高等学校理工科参考丛书

图论的例和反例

〔美〕 M．卡波边柯 J．莫鲁卓合著 聂祖安译

湖南科学技术出版社

图论的例和反例
M·卡波边柯
J·莫鲁卓 合著
聂祖安 译
责任编辑：陈一心
*
湖南科学技术出版社出版发行
（长沙市展览馆路3号）
湖南省新华书店经销 湖南省新华印刷二厂印刷
*
1988年4月第1版第1次印刷
开本：787×1092毫米 1/32 印张：8.125 字数：183,000
印数：1—4,100
ISBN 7—5357—0291—0
O·40 定价：2.00元
湘目 87—42

目　录

序言

我非常愉快而荣幸地应M. 卡波边柯(Mike Capobianco)和J. 莫鲁卓（John Molluzzo）的邀请，给这本富有想象力的、有价值的图论补充资料作序。因此，让我就图论目前的情况以及他们的著作对该领域作出了怎样的贡献来谈谈我的一点想法。

自从1736年L. 欧拉（Leonhard Euler）应用一种图论的论证来解决哥尼斯堡（Königsberg）七桥问题以来，图的理论走过了很长一段历程，最初，人们对图的兴趣以及有关图的结果来得很慢。到第一本图论专著写成时，两个世纪过去了。它的作者D. 哥尼科（Dénes König）把他的1936年的版本叫做“有限图和无限图的理论”（译自德文）。在从哥尼斯堡到哥尼科的著作这段时间内所得到的关于图的结果的确发展成了一种理论。在过去的几年里，图论已经发生了很多变化。图及图论在各种数学和非数学领域的应用丰富了这一年轻的学科。显然图论的充足潜能和利用只是刚刚开始被认识到。

在最初的200年内，图论的发展无法预示这个领域将要取得的惊人的进步。无庸置疑，许多早期的概念和定理（近期的也有一些）都受到了试图解决四色猜想的影响。无疑地，对由现在这个著名的定理所带来的“证明”的否定也给了图论的发展以有利的影响。然而，图论不再是主要讨论四色猜想或游戏

和难题的学科了，图论的发展已经导致了许多有意义的适用且有其自己的概念和定理的派生领域。就象对数学的任何其它领域一样，图论中的每个主要的定理都与一个例子或一类例子有关，这些例子说明了假设的必要、结果的显明或逆定理的错误。这时的例子当然是图。在很多情况下，这些图已经和定理本身一样著名。

让我提述本书中的图的一些类型的例子。作者从图论中最著名的小领域之一——着色——开始，给出了色数的各种各样的界，这些界中已知的最好的界的严格性用图给予了说明；画出了Heawood 的说明四色定理的 Kempe 的“证明”不对的有名反例；极值图论中给出了许多不容易构造的例子。对于每个已知的经典 Ramsey 数，在这里画出了相应的极图，其中包括对应于Ramsey 数$r(K_4,K_4)$的 17 阶图和对应于$r(K_3,K_3,K_3)$ 的16阶图。对于研究得较多的“笼”的一个极好描述也给出了。著名的 Peterson 图和 Heawood 图在这里也画出了。

用其顶点的度的术语来描述的Hamilton图的充分条件是大家熟知的。这些结果的相继加强的情况也用适当的例子给予了说明。从历史上来说，三次的、3-连通的、可平面的非Hamilton图的第一个例子是 Tutte 图。这个图与其它的最近发现的具有这些性质的图一并画出了。一个三次的，3-连通的、可平面的非可迹图给出了。构造了许多的 Hamilton 图。

我仅仅只是注意到了本书中出现的很少一部分例子。然而，就在这样一本书中将会发现作为例和反例出现在图论中的最有趣又最能增进知识的图。

C. 夏朗特(Cary Chartrand)

前 言

本书是图论中近500个例子的汇编，其目的是供研究人员、教师和学生作为参考；实际上它也可以作为图论课程和与此相关的课程的一个补充教材。鉴于图论近年来惊人的发展，我们感觉到这样一本书应该是合用的。

我们的例子有三个主要的来源：(1) 给一个定理的逆定理的反例；(2) 去掉定理中的部分假设条件所得到的例子；(3) 说明定理给出的界是否严厉的例子；还有其它的类型，它们不易于归类。因为许多例子与定理有关，本书含有图论中许多更重要的结果的主要原始资料，并附有能够找到证明出处和其它资料的参考书目。事实上，很多定理在这本书里也是第一次出现。

本书按图论中的主要论题来划分章节，这些章节一般是相互独立的。假定读者对于象在哈拉里 (Harary(1969))〔注①〕与贝扎特和夏朗特 (Behzard & Chartrand (1971)) 的书中可以找到的基本图论术语已经熟悉。然而，每个例子中所用的特殊术语或符号通常就在用它们之前给出了定义。如果定义在正文中没有，它可以在术语汇编或符号表中找到，还有一个广泛详尽的相互参照索引〔注②〕，它让使用者实际上以任何适当的中心

〔注①〕 哈拉里的《图论》有中译本（李慰萱译）——译者注。
〔注②〕 由于有术语汇编，故索引没有译出。——译者注。

词都能查阅到例子。完全的参考文献表也包括了。每章的例子都标有数字“c. e”，这里“c”是章数，“e”是该章内的例子数。如果涉及到一个定理，就先陈述它并标上“定理”。

（中间这段为致谢，从略。——译者）

写一本这样的书不可能期待完全无差错。任何错误当然都由我们负责，我们将最感谢给我们指出错误的读者。让大家知道：如果问到卡波边柯（莫鲁卓）某个例子，他的回答将是莫鲁卓（卡波边柯）“搞的那个例子”。

1977年于纽约斯堆腾岛

第一章 着　　色

1 引言

给一个图的元素着色有好几种方法。本章我们首先讨论点着色的各个方面，然后我们考虑线着色和全着色（即一个图的点和边两者的着色）。我们用几个关于一个图的消色数的例子来结束这一章。

2 点着色

一个图G的点着色，或简称着色，就是给图G中的点指定颜色使得没有两个相邻的点具有同一颜色。被指定同一颜色的点组成一个同色类。如果用了几种颜色，着色就称为G的一个n-着色。G的色数$\chi(G)$就是使G有一个n-着色的最小的n。如果$\chi(G)=n$，G是n-色的；如果$\chi(G)\leqslant n$ G是n-可着色的。

我们起初的一系列例子论及$\chi(G)$ 的界。回顾G的密度$\omega(G)$，它是G的一个最大团（极大完全子图）中的点数。

1.1定理　对任何图G，$\chi(G)\geqslant\omega(G)$。(Sachs 1970)

对严格的不等式，取$G=G_{2n+1}$，$n\geqslant 2$；对等式，取$G=K_p$。

事实上，已经知道对任何不含P_4作为导出子图的图等式都成立（Seinsche 1974）。

例1.1中的下界说明一个大团形成一个大色数。惊人的结果是存在具有任意大的色数的图，但它没有三角形。

1.2定理 对任意正整数n，存在不含三角形的n-色图G

我们给出属于J. Mycielski（1955）的一个构造。对$n=1$或2，取$G=K_n$。对$n\geqslant 2$，假设我们有一$\chi(G_n)=n$的图G_n，它不含三角形；设v_1，v_2，…，v_p是G_n的点，用增加$p+1$个新顶点v_1，v_2，…v_p形成G_{n+1}，对每个i，$1\leqslant i\leqslant p$，让u_i与u_{p+1}邻接并与所有与v_i邻接的点邻接。我们列出G_3和G_4。

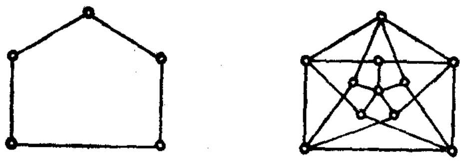


图1.2.1

可以看出用这种方法对任何整数n，m，$m\geqslant n\geqslant 2$均可构造$\chi=m$，$\omega=n$的图。它是否能生成最小的这样的图尚不知道。

注意Kelly和Kelly（1954）及Descartes（1954）说明了如何构造一个图，使它具有给定色数和大于5的围长（G中最短圈的长度）。L. Lovasz（1968）已经说明如何构造一个具有任意给定色数$n\geqslant 2$和围长$g\geqslant 2$的图。

$\delta(G)$和$\Delta(G)$分别用来表示G的顶点的最小度和最大度。

1.3定理 对任何连通图G，$\chi(G)\leqslant 1+\max\delta(G')$，这里最大数是对遍历$G$的导出子图$G'$来求的。

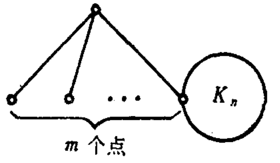
对等式，让$G=K_{1,n}$于是$\chi(G)=2$。对不等式，让$G=K_{n,n}$，$n>1$。因G是偶图，$\chi(G)=2$；而定理中的上界是$n+1$（Szekeres

和Wilf 1968)。

1.4定理 对任何G，$\chi(G)\leqslant 1+\Delta(G)$

若G是连通的，等式成立当且仅当G是完全图或奇圈(Brooks 1941)。

再要注意对任意n和m，$n\leqslant m+1$，存在图G其$\chi=n$且$\Delta=m$。若$n=m+1$，只要取K_n即可。若$n<m+1$，取下面所示的图：



下面的例是例1.4的扩充，它包括非连通图。

1.5定理 若$\Delta(G)=2$且G没有奇圈作为分支；或若$\Delta(G)\neq 2$且G没有$K_{\Delta+1}$作为分支，那么$\chi(G)\leqslant\Delta(G)$。

易见对任何整数n，m，$n\geqslant m\geqslant 2$，$\chi=m$，$\Delta=n$的图存在，只要取$G=K_m \cup K_{1,n}$。(Brooks 1941)。

下面的界用到术语ϵ，即G的邻接矩阵的最大特征值。

1.6定理 若G是连通的，那么$\chi(G)\leqslant 1+\epsilon$。

等式成立当且仅当G是完全图或奇圈。证明很长，从略。(Wilf 1967)。

下面的例子用G的点数p和边数q给出了G的色数的上界和下界。

1.7定理 对任何图G，

$$\frac{p^2}{p^2-2q}\leqslant\chi(G)\leqslant 1+\sqrt{\frac{2q(p-1)}{p}}$$

为了同时得到两个界，设$G=K_p$。这时它们都等于p。对两边的严格不等式，让$G=C_p$，$p\geqslant 5$。(Harary；Behzad和Chartrand 1971)。

回顾G的点独立数$\beta_0(G)$是G中两两不相邻的点的最大个数。

1.8定理 对任何G，$p/\beta_0\leqslant\chi(G)\leqslant p+1-\beta_0$。

为了同时得到两个界，让$G=K_p$；那么β_0是1且两个界都等于p。

对两边的严格的不等式，设$G=C_{2n}$，$n\geqslant 3$；那么$\beta_0=n$且$\chi=2$（Harary和Hedetniemi 1970）。

我们来比较上面两例中给出的上界，也比较下界，发现没有哪一个比另一个更好，即有图使例1.4的界更好一些，也有图使例1.8中的界更好一些。

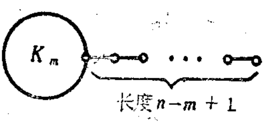
取$G=C_p$，这里p是偶数，例1.7中的上界变成$1+\sqrt{2(p-1)}$，例1.8中的上界变成$1+\frac{1}{2}p$。因此当$p\geqslant 8$时例1.7中的上界更好。但是，取$G=K_{1,p-1}$，我们看出例1.7中的上界是$1+(p-1\sqrt{2})/\sqrt{p}$而例1.8中的上界是2。因此对$p\geqslant 3$例1.8有更好的界。

再次取$G=C_p$，p是偶数 例1.7中的下界是$p/(p-2)$，例1.8中的下界是$\frac{1}{2}p$。因此对$p\geqslant 5$，例1.8的界更好。然而，取$C=K_{1,p-1}$，我们看出例1.7中的界是$p/(p-2+2/p)$，例1.8中的下界是$p/(p-1)$。因此对$p\geqslant 3$例1.7有更好的界。

1.9定理 若e是G中最长道路的长度，那么$\chi(G)\leqslant e+1$。

对严格不等式，让$G=K_{1,n}$，那么$e=2$且$\chi=2$。对等式，让$G=K_p$，那么$e=p-1$且$\chi=p$(Gallai 1968)。

事实上，对任何整数n，m，$2\leqslant m\leqslant n+1$，存在$\lambda(G)=m$且$e=n$的图$G$。取$G$是下面所示的图：



G的一个初等同态ϵ是将G的两个非相邻的点同化。

1.10定理 对任何图G和任何初等同态ϵ，$\chi(G)\leqslant\chi(\epsilon(G))$

$\leqslant 1+\chi(G)$。

两个界都能得到。对于下界，取 $G=K_{1,n}$，$n>1$。对于上界，让 $G=P_{2n}$且设ϵ将两个悬挂点同化（Harary, Hedeniemi和Prinz 1969)。

1.11定理 对任何图G，

(1) $2\sqrt{p}\leqslant\chi(G)+\chi(\overline{G})\leqslant p+1$

(2) $p\leqslant\chi(G)\chi(\overline{G})\leqslant((p+1)/2)^2$。

(1)中唯一能达到上界的图是K_p，$\overline{K}_p$和C_p (Fink 1966)。(1)中的下界能达到，例如取K_1或C_4。

(2)中能达到上界的图仅有K_1,K_2,$\overline{K}_2$和C_5 (Fink 1966)。下界能达到，如取K_p。

我们用两个例子来结束关于色数的界这一小节：一个是将$\chi(G)$与一个亏格是1的图的围长g联结起来的例子，另一个是将$\chi(G)$与G的任何置换图的色数联系起来的例子。

一个图G的亏格$\gamma(G)$，是指G能嵌入其中的一个面的最小亏格。为了定义G的一个置换图，设G的点标上$v_1,v_2,\cdots,v_p$且设α是p阶对称群中的任何置换。置换图$P_\alpha(G)$是G的两个摹本图连同所有的边$v_iv_{\alpha}(i)$，$1\leqslant i\leqslant p$，的并。

1.12定理 若$\gamma(G)=1$且G的围长为g，那么：当$g=3$时$\chi(G)\leqslant 7$；当$g=5$时$\chi(G)\leqslant 4$；当$g\geqslant 6$时$\chi(G)\leqslant 3$可能除$g=5$外，这些界都是严厉的。对$g=3$，取$G=K_7$。对$g=6$，取G为图1.12.1中的图，其中数字表示颜色(Kronk 1972)。

图1.12.2 中的图解显示了用一般方法表示的K_7在圆环面上的嵌入，其中矩形中相对的边视为重合。

K_7能嵌入圆环面的事实可从Heawood地图着色定理推出，这个定理断言能嵌入亏格为n的面的所有图中的最大色数是$(7+\sqrt{1+48n})/2$，对n>0 (Ringel和 Youngs 1968)。既然四色

猜想已经确定（Appel和 Haken 1976），我们可以把 $n>0$改成 $n\geq 0$。

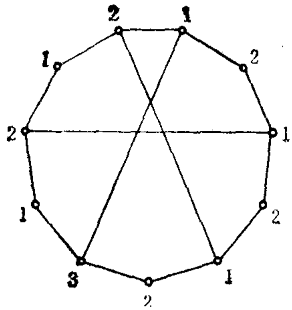


图1.12.1

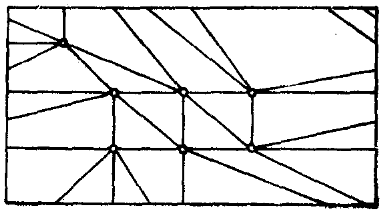


图1.12.2

用于解决四色问题的方法可追溯到kempe（1879），他认为他用下面的方法已经证明了猜想，即用"证明"：如果一个顶点v与五个其它用四种颜色着色的点邻接，那么总能多出诸颜色之一用来给v着色。他用了邻接点交错着色的道路（尽管在他的原始论文中一切都是用地图的术语来说明的），交换这些道路上的颜色便于空出一种颜色给v. Heawood 的图1.12.3 中的反例（Heawood 1890；Saaty 1972）说明Kempe的过程并非总是对的。用字母b,r,y,g来表示四种颜色。一条从v_1到v_n的其点交错地着有颜色r和g的道路称为一条从v_1到v_n的r-g链。

有一条从2到4的b-g链，也有一条从2到5的b-y链，因此在任一条链上交换颜色都不能空出一种颜色给v。没有从1到4的r-g链，因此可以沿r-g链从1开始交换r和g(括号中的颜色)。但这空不出r给v，因为与v相邻的3也是着色r。显然这可以变到一个y。但如果我们试图这样从3开始沿r-y链交换y和r，那么6和7都变成r。这样就可能使得即使每次交换移动一r，但仍不能同时

移去两个r。

注意如果$\gamma(G)=0$（即G是可平面的），那么有$\chi(G)\leqslant 4$。因此若G有奇围长，则$\chi(G)=3$或4。对前者取 C_{2n+1}，对后者取W_{2n+1}。若G有偶围长，那么$\chi(G)$可以是2,3或4。分别取C_{2n}，$C_{2n}\cup C_{2n+1}$和Mycielski图G_4（见例1.2）。

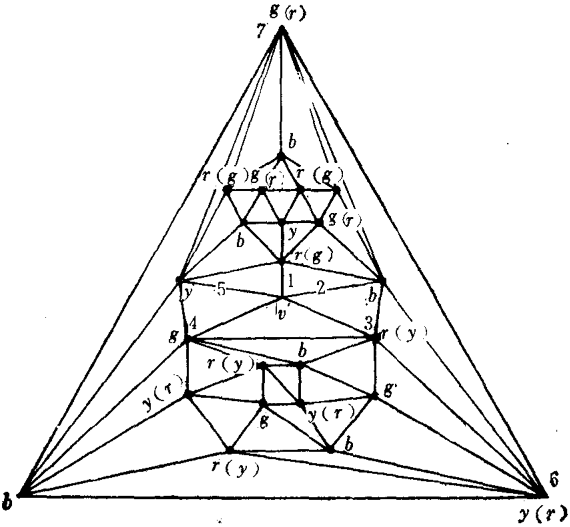


图1.12.3

1.13定理 对一个图G和G的任一置换图 $P_\alpha(G)$，

$$\chi(G)\leqslant\chi(P_\alpha(G))\leqslant\left\{\frac{4}{3}\chi(G)\right\}。$$

界可以达到。对下界，取$G=K_2$和恒等置换。那么$\chi(G)=\chi(P_\alpha(G))=2$。

对上界，取$G=G_4$，$\alpha=(12)(3)(4)$。那么$x(G)=2$且$x(P_\alpha(G))=3$，如下所示。（Chartrand和Frechen 1969）。

对于色数是临界的图已被广泛用来研究图着色。一个图是χ-临界的〔χ-极小的〕，如果对G的任何点v（线e），$\chi(G-v)<\chi(G)$〔$\chi(G-e)<\chi(G)$〕。如果$x(G)=n$且G是χ-临界的（χ-极小的），那么G说成是n-χ-临界的（n-χ-极小的）。1-χ-临界图仅有K_1；2-χ-临界图（忽略孤立点）和2-χ-极小图皆仅有K_2；3-χ-临界图（忽略孤立点）和3-χ-极小图仅有奇圈。例1.2的图G_4是4-χ-临界的。到本书写作时对$n\geq 4$的n-χ-临界的或n-χ-极小的图的特征尚不知道。

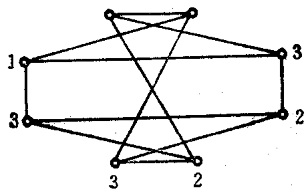
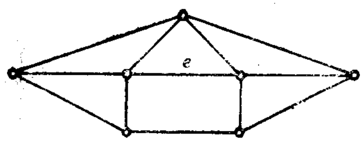


图1.13.1



1.14定理 每一个连通的χ-极小图是χ-临界的。

其逆不真。下面的图是χ-临界的但不是χ-极小的，因为$\chi(G)=\chi(G-e)=4$(Harary 1969)

1.15定理 若G是n-χ-临界的，$n>1$，那么G是$(n-1)$-线连通的。

其逆不真。设$G=K_1+2K_{n-1}$。那么$\lambda=n-1$，$\chi=n$，但G不是n-χ-临界的(Dirac 1952)。

1.16定理 如果G是连通的且是n-χ-极小的，$n>1$，那么G是$(n-1)$-线连通的。

其逆不真：用例1.15中同一例子(Dirac 1952)。

1.17定理 如果G是n-χ-临界的，或者如果G是连通的且是n-χ-极小的，那么$\delta(G)\geq n-1$。