



华夏英才基金学术文库

罗冠炜 谢建华 著

碰撞振动系统的 周期运动和分岔



科学出版社
www.sciencep.com



华夏英才基金学术文库

碰撞振动系统的 周期运动和分岔

罗冠炜 谢建华 著

科学出版社

北 京

内 容 简 介

本书主要论述碰撞振动系统的分岔与混沌性质。书中研究了该类系统周期运动的稳定性、亚谐分岔、Hopf 分岔(含共振情形)及余维二分岔;分析了系统相关奇异性和混沌形成的过程;讨论了塑性碰撞振动系统两类周期运动的转迁过程及其分岔特点。本书还针对机械工业领域中一些常见的冲击振动机械进行了理论与数值分析,对复杂运动形成过程和规律给出了形象的说明。

本书可供从事非线性动力学或机械振动研究的教师和科技工作者参考,也可作为力学、机械、航空航天等专业研究生或高年级本科生相关课程的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

碰撞振动系统的周期运动和分岔/罗冠炜,谢建华 著. —北京:科学出版社, 2004

(华夏英才基金学术文库)

ISBN 7-03-011556-2

I. 碰… II. ①罗… ②谢… III. 碰撞(力学)-非线性振动-研究
IV. O322

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 048678 号

责任编辑:彭 斌 姚 晖/责任校对:朱光光

排版制作:科学出版社编务公司/责任印制:钱玉蓉/封面设计:黄华斌

科学出版社 出版

北京东黄城根北街16号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

源海印刷有限责任公司印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2004 年 3 月第 一 版 开本: B5 (720 × 1000)

2004 年 3 月第一次印刷 印张: 15 1/2

印数: 1—2 000 字数: 296 000

定价: 24.00 元

(如有印装质量问题, 我社负责调换〈环伟〉)

前 言

动力机械内部或边界上的间隙常导致碰撞振动,即由零部件之间或零部件与边界之间的往复碰撞而造成系统整体的强烈振动,从而带来一系列实际问题。例如轮对与钢轨之间的碰撞,加剧了高速列车的不平稳运动,影响了列车运行的稳定性与舒适度;又如在流体的诱发下,核反应堆中的冷却管道与其支座、燃料棒与反应堆壳体,可能反复发生相互冲击,给系统的安全造成威胁。因此,减小部件损耗,提高含间隙机械系统的使用效率、寿命及安全性,是机械工程领域亟待解决的一个重要课题。另一方面,人们又可以有效地利用碰撞振动原理设计出种类多样的冲击振动机械和装置(如振动落砂机、小型打桩机、振动成型机和冲击减振器等)。这两方面都涉及碰撞振动的机理问题。含间隙和冲击的机械振动系统一般为多参数高维系统,并且由于碰撞与冲击等因素造成的非线性和奇异性,使系统的动态响应变得十分复杂,因此迫切需要人们对碰撞振动系统的动力学本质有更深入和更全面的了解。近年来,学术界利用非线性振动理论,通过计算机数值模拟和实验,发现该类系统中不仅存在着多种周期运动状态,而且随着参数的变化可逐步地演变成概周期、非周期或混沌运动状态,因而形成了一个新的研究方向——振动-冲击动力学。该方向的研究揭示了碰撞振动难以抑制的主要原因,开拓了其工程应用的新领域,同时也引起越来越多的振动理论与应用工作者的关注。

本书着重研究碰撞振动系统的稳定性、分岔与混沌。主要内容有:①周期运动的存在性与稳定性;②非共振与弱共振条件下周期运动的 Hopf 分岔;③强共振条件下周期运动的 Hopf 分岔与亚谐分岔;④周期运动的余维二分岔;⑤弹、塑性碰撞振动系统周期运动的倍化分岔及相关奇异性;⑥混沌运动形成的几种主要途径及规律;⑦几种常见的含间隙或冲击振动机械的动力学分析。此外,书中附录补充介绍了非线性动力学中的若干基本概念与方法,如 Arnold 舌、Feigenbaum 吸引子、Smale 马蹄与符号动力学等。但由于篇幅所限,本书未能充分地反映国内外相关研究的丰硕成果。

本书所及的研究工作得到国家自然科学基金及甘肃省自然科学基金资助,又承蒙华夏英才基金资助出版,在此一并致谢。

在本书完成和出版之际,作者深切缅怀已故导师孙训方教授和舒仲周教授,感谢他们生前多年的教诲与指导。

由于作者水平有限,书中难免有不妥之处,敬请读者指正。

作 者

2002 年 12 月 28 日

符 号 表

R^n	n 维欧氏空间
R^1	实数集
T	时间
t	无量纲时间
Ω	激振频率
ω	无量纲激振频率
$\dot{x}_{i-}$	第 i 个质块碰撞前的无量纲瞬时速度
$\dot{x}_{i+}$	第 i 个质块碰撞后的无量纲瞬时速度
$q = p/n$	周期运动符号, n 为力周期数, p 为碰撞次数
$n-p-q$	含间隙振动系统的周期运动符号, n 为力周期数, p 和 q 分别为碰撞振子与左右(或上下)约束的碰撞次数
$n-p-I$	塑性碰撞振动系统的周期运动符号, n 为力周期数, p 为碰撞次数, I表示非滞留(同步)运动类型
$n-p-II$	塑性碰撞振动系统的周期运动符号, n 为力周期数, p 为碰撞次数, II表示滞留(同步)运动类型
$T_{1/1}^1$	$q = 1/1$ 不动点因Hopf分岔在Poincaré映射投影图上产生的一个不变环
$2T_{1/1}^1$	$T_{1/1}^1$ 环的倍化, 其倍化分岔的途径: $T_{1/1}^1$ 环 $\rightarrow 2T_{1/1}^1$ 环 $\rightarrow 2^2T_{1/1}^1$ 环 $\rightarrow \dots \rightarrow 2^nT_{1/1}^1$ 环 $\rightarrow$ 麦比乌斯吸引子
$T_{p/n}^1$	$q = p/n$ 不动点因Hopf分岔在Poincaré映射投影图上产生的 p 个不变环
$2T_{p/n}^1$	$T_{p/n}^1$ 环的倍化, 其倍化分岔的途径: $T_{p/n}^1$ 环 $\rightarrow 2T_{p/n}^1$ 环 $\rightarrow 2^2T_{p/n}^1$ 环 $\rightarrow \dots \rightarrow 2^nT_{p/n}^1$ 环 $\rightarrow$ 麦比乌斯吸引子
diag[]	对角矩阵

目 录

前言

符号表

第一章 碰撞振动系统在非共振与弱共振条件下的 Hopf 分岔	1
第一节 高维映射的基本理论	1
一、线性映射	1
二、周期点的稳定性	3
第二节 平面映射的 Hopf 分岔	7
第三节 高维映射 Hopf 分岔分析的中心流形——范式方法	17
第四节 双自由度碰撞振动系统周期运动的 Hopf 分岔与混沌	20
一、双自由度碰撞振动系统的力学模型	20
二、周期运动	22
三、周期运动的 Poincaré 映射及稳定性	25
四、非共振与弱共振条件下周期运动的 Hopf 分岔	28
五、算例	30
六、数值计算	31
第五节 碰撞振动系统的概周期环面分岔	34
参考文献	35
附录 A 范式的相关系数	36
附录 B 圆周保向同胚的基本性质	38
第二章 碰撞振动系统在强共振条件下的 Hopf 分岔与亚谐分岔	40
第一节 平面映射在强共振条件下的 Hopf 分岔与亚谐分岔	40
一、确定周期 n 点的映射方程	40
二、强共振 $\lambda_0^3 = 1$ 情况	44
三、强共振 $\lambda_0^4 = 1$ 情况	46
第二节 双自由度碰撞振动系统在强共振条件($\lambda^3(0)=1$)下的亚谐分岔	52
一、双自由度碰撞振动系统在共振点附近的动力学行为	52
二、数值计算	53
第三节 双自由度碰撞振动系统在强共振条件($\lambda^4(0)=1$)下的亚谐分岔与 Hopf 分岔	56

一、双自由度碰撞振动系统在共振点附近的动力学行为	56
二、数值计算	59
第四节 碰撞振动系统在强共振情况下的分岔与擦边运动	62
一、力学模型与 Poincaré 映射	62
二、强共振条件下周期运动的亚谐分岔与擦边运动	64
三、强共振条件下周期运动的 Hopf 分岔与擦边运动	68
第五节 惯性式冲击振动落砂机在强共振条件下的亚谐分岔与 Hopf 分岔	69
第六节 冲击消振器在强共振条件($\lambda^2(0)=1$)下的亚谐分岔与 Hopf 分岔	74
一、力学模型与 Poincaré 映射	74
二、强共振条件下周期运动的亚谐分岔与 Hopf 分岔	75
参考文献	78
第三章 碰撞振动系统周期运动的余维二分岔与混沌	80
第一节 余维二分岔问题的范式	80
第二节 碰撞振动系统周期运动的余维二分岔(I)	84
一、周期运动的余维二分岔	84
二、数值分析	87
第三节 碰撞振动系统周期运动的余维二分岔(II)	92
一、力学模型与 Poincaré 映射	92
二、中心流形与范式	94
三、映射的余维二分岔	95
四、两个单自由度振子碰撞振动的余维二分岔	98
五、双质体冲击振动成型机的余维二分岔	102
六、冲击振动落砂机的余维二分岔	106
第四节 碰撞振动系统周期运动的余维二分岔(III)	109
一、力学模型与 Poincaré 映射	109
二、局部动力学行为的参数开折	110
三、数值分析	114
第五节 含间隙振动系统的余维二分岔(I)	118
一、力学模型与 Poincaré 映射	118
二、中心流形与范式	119
三、简化映射的余维二分岔	121
四、数值分析	126
第六节 含间隙振动系统的余维二分岔(II)	130
一、力学模型与 Poincaré 映射	130

二、中心流形与范式	130
三、环面分岔	132
四、数值分析	134
参考文献	141
第四章 双自由度碰撞振动系统周期运动的全局分岔	143
第一节 双自由度碰撞振动系统周期运动的全局分岔	143
第二节 碰撞振动系统周期运动到混沌的非常规转迁过程	147
参考文献	151
附录 C Feigenbaum 吸引子的结构	151
第五章 塑性碰撞振动系统的周期运动稳定性与全局分岔	154
第一节 单自由度塑性碰撞振动系统的周期运动与全局分岔	154
一、单自由度塑性碰撞振子的运动微分方程与圆周映射	154
二、周期运动与全局分岔	156
第二节 两自由度塑性碰撞振动系统的周期运动与分岔	158
一、塑性碰撞振动系统的周期运动	158
二、周期 $n-1$ 运动的 Poincaré 映射	161
三、塑性碰撞振动系统周期 $n-1$ 运动的稳定性与分岔	165
四、系统参数对周期 $n-1$ 运动及分岔的影响	169
参考文献	170
第六章 存在间隙的双自由度振动系统的周期运动稳定性、分岔与混沌	172
第一节 存在间隙的双自由度振动系统的力学模型	172
第二节 对称周期运动	174
第三节 对称周期运动的 Poincaré 映射及稳定性	176
第四节 周期运动的叉式分岔、倍化分岔与擦边奇异性	180
第五节 对称周期运动的 Hopf 分岔及混沌形成过程	184
参考文献	186
第七章 冲击振动机械系统的周期运动与分岔	187
第一节 冲击振动落砂机的周期运动与分岔	187
一、冲击振动落砂机的力学模型	187
二、周期运动及 Poincaré 映射	188
三、冲击振动落砂机周期运动的 Hopf 分岔	189
四、冲击振动落砂机周期运动的倍化分岔	191
五、箱型冲击振动落砂机的分岔	192
第二节 双质体冲击振动成型机的周期运动与分岔	195
一、单冲击周期 n 运动	195

二、Poincaré 映射、稳定性与局部分岔	198
三、全局分岔	201
第三节 轮轨摩擦碰撞动力学	205
一、轮轨三维摩擦碰撞问题	205
二、轮轨二维摩擦碰撞问题	209
三、轮轨蛇行碰撞运动及全局分岔	210
第四节 小型振动冲击式打桩机的周期运动与分岔	215
一、力学模型	215
二、周期运动与稳定性	218
三、周期冲击运动与分岔	222
参考文献	229
附录 D Smale 马蹄与符号动力学	230

第一章 碰撞振动系统在非共振与弱共振条件下的 Hopf 分岔

第一节 高维映射的基本理论

本节通过 Jordan 型矩阵, 分析了线性映射的结构; 介绍了映射不动点和周期点稳定性研究的 Liapunov 方法; 结合矩阵方程的可解性给出了一次近似理论。本节内容构成了碰撞振动系统周期运动稳定性判别方法的理论基础。

一、线性映射

设 $f: \Omega \rightarrow R^n$ 是 R^n 中开区域 Ω 到 R^n 中的可微映射, $\bar{x} \in \Omega$ 是 f 的不动点, 即 $f(\bar{x}) = \bar{x}$ 。考虑 f 在 $\bar{x}$ 附近的动力学行为时, 需研究线性映射

$$L: R^n \rightarrow R^n, \quad Lx = Ax \quad (1.1.1)$$

式中, $A = (\partial f / \partial x)|_{\bar{x}}$ 是 f 在点 $\bar{x}$ 的雅可比矩阵。

引理 1.1.1^[1] 存在非奇异常数矩阵 T , 使

$$T^{-1}AT = J \quad (1.1.2)$$

式中, J 是 Jordan 正则型, 即

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & J_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & J_l \end{bmatrix} \quad (l \leq n) \quad (1.1.3)$$

其为对角分块矩阵, 而子矩阵

$$J_j = \begin{bmatrix} \lambda_j & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_j & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_j \end{bmatrix} \quad (j=1, \dots, l) \quad (1.1.4)$$

是 $n_j \times n_j$ 阶矩阵, $1 \leq n_j \leq n$, 而且 $n_1 + n_2 + \dots + n_l = n$ 。式中, λ_j 为 A 的特征值, 如果 $\lambda_j = \alpha + i\beta$ 为复数, 则可进一步进行线性变换, 将 A 中与 λ_j 和 $\bar{\lambda}_j$ 对应的 Jordan

块变为

$$J_j = \begin{bmatrix} A_j & I & 0 & 0 \\ 0 & A_j & I & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & I \\ 0 & 0 & 0 & A_j \end{bmatrix}$$

式中

$$A_j = \begin{bmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

定义 1.1.1 设 A 为 $n \times n$ 阶矩阵, 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, 则称 A 为稳定矩阵。

定理 1.1.1 A 为稳定矩阵的充要条件为其谱半径小于 1, 即

$$\rho(A) = \max\{|\lambda_i|, i=1, \dots, l\} < 1$$

证明: 不妨设 A 为其 Jordan 型, 见式(1.1.3), 则

$$J^n = \begin{bmatrix} J_1^n & & \\ & \ddots & \\ & & J_l^n \end{bmatrix} \quad (1.1.5)$$

式中

$$\begin{aligned} J_j^n &= (\lambda_j I_{n_j} + N_{n_j})^n = \sum_{k=0}^{n_j-1} C_n^k \lambda_j^{n-k} N_{n_j}^k \\ &= \begin{bmatrix} \lambda_j^n & C_n^1 \lambda_j^{n-1} & \cdots & C_n^{n_j-1} \lambda_j^{n-n_j+1} \\ & \lambda_j^n & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & C_n^1 \lambda_j^{n-1} \\ & & & \lambda_j^n \end{bmatrix} \quad (n > n_j) \end{aligned} \quad (1.1.6)$$

因此, $\lim_{n \rightarrow \infty} J^n = 0$, 从而 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$ 。

若 $\lim_{n \rightarrow \infty} A^n = 0$, 反设 $\rho(A) > 1$, 则存在 $\lambda_j \in \{\lambda_1, \dots, \lambda_l\}$, $|\lambda_j| > 1$, 及与 λ_j 相关的特征向量 v_j , 使 $A v_j = \lambda_j v_j$, 从而 $A^n v_j = \lambda_j^n v_j$, 因此矛盾。

通过引入内部矩阵的定义, 我们将给出矩阵 A 为稳定的一个充要条件。

$n \times n$ 阶矩阵 A 的内部矩阵是由 A 及依次删除其第一行及第一列、最后一行及最后一列而剩下的矩阵, 如 $n=5$

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} & a_{45} \\ a_{51} & a_{52} & a_{53} & a_{54} & a_{55} \end{bmatrix}$$

则 A 的内部矩阵共 3 个:

$$A, \quad \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}, \quad [a_{33}]$$

如果 A 的所有内部矩阵的行列式为正的, 则称其为内向正的(innerwise positive)。

定理 1.1.2 (Schur-Cohn 准则)^[3] 设

$$p(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1} \lambda^{n-1} + \cdots + a_0 \quad (a_n > 0) \quad (1.1.7)$$

为实多项式, 则其根全部位于复平面单位圆内部的充要条件为

(1) $p(1) > 0$ 和 $(-1)^n p(-1) > 0$;

(2) 如下两个 $n-1$ 阶方阵

$$A_{n-1}^{\pm} = \begin{bmatrix} a_n & 0 & \cdots & 0 \\ a_{n-1} & a_n & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ a_2 & \cdots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_0 \\ \vdots & \ddots & a_0 & a_1 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ a_0 & a_1 & \cdots & a_{n-2} \end{bmatrix}$$

是内向正的。

二、周期点的稳定性

设 $f: G \rightarrow \mathbf{R}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中开区域 G 到 $\mathbf{R}^n$ 中的连续映射, 或写成

$$x' = f(x) \quad (1.1.8)$$

设 $\bar{x}$ 是 f 的不动点, 即 $f(\bar{x}) = \bar{x}$ 。

定义 1.1.2^[3] 如果对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 对任何 $n > 0$, 有 $f^n(B_\delta(\bar{x})) \subset B_\varepsilon(\bar{x})$, 则称不动点 $\bar{x}$ 是稳定的, 其中 $B_\delta(\bar{x}) = \{x \in \mathbf{R}^n : \|x - \bar{x}\| < \delta\}$ 。如果 $\bar{x}$ 不是稳定的, 则称其为不稳定。

定义 1.1.3 (1) 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中任何集合, 如果函数 $V: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$ 在 G 中连续且

有界, 并且对任何 $x \in G$, $\dot{V}(x) = V(f(x)) - V(x) \leq 0$, 称 V 是 G 上的一个 Liapunov 函数;

(2) 如果 $V(\bar{x}) = 0$, 且存在 $\eta > 0$, 当 $x \in B_\eta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ 时, $V(x) > 0$ ($V(x) < 0$), 则称 V 相对 $\bar{x}$ 是正定的(负定的), 简称 V 是正定的(负定的)。

以下总假定 V 在 $\bar{x}$ 的某邻域里是连续的。

定义 1.1.4 如果 $\bar{x}$ 是稳定的, 且存在 $\eta > 0$, 当 $x \in B_\eta(\bar{x})$ 时, $\lim_{n \rightarrow \infty} f^n(x) = \bar{x}$, 则称 $\bar{x}$ 为渐近稳定的。

定理 1.1.3(Liapunov 稳定定理)^[3] 如果存在相对 $\bar{x}$ 正定的 V , 且 $\dot{V}(x) \leq 0$, 则 $\bar{x}$ 是稳定的。

证明: 取充分小的 $\eta > 0$, 使对任何 $x \in B_\eta(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$, $\dot{V}(x) \leq 0$, $V(x) > 0$ 。设给定 $\varepsilon > 0$, 不妨设 $0 < \varepsilon < \eta$ 。记 $h = \min_{|x-\bar{x}|=\varepsilon} V(x) > 0$, $H = \{x | V(x) < h/2\}$, H_0 是 H 中含 $\bar{x}$ 的连通部分, H 与 H_0 均是开集的。如果 $x_0 \in H_0$, $\dot{V}(x_0) \leq 0$, 于是 $V(f(x_0)) \leq V(x_0) < h/2$, 所以 $f(x_0) \in H$ 。由于 x_0 与 $\bar{x}$ 同属于 H 的同一连通部分, 它们的像 $f(x_0)$ 与 $\bar{x} = f(\bar{x})$ 同属于 H 的同一连通部分, 即属于 H_0 , H_0 是 f 的不变集。取 $\delta > 0$ 充分小, $B_\delta(\bar{x}) \subset H_0$ 。若 $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$, 则

$$f^n(x_0) \subset H_0 \subset B_\varepsilon(\bar{x}) \quad (n > 0)$$

引理 1.1.2(Lasalle 不变原理)^[3,4] 设 G 是 $\mathbf{R}^n$ 中的任一个集合, 有界点列 $\{f^n(x_0), n > 0\} \subset G$; V 是 G 上的 Liapunov 函数。设 M 是集合 $E = \{x | \dot{V}(x) = 0, x \in G\}$ 中的最大不变集, 则存在常数 c , 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $f^n(x_0) \rightarrow M \cap V^{-1}(c)$ 。

证明: 因为 $\{f^n(x_0), n > 0\}$ 有界, $\omega(x_0, f)$ 是 $\bar{G}$ 中非空、闭的、不变连通集, 且 $f^n(x_0) \rightarrow \omega(x_0, f)$, 即 $\rho(f^n(x_0), \omega(x_0, f)) \rightarrow 0$, 其中

$$\rho(f^n(x_0), \omega(x_0, f)) = \inf_{y \in \omega(x_0, f)} \{d(f^n(x_0), y)\}$$

由于 $\dot{V}(x) \leq 0$, $V(f^n(x_0))$ 单调不增且有界, 故 $V(f^n(x_0)) \rightarrow c$ 。对于任何 $y \in \omega(x_0, f)$, 由定义存在 n_i , 使 $f^{n_i}(x_0) \rightarrow y$, 由 V 的连续性, $V(y) = c$, 从而 $\omega(x_0, f) \subset V^{-1}(c)$, 由不变性, $\omega(x_0, f) \subset M$, 故 $\omega(x_0, f) \subset M \cap V^{-1}(c)$ 。

定理 1.1.4 如果存在相对 $\bar{x}$ 正定的 V , 且 $\dot{V}$ 相对 $\bar{x}$ 是负定的, 则 $\bar{x}$ 是渐近稳定的。

证明: 由定理 1.1.3, $\bar{x}$ 是稳定的。取 ε_0 充分小, 在 $B_{\varepsilon_0}(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$ 上, $V > 0$, $\dot{V} < 0$ 。由定理 1.1.3 的证明, 存在 f 的正向不变集 H_0 , 且 $\bar{x}$ 为其内点。由引理 1.1.2, 对 $x_0 \in H_0$, $f^n(x_0) \rightarrow \bar{x} = \{x | x \in H_0, \dot{V}(x) = 0\} \cap B_{\varepsilon_0}(\bar{x})$ 。

定理 1.1.5(Liapunov 不稳定定理)^[3] 如果 V 在 $\bar{x}$ 的任何小邻域中均可取到正值, 且 $\dot{V}$ 相对 $\bar{x}$ 正定的, 则 $\bar{x}$ 是不稳定的。

证明: 反设 $\bar{x}$ 是稳定的, 取 $\varepsilon, \delta > 0$ 充分小, 任何 $x \in B_\varepsilon(\bar{x})/\{\bar{x}\}$, 有 $-\dot{V} < 0$, 且在 $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$ 时, $f^n(x_0) \in B_\varepsilon(\bar{x})$ 。由引理 1.1.2

$$f^n(x_0) \rightarrow \bar{x} = \{x | -\dot{V}(x) = 0\} \cap B_\varepsilon(\bar{x})$$

从而 $-V(f^n(x_0)) \rightarrow 0$ 。另一方面, 可取 $x_0 \in B_\delta(\bar{x})$, 使 $-V(x_0) < 0$, 由 $-\dot{V} < 0$ 的条件, 推知 $\{-V(f^n(x_0))\}$ 严格单调递减的, 因此矛盾。

定理 1.1.6^[3] 设 V 在 $\bar{x}$ 的任何邻域内均可取到正值, 且 $\dot{V} = \beta V + W$, 其中 $\beta > 0$, W 是 $\bar{x}$ 的某邻域上的非负函数, 则 $\bar{x}$ 是不稳定的。

下面介绍所谓的一次近似理论, 它表明如果 $A = \partial f(\bar{x})/\partial x$ 是双曲矩阵, 则 $\bar{x}$ 稳定性与线性化映射 $y' = Ay$ 的不动点 $y = 0$ 稳定性相同。

考虑映射

$$x' = Ax + f(x) \quad (1.1.9)$$

式中, A 为 $n \times n$ 阶矩阵; $x \in \mathbb{R}^n$; $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ 为连续函数, Ω 为含 $\mathbb{R}^n$ 原点的开区域, 且 $f(x) = O(x)$, 即对任何 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 当 $\|x\| < \delta$ 时, $\|f(x)\| < \varepsilon\|x\|$ 。

考虑与式(1.1.9)对应的线性映射

$$x' = Ax \quad (1.1.10)$$

取正定函数 $V(x) = x^T Bx$, 则 $\dot{V}(x) = x^T (A^T B A - B)x$ 。如果 $A^T B A - B$ 为负定的, 则式(1.1.10)的原点 $x = 0$ 为渐近稳定的。反之, 假设 A 为稳定的, 考虑矩阵方程

$$A^T B A - B = -C \quad (1.1.11)$$

式中, C 为给定的矩阵。由式(1.1.11)

$$(A^T)^{k+1} B A^{k+1} - (A^T)^k B A^k = -(A^T)^k C A^k \quad (k=0, \dots, m) \quad (1.1.12)$$

对上式求和

$$(A^T)^{m+1} B A^{m+1} - B = -\sum_{k=0}^m (A^T)^k C A^k \quad (1.1.13)$$

令 $m \rightarrow \infty$, 则

$$B = \sum_{k=0}^{\infty} (A^T)^k C A^k \quad (1.1.14)$$

因此有如下引理。

引理 1.1.3^[3] 如果 A 为稳定矩阵, 则对任何给定矩阵 C , 矩阵方程式(1.1.11)存在惟一解 B 。如果 C 是正定的, B 亦然; 如果 C 是对称的, B 亦然。

矩阵方程式(1.1.11)的更一般形式为

$$A_1 X A_2 - X = C \quad (1.1.15)$$

式中, A_1 为 $m \times m$ 阶矩阵; A_2 为 $n \times n$ 阶矩阵; X 和 C 为 $m \times n$ 阶矩阵。

引理 1.1.4^[3] 如果没有 A_1 的特征值为 A_2 的特征值的倒数, 则对任意给定的矩阵 C , 矩阵方程式(1.1.15)的解惟一。

证明: 我们证明, 如果没有 A_1 的特征值为 A_2 的特征值的倒数, 则方程 $A_1 X A_2 = X$ 只有惟一解 $X = 0$ 。事实上, 由 $A_1 X A_2 = X$, 可得 $A_1^{k-j} X A_2^{k-j} = X$, 从而

$$A_1^j = A_1^k X A_2^{k-j} \quad (k > j > 0) \quad (1.1.16)$$

定义多项式

$$p(\lambda) = \sum_{j=0}^k a_j \lambda^j$$

$$p^*(\lambda) = \sum_{j=0}^k a_j \lambda^{k-j} = \lambda^k p(1/\lambda)$$

由式(1.1.16)

$$p(A_1)X = A_1^k X p^*(A_2) \quad (1.1.17)$$

设 $\varphi_i(\lambda)$ 为 A_i 的特征多项式。由于 $\varphi_1(\lambda)$ 与 $\varphi_2^*(\lambda)$ 是互质的, 因此存在多项式 $h(\lambda)$, $q(\lambda)$ 使

$$h(\lambda)\varphi_1(\lambda) + q(\lambda)\varphi_2^*(\lambda) = 1 \quad (1.1.18)$$

定义 $\varphi(\lambda) = q(\lambda)\varphi_2^*(\lambda)$ 。由式(1.1.18), $\varphi(A_1) = I$ 。由于 $\varphi^*(\lambda) = q^*(\lambda)\varphi_2(\lambda)$, 故 $\varphi^*(A_2) = 0$ 。用 $\varphi(\lambda)$ 代替式(1.1.17)中的 $p(\lambda)$, 得 $X = 0$ 。

反设 λ , λ^{-1} 分别是 A_1 , A_2 的特征值。设 $A_1 x^1 = \lambda x^1$, $A_2^T x^2 = \lambda^{-1} x^2$, 定义 $X = (x_1^2 x^1, x_2^2 x^1, \dots, x_n^2 x^1)$, 则 $X \neq 0$, 且 $A_1 X A_2 = X$ 。

定理 1.1.7^[3](一次近似理论) 对映射(1.1.9)而言, 有

- (1) 如果 $\rho(A) < 1$, 则不动点 $x = 0$ 为渐近稳定的;
- (2) 如果 $\rho(A) > 1$, 则不动点 $x = 0$ 为不稳定的。

证明:

- (1) 在矩阵方程式(1.1.11)中, 取 $C = I$, 由引理 1.1.3, 存在正定的矩阵 B ,

满足 $A^T B A - B = -I$, 取正定函数 $V(x) = x^T B x$, 对映射(1.1.9)

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (Ax + f(x))^T B(Ax + f(x)) - x^T B x \\ &= -x^T x + 2x^T A^T B f(x) + V(f(x)) = -x^T x + O(\|x\|^2)\end{aligned}$$

式中, $\dot{V}$ 为正定的。由定理 1.1.4, $x=0$ 是渐近稳定的。

(2) 取 $\beta > 0$, 使 $A_0 = (1 + \beta)^{-1/2} A$ 没有互为倒数的特征值。由引理 1.1.4, 存在惟一的矩阵 B , 使

$$A_0 B A_0 - B = I \quad \text{或} \quad A^T B A - B = \beta B + (1 + \beta) I$$

取 $V(x) = x^T B x$, V 在 $x=0$ 的任何小邻域中可取到正值(若 V 相对 $x=0$ 负定, 则式(1.1.10)的不动点 $x=0$ 是稳定的, 因此矛盾。如果在 $x=0$ 的任何小邻域内, 存在 $x_0 \neq 0$, 使 $V(x_0) = 0$, 由于对式(1.1.10), $\dot{V} > 0$, 从而 $V(Ax_0) > 0$, 由连续性, $\|Ax_0\|$ 可充分小), 对于式(1.1.9)

$$\begin{aligned}\dot{V}(x) &= (Ax + f(x))^T B(Ax + f(x)) - x^T B x \\ &= \beta V(x) + (1 + \beta)x^T x + 2x^T A^T B f(x) + V(f(x)) \\ &= \beta V(x) + W(x)\end{aligned}$$

式中, $W(x) > 0$ 。由定理 1.1.6, $x=0$ 是不稳定的。

第二节 平面映射的 Hopf 分岔

平面映射的不动点(周期点)失稳和分岔模式是由线性映射 A_0 的两个特征值穿越复平面上单位圆方式所确定的。如果 A_0 的某个特征值为 1 或 -1, 而另一个特征值在单位圆内, 则产生鞍结或倍化分岔。本节主要研究 A_0 的一对复共轭特征值 $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$ 穿越单位圆的情形。此时产生的 Hopf 分岔可分为三种情况: ①一般情况; ②强共振($\lambda_0^n = 1, n=1, 2, 3, 4$); ③弱共振($\lambda_0^n = 1, n \geq 6$)。以上三种情况分别在本节及第二章第一节中讨论。

考虑 R^2 中充分光滑的映射

$$f_\mu: R^2 \rightarrow R^2, \quad f_\mu(x, y) = (f_1(x, y, \mu), f_2(x, y, \mu))^T \quad (1.2.1)$$

式中, $\mu \in R$ 为实参数; $(x, y)^T = (0, 0)^T$ 是 f_μ 的不动点; 即 $f_\mu(0, 0) = (0, 0)^T$ 。记

$$h: R^2 \rightarrow C^2, (z, \bar{z})^T = h(x, y) = (x + iy, x - iy)^T$$

式中, C 为复平面; h 为非奇异的线性变换, 其逆变换为

$$h^{-1}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad (x, y)^T = h^{-1}(z, \bar{z}) = \left(\frac{z + \bar{z}}{2}, \frac{z - \bar{z}}{2i} \right)^T$$

因此 f_μ 拓扑共轭于

$$F_c: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2 \quad (1.2.2)$$

$$F_c(z, \bar{z}) = h \circ f_\mu \circ h^{-1}(z, \bar{z}) = (F_\mu(z, \bar{z}), \bar{F}_\mu(z, \bar{z}))^T$$

如果 $(x_i, y_i)^T$ ($i=1, \dots, n$) 是 f_μ 的 n 周期轨道, 则 $(z_i, \bar{z}_i)^T = h(x_i, y_i)$ ($i=1, \dots, n$) 为 F_c 的 n 周期轨道, $(x_i, y_i)^T, (z_i, \bar{z}_i)^T$ ($i=1, \dots, n$) 分别是复合映射 f_μ^n 与 F_c^n 的不动点, 且

$$DF_c^n(z_i, \bar{z}_i) = h [Df_\mu^n(x_i, y_i)] h^{-1}$$

因此 $DF_c^n(z_i, \bar{z}_i)$ 与 $Df_\mu^n(x_i, y_i)$ 特征值相同, f_μ 与 F_c 对应的 n 周期轨道稳定性相同。

可验证

$$DF_c(z, \bar{z}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial z} & \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial \bar{F}_\mu(z, \bar{z})}{\partial z} & \frac{\partial \bar{F}_\mu(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial z} & \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} \\ \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial \bar{z}} & \frac{\partial F_\mu(z, \bar{z})}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ b & a \end{bmatrix} \quad (1.2.3)$$

通常称映射 $z' = F_\mu(z, \bar{z})$ (简记为 $z' = F_\mu(z)$) 为 f_μ 的复数化形式。

设 $Df_\mu(0,0) = A_\mu$ 满足如下条件:

H1.2.1 A_0 有一对复共轭特征值 $\lambda_0, \bar{\lambda}_0$, 满足 $|\lambda_0| = |\bar{\lambda}_0| = 1$;

如果 f_μ 是 C^2 类的, 由摄动理论 A_μ 存在一对复共轭特征值 $\lambda(\mu), \bar{\lambda}(\mu)$, 满足 $\lambda(0) = \lambda_0$, 我们假设:

H1.2.2 $\frac{d}{d\mu} |\lambda(\mu)| \big|_{\mu=0} > 0$ 。

H1.2.1 和 H1.2.2 称为 Hopf 条件, 它表明当 μ 通过 0 时, A_μ 的一对复共轭特征值横截地穿过复平面上的单位圆。由 H1.2.2

$$\lambda(\mu) = \lambda_0(1 + \mu \tilde{\lambda}_1 + O(\mu^2)) \quad (1.2.4)$$

记

$$\theta(\mu) = \frac{1}{2\pi} \arg \lambda(\mu) = \theta_0 + \mu \theta_1 + O(\mu^2)$$