD,$

$BC = CN,$

$\angle 1 = \angle 2$（等角的补角相等）

$\therefore \quad \triangle BDC \cong \triangle ACN,$

$\therefore \quad CE = \frac{1}{2}AN = \frac{1}{2}CD$，故 $CD = 2CE$.

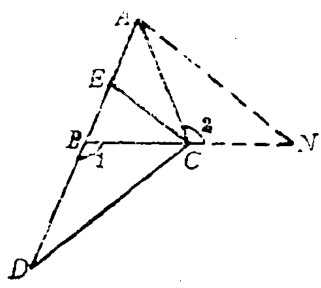

图 1-9

证法四：延长 AC 到 M（图 1-10），使 EC 成为$\triangle ABM$ 的中位线，

那么：

$CE \mathrel{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BM$，

∵ $AB=AC=BD=CM$，BC公用，

$\angle 1=\angle 2$

（等角的补角相等）

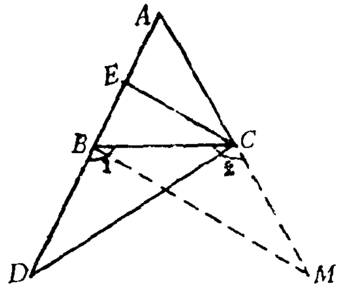

图 1-10

∴ $\triangle BDC \cong \triangle CMB$，

∴ $CE=\frac{1}{2}BM=\frac{1}{2}CD$，故 $CD=2CE$。

例 2 已知：$\triangle ABC$ 中，$AB=AC$，以 AB 为直径作半圆交 BC 于 D，E 是 AB 上一点，且 $AE=\frac{1}{3}AB$，连 CE 交 AD 于 F。

求证：$AF=FD$。

分析：由结论"以等腰三角形一腰为直径的圆平分其底边"知，D是隐含的一个中点，对于 D 点配中位线有三种情况．

证法一：取 BE 的中点 M（图 1-11），连 DM，由 $AE=\frac{1}{3}AB$知 $AE=EM=MB$，

∵ $AB=AC$，

$\angle ADB$ 是直角（直径所对的圆周角是直角），

∴ $BD=DC$（等腰三

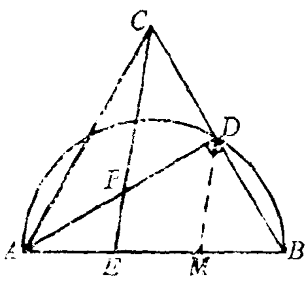

图 1-11

角形底边上的高、中线重合)

$\therefore$ $DM//CE$(中位线定理),

$\therefore$ $EF//DM$,

故 $AF=FD$(平行线等分线段定理).

证法二:同证法一,知 D 是 BC 之中点,取 CE 的中点 N(图1-12),连 DN,那么:$DN \underline{\underline{\parallel}} \frac{1}{2}BE$,

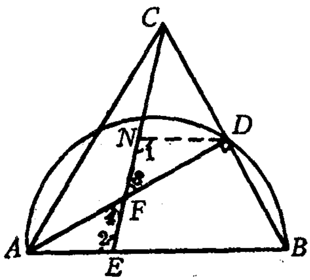

图 1-12

$\therefore$ $\angle 1=\angle 2$,$\angle 3=\angle 4$,

又$\because$ $AE=\frac{1}{3}AB=\frac{1}{2}BE$,

$\therefore AE=DN$,

$\therefore \triangle AEF \cong \triangle DNF$,故 $AF=FD$。

证法三:取 AC 的中点 M,连 DM 交 CE 于 N,由平行线等分线段定理知,N 是 CE 之中点,下同证法二。

习　题

1. 已知:$\triangle ABC$ 中,D 为 BC 的中点,E 为 AB 上任一点,CE 交 AD 于 F。

求证:$\frac{AF}{FD}=\frac{2AE}{BE}$。

[提示]

方法一：取 BE 的中点 M(图 1-13)，连 DM 成中位线。

方法二：取 CE 的中点 N(图 1-14)，连 DN 成中位线。

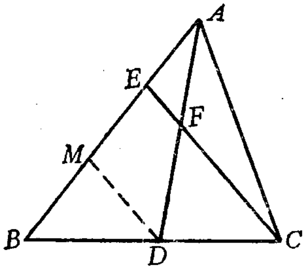

图 1-13

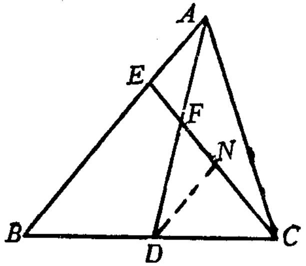

图 1-14

方法三：延长CF 到G(图 1-15)，连 GB，使DF成中位线。

方法四：延长 CA 到 H(图 1-16)，连 HB，使 AD 成中位线。

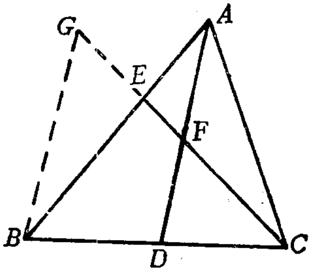

图 1-15

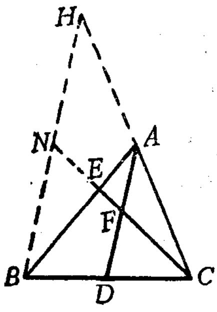

图 1-16

2. 已知：直线 l 通过$\triangle ABC$ 的重心 G(图 1-17)，从 A、B、C 分别向 l 引垂线，F、D、E 为垂足。

求证：$BD+CE=AF$。

［提示］取 DE 的中点为 Q，连 MQ 成中位线。

3． 已知：线段 AB、CD 相交于 O 点，E、F、G、H 分别是 AB、BC、CD、DA 的中点(图 1-18)。

求证：$EFGH$ 是▱。

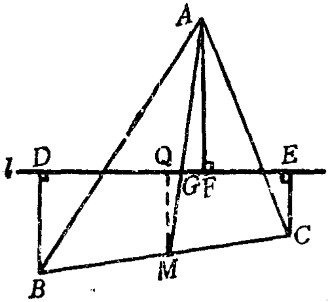

图 1-17

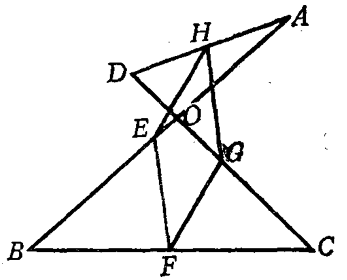

图 1-18

［提示］添边配中位线。

4． 已知：$\triangle ABC$ 中，M 为 BC 的中点，$\angle B=2\angle C$，$AD\perp BC$ 于 D。

求证：$DM=\frac{1}{2}AB$。

［提示］

方法一：取 AB 的中点 N(图 1-19)，连 DN、MN。

方法二：取 AC 的中点 N(图 1-20)，连 DN、MN。

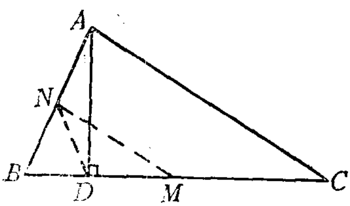

图 1-19

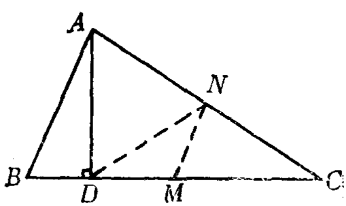

图 1-20