51.243
51.243
CJZ
CJZ
045524

航用球面三角学

陳嘉震编著

长沙铁道学院
藏書
圖書館

人民交通出版社

航用球面三角学

陈嘉震編著

人 民 交 通 出 版 社 出 版

（北京安定門外和平里）

北京市書刊出版業营業許可証出字第〇〇六号

新 华 書 店 發 行

公私合营慈成印刷工厂印刷

*

1958年8月北京第一版　　1958年8月北京第一次印刷

开本：787×1092 $\frac{1}{32}$　　印張：4 [illegible] 張

全書：118000字　　印数：1200册

統一書号：15044·5138

定价（10）：0.60元

第三章 球面三角微分关系式

第四章 球面角盈及球面三角形面积

第五章 球面內切圓及球面外接圓

第六章 球面曲綫

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

序　言

本教材是作者根据几年来在航海專業教学上的經驗，幷参考以下著作：

1)球面三角术　　李光蔭著

2)Сферическая Тригонометрия　　Ф. Ф. Павлов, В. П. Машкевич

球面三角学　　刘亞星譯

3)Сферическая Тригонометрия　　Проф. М. К. Вентцель

4)Plane and Spherical Trigonometry　　H. B. Goodwin, M. A.

5)Plane and Sphuical Trigonometry　　H. T. Muhly, Ph. D., S. S. Saslaw, Ph. D.

將旧編的講义加以修改而写成的。

在这教材中，对所有的公式，都予以詳細証明，而对一般性的叙述，則俘量精簡。在解球面三角形时，特别强調必須依照航海習慣所采用的計算順序和数据排列格式。教材的內容，較一般的球面三角学增加了球面曲綫及球面三角微分关系式等部分，这对于研究新式無綫电助航定位理論，及定位誤差是必要的。

本教材对于航空、測量、制圖、天文等專業，也是有用的。

在編写的过程中，大連海运学院航海学教研組及航海技术研究組曾給予了充分协助，幷提供了改进意見。謹向他們致以深深的謝意。

初稿問世，謬誤在所难免，尙祈讀者惠予批評和指正。

作　者

第一章 球 面 几 何

§1. 球面基本概念

1.1 球、球面

半圓周繞直徑旋轉而成的旋轉面叫作**球面**。球面所包圍的几何体叫作**球**。**球心**是球体中間的一个定点，由这定点到球面任何一点的直綫距离相等。球心到球面的直綫距离叫作球的**半徑**；同一球体的半徑相等。經过球心而兩端为球面所截的直綫叫作球的**直徑**；直徑为半徑的兩倍，同一球体的直徑自亦相等。

1.2 球面上的圓

任意平面截于球面的截痕是一个圓。經过球心的平面所截的圓叫作**大圓**；不經球心的平面所截的圓叫作**小圓**。

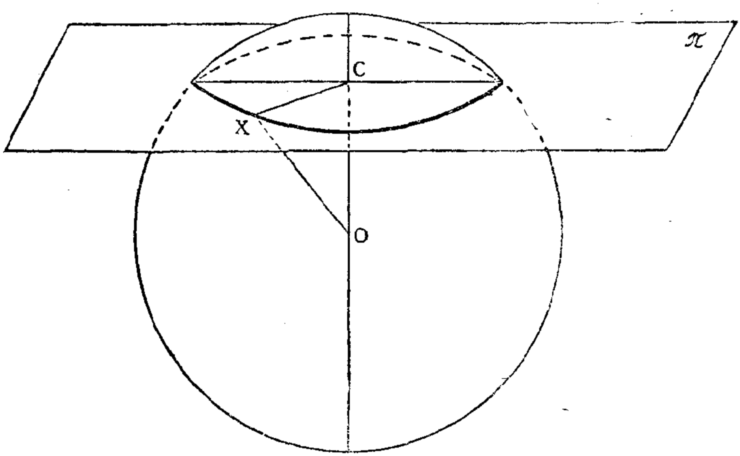

圖 1

設 x 为平面 π 所截的球面截痕上一个任意点(圖 1)。由球心 o 作 oc

垂直于平面 π 并交于 c，連 ox 及 cx，則 $\widehat{ocx}$ 为直角，Δocx 为直角三角形。$cx=\sqrt{ox^2-oc^2}$。从这个式中，可以看到，不論 x 在截痕上任何位置，对于平面 π 而言，oc 是一个定值，而 ox 为球的半徑，亦是一个定值。所以截痕上任何点到 c 的距离恒等。由此，根据圓的几何定义，可以断定截痕是一个圓，c 是它的中心，cx 是它的半徑。

大圓平面經过球心，这时由球心到平面的垂綫 oc 等于零，因而大圓的半徑与球的半徑相等，球心即大圓的中心；对于不經过球心的小圓平面，oc 恒大于零，因而 $cx<ox$，即小圓的半徑恒小于球的半徑。

經过球面上不在直徑兩端的二点，仅能作一个大圓，因为不在直徑兩端的二点仅能作一个平面經过球心。連球面上兩点的大圓弧長叫作这二点間的**球面距离**。航海以浬作为計算距离的單位，所謂一浬即是1′球心角所对的球面大圓弧長。

兩个大圓平面的交綫是球的直徑，也是这兩个大圓的直徑。因为大圓平面必須經过球心，所以球心既在一个大圓的面上，又在另个大圓的面上。只有平面交綫上的点才能同时在相交的平面上，所以球心是大圓平面交綫上的一个点，或者說大圓平面的交綫經过球心。大圓平面的交綫是經过球心的直綫，又为球面所截，因而是球的直徑。又因球心即是大圓平面的中心，大圓平面的交綫是大圓平面上經过大圓中心的直綫，綫的兩端抵于大圓的周，因此大圓平面的交綫，又是大圓的直徑。

1.3 軸、極、極距、極綫

垂直于圓面的球直徑，叫作这个圓的**軸**。軸的端叫作圓的**極**。由極到圓的球面距离叫作**極距**；同一圓的極距相等。圖 2，球直徑 PP_0 垂直于以 c 为中心的圓平面，所以 PP_0 是这个圓的軸，P 和 P_0 是它的極，極 P 或 P_0 到圓上各点 a. b 的球面距离，是由極到各該点的極距。極距 $\overset{\frown}{Pa}$、$\overset{\frown}{Pb}$ 相等。極距为 90° 的圓弧，又叫作該極的**極綫**。圖 2，$\overset{\frown}{PA}=\overset{\frown}{PB}=90°$，$\overset{\frown}{AB}$ 为 P 的極綫。大圓，只有大圓，距它的極为90°，所以，大圓弧是它的極的極綫；反之，極的極綫必須是大圓弧。

1.4 球面角、球面角的度量

球面上由兩个大圓弧構成的角叫作**球面角**。構成球面角的大圓弧叫

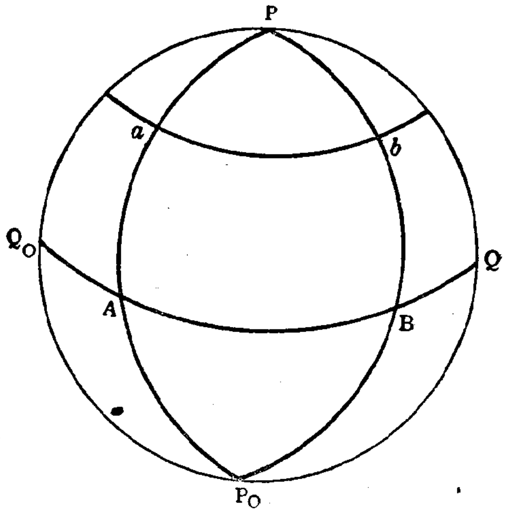

圖 2

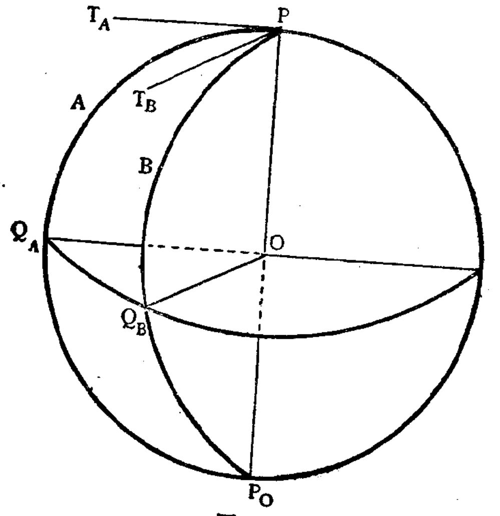

圖 3

作球面角的边，大圓弧的交点叫作該球面角的頂点。

圖 3，大圓弧 PAP_0、PBP_0 相交于 P 及 P_0，$A\widehat{P}B$ 或 $A\widehat{P_0}B$ 叫作球面角。P 是球面角 $A\widehat{P}B$ 的頂点，而 P_0 則是 $A\widehat{P_0}B$ 的頂点；大圓弧 $\overset{\frown}{PA}$、$\overset{\frown}{PB}$ 是 $A\widehat{P}B$ 的边，$\overset{\frown}{P_0A}$、$\overset{\frown}{P_0B}$ 是 $A\widehat{P_0}B$ 的边。

球面角有以下各种度量的方法：

a. 大圓平面所構成的二面角 $(A-PP_0-B)$；

b. 切于頂点的大圓弧切綫的夾角 $(T_A\widehat{P}T_B)$；

c. 頂点的極綫被大圓平面所截的弧段 $(\overset{\frown}{Q_AQ_B})$，或該弧段所对的球心角 $(Q_A\widehat{O}Q_B)$。

§2. 球面三角形

2.1 球面三角形

球面上三个大圓弧所構成的三角形 ABC（圖 4a）叫作**球面三角形**。構成三角形的大圓弧叫作球面三角形的边。

一个三角形共有六个部分，即三个角及三个边，这些部分叫作球面三角形的**要素**。各要素均小于 180° 而大于 0° 的三角形叫作"欧勒"球面三角形；設有一个或一个以上的要素大于 180°，則三角形叫作"馬比阿斯——斯圖第"球面三角形。本教材所涉及的仅限于欧勒球面三角形。

球面三角形的頂点常用 A、B、C 标註，而 A、B、C 又分别表示各該点的角；各角所对的边則用 a、b、c 表示之。

对称于 A、B、C 各点的大圓弧所構成的另一个三角形 $A_0B_0C_0$（圖 4b）叫作球面三角形 ABC 的**对称三角形**。各对称部分相等，兩个三角形也相等。

球面三角形中凡有兩个边或兩个角相等，三角形叫作**球面等腰三角形**；三边或三角相等，叫作**球面等边三角形**；一个角为 90°，叫作**球面直角三角形**；一个边为 90°，叫作**球面直边三角形**；一个角及其所对边甚小，或三个边均甚小，叫作窄的或小的**球面初等三角形**；凡不具有上述条件的三角形，叫作**球面任意三角形**。球面三角形为上述各类三角形的統称，但經常則被用作球面任意三角形的簡称。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

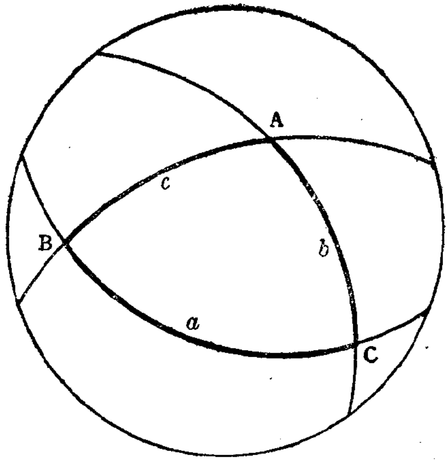

圖 4a

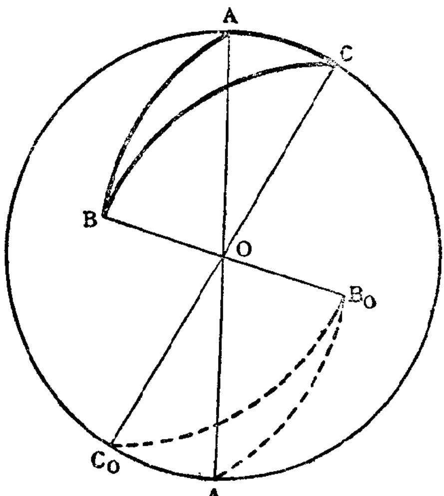

圖 4b

2.2 極綫三角形

球面三角形頂点的極綫所構成的三角形，叫作該球面三角形的極綫三角形。極綫三角形的頂点常以 A'、B'、C' 标註，并用以表示各該頂点的角；a'、b'、c' 則分別表示各該角所对的边。A'、B'、C' 必需在 A、B、C 的同側(圖 5)。

球面三角形各边均小于 90°，則極綫三角形在原球面三角形之外；球面三角形各边均大于 90°，則極綫三角形在原球面三角形之內；球面三角形的一边或二边小于 90°，其余的边大于 90°，則極綫三角形与原球面三角形相交叉。

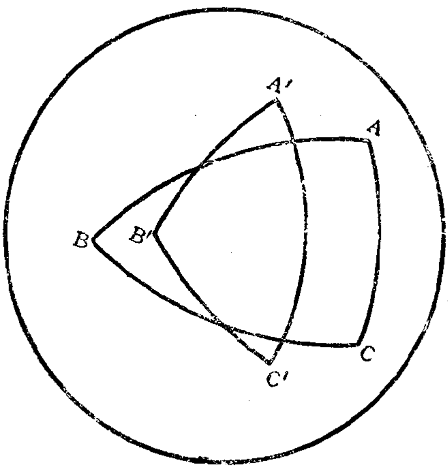

圖 5

2.3 球面三角形与其極綫三角形的关系

a. **球面三角形各頂点为其極綫三角形各对应边的極。**

設 $A'B'C'$ 为球面三角形 ABC 的極綫三角形（圖 6 ），根据定义，a'、b'、c' 分别为 A、B、C 各頂点的極綫，頂点 A、B、C 分别为 a'、b'、c' 各边的極。

b. **極綫三角形各頂点为其原球面三角形各对应边的極。**

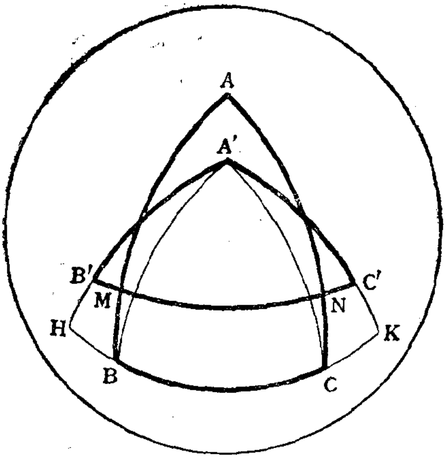

圖 6

由圖 6，已知B为b'的極，C为c'的極，故$\overset{\frown}{BA'}=90°$，$\overset{\frown}{CA'}=90°$。但球心角$A'OB$及$A'OC$可以分别用$\overset{\frown}{BA'}$及$\overset{\frown}{CA'}$度量，所以$A'\hat{O}B=A'\hat{O}C=90°$。今$A'O$与$OB$及$OC$成为直角，故$A'O$垂直于大圓$BC$的面。又因$A'O$經过大圓$BC$的圓心$O$，故$A'O$为大圓$BC$的軸，$A'$为大圓$BC$的極。同理可証$B'$为$\overset{\frown}{AC}$的極，$C'$为$\overset{\frown}{AB}$的極。

c. 球面三角形的边(角)与其極綫三角形的角(边)互为补角。即

$$a+A'=180° \qquad b+B'=180° \qquad c+C'=180°$$

$$A+a'=180° \qquad B+b'=180° \qquad C+c'=180°$$

在圖 6 延長$\overset{\frown}{AB}$、$\overset{\frown}{AC}$交$\overset{\frown}{B'C'}$于M、N，并延長$\overset{\frown}{BC}$交$\overset{\frown}{A'B'}$、$\overset{\frown}{A'C'}$于H、K

今 $\qquad A'=\overset{\frown}{HK},$

但 $\qquad \overset{\frown}{HK}=\overset{\frown}{HC}+\overset{\frown}{CK}$

$$=90°+90°-\overset{\frown}{BC}$$

$$=180°-a。$$

故 $\qquad a+A'=180°。$

同理 $\qquad b+B'=180°;$

$\qquad c+C'=180°。$

又 $\qquad a'=\overset{\frown}{B'C'},$

$$\widehat{B'C'}=\widehat{B'N}+\widehat{NC'}$$
$$=90°+90°-\widehat{MN}$$
$$=180°-A。$$

故 $$A+a'=180°。$$

同理 $$B+b'=180°;$$
$$C+c'=180°。$$

2.4 球面三角形的性质

a.球面三角形的边是大圜弧。

b.球面三角形的每一边必大于 0° 而小于 180°，三边的和必大于 0° 而小于360°。球面三角形的边是以它們所对的球心角来度量，对球面三角形的三边的球心角則構成以球心为頂点的三面角；由立体几何已知三面角的各平面角的和大于 0° 而小于 360°，故球面三角形三个边的和必大于 0° 而小于 360°。

c.球面三角形任一边必小于其它二边的和而大于其它二边的差。因三面角的任一平面角必小于其宅兩个平面角的和而大于宅的差。

d.球面三角形的每一角必大于 0° 而小于 180°，三个角的和必大于 180° 而小于 540°。其超出 180° 的部分叫作球面角盈，通常用 E 表示之。即

$$E=A+B+C-180°$$

已知球面三角形的三边的和大于 0° 而小于 360°，对于極綫三角形自亦

$$0°<a'+b'+c'<360°$$

但 $$a'+b'+c'=540°-(A+B+C),$$

故 $$180°<A+B+C<540°$$

e.球面三角形的角不等，則不等角所对的边亦不等，大角必对大边，反之，大边必对大角。

首先証明大角必对大边。設球面三角形 ABC，$B>C$(圖 7)。在 B 取 $\widehat{DBC}=C$，并使 $\widehat{BD}$ 交 $\widehat{AD}$ 于 D，于是 DBC 为球面等腰三角形，$\widehat{DB}=\widehat{DC}$。但 $\widehat{AD}+\widehat{DB}>\widehat{AB}$，代入得 $\widehat{AD}+\widehat{DC}>\widehat{AB}$，即 $\widehat{AC}>\widehat{AB}$。

現在再反証大边必对大角。設 $b>c$，則 $180°-B'>180°-C'$，或 $B'<C'$，由上面的証明得 $b'<c'$，或 $180°-B<180°-C$，即 $B>C$。

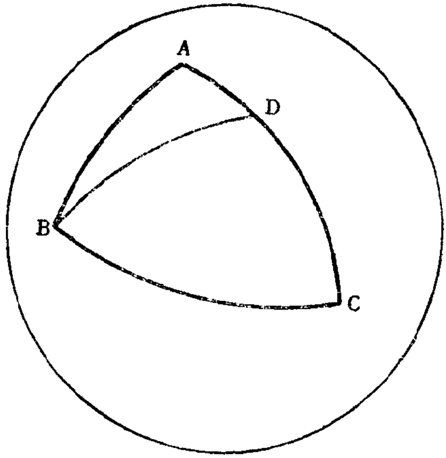

圖 7

§3. 球面三角形作圖

3.1 球面三角形作圖概念

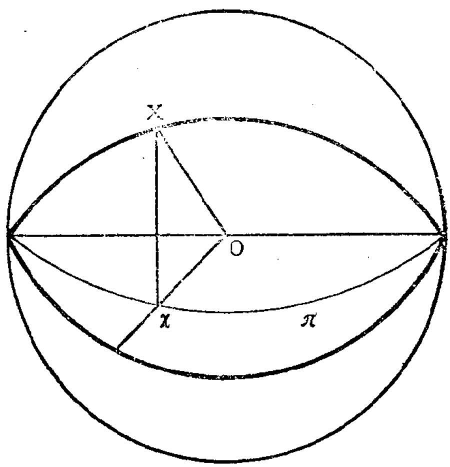

圖 8

球面三角形作圖，就其性質而論，是屬于透視投影；但由于作圖的目的，仅为在平面圖上画出球面三角形圖形，从而估計該三角形各要素間的关系，所以对于变形及精确度等問題，并不严格地計較。为了制圖簡便起見，一般是采用一种近似于正射投影作圖的理論及方法。由球面任意点 X 作 X_x 垂直到大圓平面 π，交 π 于 x，則 x 称为 X 在投影面 π 的正射投影(圖8)。当 X 在球面作弧形移动时，它的投影 x 亦在投影面作弧形移动，投影面上的弧形就是球面上弧形的投影。球面上圓弧的投影仍为弧形，只有圓弧的面与投影面成直角时，圓弧的投影成直綫。

3.2 基本作圖法

a. 已知圓的極的投影及極距，作圓的投影。

設圓的極的投影 P 在投影面圓周（圖 9），極距为 $\alpha°$。

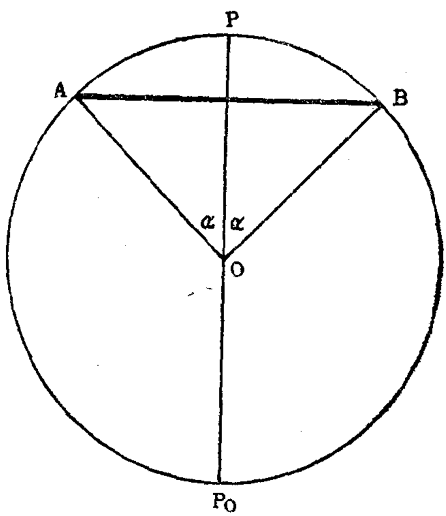

圖 9

(i)在投影面圓周取 A、B 二点，使 $P\widehat{O}A=P\widehat{O}B=\alpha°$；

(ii)連 AB，AB 为所求的圓投影。

設圓的極的投影 P 在投影面中心（圖 10）。

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com