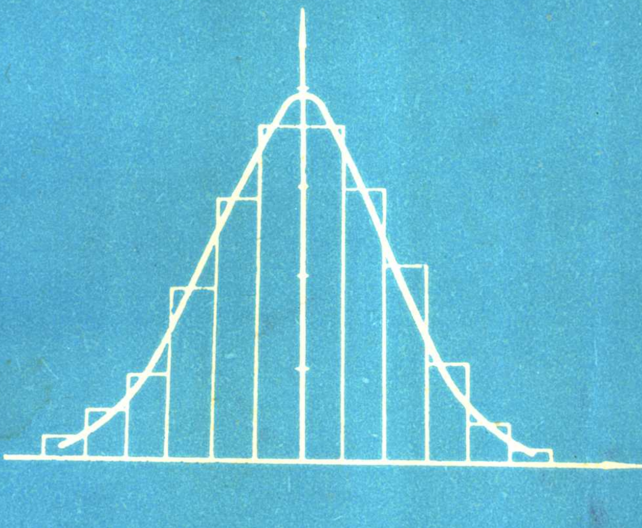
报考硕士研究生
高等数学函授教材

第一册　一元微积分

许义生　杨守昌　黄文綱　林家寿



安徽大学数学系函授部

一九八四年十一月

前　言

一年一度的硕士研究生入学考试，鼓舞着大批青年向科学进军。在招收理、工、经济、农、林等科研究生时，高等数学是重要考试科目，为此，我们编写了这套复习资料，以适应考生的需要。这套资料的特点是：根据收集到的近几年来几百套研究生入学试题的深度和广度，从几十本参考书中精选了一部分题目进行精解。我们的目的是，使读者在原有复习的基础上，通过对本教材的学习，能在短时间内快速提高所学知识，尽多掌握一些有价值的解题方法和技巧，以便见多识广，达到能解出各套研究生试题的水平。**这套教材是为提高复习用的。也可供报考数学专业研究生的考生参考。**

教材中有一部分题目看起来较简单，但解题方法往往被读者忽视。有一大部分题目是针对研究生试题中稍难题目编写的，读者经常见到而又较熟悉的题目则选得很少，有时只是为了说明一种重要解题方法，或指出有些应注意的地方，或多次被各校选为考题等才被我们选入。前四册中各题，除极个别题外，均未超出研究生考题范围。书后附有部分单位研究生试题中题目的题号，一是便于读者复习时掌握深度，二是证明本教材的深度与研究生试题深度一致。

本丛书中已付印的前四册是：第一册《一元微积分》，第二册《级数·多元微积分》，第三册《线性代数》，第四册《微分方程》。1985年《研究生入学试题汇集》（含1984年试题）作为专集（分两册）列在后。

我们编写本套教材时，采用精选精解的方针，力求作到篇幅少、内容多、化费少、收益大。本套教材中没有内容提要之类的赘述，全部是题解，分类编排。我们对难题均给出详解；对有些题只给提示和解题过程，预计读者能够据此作出详解。排版时也尽量排得拥挤些，以减少篇幅，降低成本，减轻读者负担。为了减少不必要的重复，对《研究生入学试题集》中某些题目，只要是前四册中的题目，就只指出在前四册中的出处而不再给解。

如无特殊情况，我部函授教学在近几年内将持续进行。每年都根据新的研究生考题及新的参考资料，修改增订各册教材，以适应形势发展的需要。凡欲参加者均能满足要求，并供应本丛书。

我们在编写这套教材的过程中，一直得到读者的热情支持，许多读者来函提出很多可取的建议，正是这些建议促使我们多次变动函授计划。在此，对广大读者的支持表示衷心地感谢。

尽管我们在编写过程中，始终坚持质量第一、信誉至上的原则，但由于我们水平有限，谬误定然存在，万望读者不吝指正。

安徽大学数学系函授部

（地址：合肥市）

一九八四年十一月

常用符号説明

$f(a^-)$	$f(a^-)=\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$
$f(a^+)$	$f(a^+)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$
$f'(a^-)$	$f'(a^-)=\lim\limits_{x\to a-0} f'(x)$
$f'(a^+)$	$f'(a^+)=\lim\limits_{x\to a+0} f'(x)$
$f'_-(a)$	$f'_-(a)=\lim\limits_{h\to 0-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
$f'_+(a)$	$f'_+(a)=\lim\limits_{h\to 0+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$
当$x\to a$时 $\varphi(x)=o(\psi(x))$	$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}=0$
当$x\to a$时 $\varphi(x)=O(\psi(x))$	$\left\|\dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)}\right\|\leqslant k \quad (0\leqslant k<+\infty)$
莱布尼兹公式	$(u\cdot v)^{(n)}=C_n^0u^{(n)}v+C_n^1u^{(n-1)}v'+\cdots+C_n^{n-1}u'v^{(n-1)}+C_n^nuv^{(n)}$
$(2m)!!$	$(2m)!!=(2m)(2m-2)\cdots4\cdot2$
$(2m-1)!!$	$(2m-1)!!=(2m-1)(2m-3)\cdots3\cdot1$
$\mathrm{sgn}x$	$\mathrm{sgn}x=\begin{cases}-1, & x<0\\ 0, & x=0\\ 1, & x>0\end{cases}$

目　录

一　一元微积分定理的证明

以下1—21题的证明见教本。

1　证明：收敛数列$\{x_n\}$只有一个极限。

2　证明：收敛数列$\{x_n\}$是有界的。

3　证明：使$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$成立的充要条件是：

$$f(x_0+0)=f(x_0-0)=A.$$

4　证明：在同一变化过程中，1)如果$f(x)$为无穷大，则$1/f(x)$为无穷小；2)如果$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$1/f(x)$为无穷大。

5　证明：具有极限的函数，等于其极限值与一个无穷小的和.反之，如果函数可表为常数与无穷小的和，则该常数就是函数的极限。

6　证明：极限不为零的函数除无穷小量所得的商仍是无穷小量。

7　证明：如果$\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$，且$A\neq 0$，则在$a$的某一邻域内$(x\neq a)$，$f(x)$与$A$同号.（通常称为同号定理）.

8　证明：若 (1)$y_n\leqslant x_n\leqslant z_n(n=1,2,\cdots)$，(2)$\lim\limits_{n\to\infty} y_n=\lim\limits_{n\to\infty} z_n=a$，证明：$\{x_n\}$的极限存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$。

9　证明：数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right\}$极限存在，且极限值介于2与3之间。

10　证明连续函数的复合函数也是连续函数。

11　证明：严格增加（或减少）的连续函数的反函数，也是严格增加（或减少）的连续函数。

12　叙述和证明洛尔定理，并阐述其几何意义。

13　叙述和证明拉格朗日定理，并阐述其几何意义。

14　叙述和证明柯西中值定理。

15　叙述并证明，当$x \to a+0$时，用于计算$\frac{0}{0}$型函数极限的洛必达法则。

16　叙述并证明泰勒定理。

17　叙述和证明积分中值定理，并阐述其几何意义。

18　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，证明：对$[a,b]$上任意一点x，函数$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$的导数存在，且$\Phi'(x)=f(x)$。

19　证明：在区间$[a,b]$上连续的函数$f(x)$，其原函数一定存在。

20　设$f(x)$在$[a,b]$上连续，$F(x)$是$f(x)$的任一原函数，证明：$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$。

21　若$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，通过具有连续导数的单调函数$x=\varphi(t)$，使两个区间：$a\leqslant x\leqslant b$，$\alpha\leqslant t\leqslant\beta$上的点成一一对应，又$a=\varphi(\alpha)$，$b=\varphi(\beta)$。证明：定积分可通过函数关系$x=\varphi(t)$变换为

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

二　函数与不等式

22　求函数$y=(-1)^x$的定义域。

【$x=p/(2q+1)$，p，q是整数.(p与$2q+1$互质)。

23　求函数$y=(2x)!$的定义域。

【$2x=n$，$x=\frac{1}{2}n$，$(n=1,2,3,\cdots)$。

24　下列函数是否恒等，为什么？

(1)$f(x)=x/x$，$\varphi(x)=1$；(2)$f(x)=x,\varphi(x)=\sqrt{x^2}$。

【(1)不恒等.因$f(0)$无意义，$\varphi(0)=1$。(2)不恒等.因$x<0$时$\varphi(x)=-x$，$f(x)=x$。

25　已知$f(\sin\frac{1}{2}x)=\cos x+1$，求$f(\cos\frac{1}{2}x)$。

【　$f(\sin\frac{1}{2}x)=2-2\sin^2\frac{1}{2}x$，　　$f(x)=2-2x^2$，$f(\cos\frac{1}{2}x)=2-2\cos^2\frac{1}{2}x=1-\cos x$。

26　设 $f\left(x+\frac{1}{x}\right)=x^2+\frac{1}{x^2}$，求$f(x)$。

【令$t=x+1/x$，则$x^2+1/x^2=t^2-2$，所以$f(x)=x^2-2$。

27　若 $z=\sqrt{y}+f(\sqrt[3]{x}-1)$，并且已知当$y=1$时$z=x$，求函数$f(x)$的解析表达式。

【　将条件 $y=1$时　$z=x$　代入题中式子可得，$x-1=f(\sqrt[3]{x}-1)$，令$\sqrt[3]{x}-1=t$，注意此时$x=(1+t)^3$得$f(t)=(1+t^3)-1=t^3+3t^2+3t$,所以$f(x)=x^3+3x^2+3x$。

28　设$f_n(x)=f\{f[\cdots(f(x))]\}$，其中经过n次复合，若$f(x)=x/\sqrt{1+x^2}$，求$f_n(x)$。

【 $f[f(x)]=x/\sqrt{1+2x^2}$，用数学归纳法可证，一般有 $f_n(x)=x/\sqrt{1+nx^2}$。

29 设 $f(x)+f\left(\frac{x-1}{x}\right)=2x$，$x\neq0,1$，求$f(x)$。

【令$\frac{x-1}{x}=t$，则$x=\frac{1}{1-t}$，得$f\left(\frac{1}{1-t}\right)+f(t)=$ $=\frac{2}{1-t}$。再令$t=\frac{1}{1-u}$，则$\frac{1}{1-t}=\frac{u-1}{u}$，得 $f\left(\frac{u-1}{u}\right)+f\left(\frac{1}{1-u}\right)=2-\frac{2}{u}$。把后两个函数等式中变量全换成x，前两式相加减去第三式得 $f(x)=x+\frac{1}{1-x}+\frac{1}{x}-1$。

30 求 $y=\mathrm{sh}x$，$(-\infty<x<\infty)$ 的反函数及其定义域。

【$\mathrm{sh}x=\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})$，令$e^x=t$，得$t=y\pm\sqrt{y^2+1}$，舍去负号值得 $x=\varphi(y)=\mathrm{arsh}y=\ln(y+\sqrt{y^2+1})$，$(-\infty<y<\infty)$。

31 找出函数 $y=\frac{ax+b}{cx+d}(ac-bd\neq0)$的反函数就是其本身的条件。

【反函数为 $x=\frac{-dy+b}{cy-a}$，令$\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{ax+b}{cx+d}$，去分母且比较系数得， $(a+b)c=0$， $(a+b)(a-d)=0$，$(a+d)b=0$。所以必须(1)$a+d=0$， 由题设知，此时应有$a\neq0$。或(2)$c=0$，$a-d=0$，$b=0$同时成立，此时与题设不符，函数为$y=x$。

32 设$f(x)$在$(-\infty,\infty)$上是奇函数，$f(1)=a$，且对于任何x值有 $f(x+2)-f(x)=f(2)$。 (1)试用a表示$f(2)$与$f(5)$；(2)问a取何值时，$f(x)$是以2为周期的周期函数。

【(1)令$x=-1$，因$f(x)$为奇函数，得 $f(1)-f(-1)=f(2)$，$f(2)=2f(1)=2a$。再令$x=1$得 $f(3)-f(1)=f(2)$，由此得$f(3)=3a$；再令$x=3$得$f(5)-f(3)=f(2)$，由此得$f(5)=5a$。(2)由$f(x+2)-f(x)=f(2)=2a$得，当且仅当$a=0$时才有$f(x+2)=f(x)$，即当且仅当$a=0$时，$f(x)$是以2为周期的周期函数。

33 证明：对于迪里赫来函数 $\chi(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数}\\0, & x\text{为无理数}\end{cases}$，任何有理数皆为其周期，从而无最小正周期。

【设r为一有理数，则$x+r$与x同时为有理数或无理数，故$\chi(x+r)=\chi(x)$，即r为周期。但无最小正有理数。

34 证明：(1)两个偶函数的乘积是偶函数，两个奇函数的乘积是偶函数，偶函数与奇函数的乘积是奇函数。(2)两个偶函数的和是偶函数，两个奇函数的和是奇函数。(3)奇函数与偶函数的和可能是奇函数，可能是偶函数，也可能是非奇非偶函数。

【设$f(x)$是偶函数，$g(x)$是奇函数。(1)$f_1(-x)\cdot f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)$，$f(-x)g(-x)=f(x)[-g(x)]=-f(x)g(x)$，$g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]=g_1(x)g_2(x)$。(2)证略。(3)若$\varphi(x)$既是奇函数，又是偶函数，则有 $\varphi(-x)=\varphi(x)$，$\varphi(-x)=-\varphi(x)$，从而$\varphi(x)=-\varphi(x)$，则$\varphi(x)\equiv0$。利用这一特殊的既奇又偶的函数可得前两个结论。取$f(x)=x^2$，$g(x)=x$可得第三个结论。

35 证明：定义在对称区间$(-L,L)$内的任何函数$f(x)$，必可以表成偶函数$\varphi(x)$与奇函数$\psi(x)$之和的形式，且这种表示法是唯一的。

【令$\varphi(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi(x)=\frac{1}{2}[f(x)-$
$-f(-x)]$，即得$f(x)=\varphi(x)+\psi(x)$。另设$f(x)=\varphi_1(x)+$
$+\psi_1(x)$，其中$\varphi_1(x)$是偶函数，$\psi_1(x)$是奇函数。以$-x$代x得$f(-x)=\varphi_1(-x)+\psi_1(-x)=\varphi_1(x)-\psi_1(x)$。两式联立解得$\varphi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$，$\psi_1(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$，故表示法唯一。

36 证明：若对于函数$f(x)(-\infty<x<+\infty)$，有等式$f(x+T)=Kf(x)$成立（式中K和T为正的常数），则$f(x)=a^x\varphi(x)$（式中a为常数，而$\varphi(x)$是以T为周期的函数）。

【由$f(x+T)=Kf(x)$得$f(x+2T)=Kf(x+T)$，取$K=a^T(a>0)$，则 $f(x)=\dfrac{f(x+T)}{a^T}=a^x\dfrac{f(x+T)}{a^{x+T}}$。取

$\varphi(x)=\dfrac{f(x+T)}{a^{x+T}}$，这时$f(x)=a^x\varphi(x)$，而$\varphi(x+T)=$

$$=\frac{f(x+2T)}{a^{x+2T}}=\frac{Kf(x+T)}{a^{x+2T}}=\frac{a^Tf(x+T)}{a^{x+2T}}=\frac{f(x+T)}{a^{x+T}}=$$

$=\varphi(x)$，即$\varphi(x)$是以T为周期的函数。

37 证明不等式

$$\frac{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\cdots\cdot(2n)}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

【用数学归纳法。$n=1$显然成立。设$n=k$时成立，则当$n=k+1$时，

$$左边<\frac{1}{\sqrt{2k+1}}\cdot\frac{2k+1}{2k+2}=\sqrt{\frac{(2k+1)(2k+3)}{(2k+2)^2}}\cdot$$
$$\cdot\frac{1}{\sqrt{2k+3}}<\frac{1}{\sqrt{2k+3}}$$

其中$(2k+1)(2k+3)=4k^2+8k+3<(2k+2)^2$。

38 证明柯西不等式

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

其中当且仅当a_i与b_i成比例时等号成立。

【对于任意实数λ，有$f(\lambda)=(a_1-\lambda b_1)^2+\cdots+(a_n-\lambda b_n)^2\geqslant0$。$f(\lambda)=(a_1^2+\cdots+a_n^2)-2\lambda(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)+\lambda^2(b_1^2+\cdots+b_n^2)$是关于$\lambda$的二次三项式，其系数判别式必不大于零，因此得

$$(a_1b_1+\cdots+a_nb_n)^2\leqslant(a_1^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+\cdots+b_n^2)$$

显然等号当且仅当对所有i均有$a_i-\lambda b_i=0$时，即$a_1/b_1=\cdots=a_n/b_n$时才成立。

三　极限的定义和性质

求极限的主要方法：

(1)由极限定义及极限运算法则直接求极限；

(2)通过式子变形后求极限；

(3)用连续函数直接代入法；

(4)用夹挤定理；

(5)利用两个重要极限；

(6)用洛必达法则；

(7)用泰勒展式（麦克劳林展式）；

(8)用单调有界数列必有极限定理；

(9)化为求函数极限问题求数列极限；

(10)用等价无穷小代换；

(11)用无穷小与有界量乘积仍为无穷小定理；

(12)用微分中值定理；

(13)用定积分定义；

(14)用定积分中值定理；

(15)用级数收敛的必要条件；

(16)利用通项递推公式递推后求极限；

(17)利用重要不等式；

(18)利用已知极限。

39 用分析定义证明：(1) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}=0$；

(2) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$；(3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+x}{x+1}=\infty$；

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+1}{2x+1}=\dfrac{3}{2}$；　(5) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2+4x+6)=18$。

【(1)限取$|x-1|<1$，即$0<x<2$，则$|x-2|<2$，$|x-3|>1$，有$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|=\dfrac{|x-2||x-1|}{|x-3|}<2|x-1|$。对任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\min(1,\frac{1}{2}\varepsilon)$，当$0<|x-1|<\delta$时，$\left|\dfrac{(x-2)(x-1)}{x-3}-0\right|<\varepsilon$。(2)对任给$M>0$，要使$\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|=\dfrac{x}{|x+3||x-3|}>M$，暂取$|x-3|<1$，则$5<x+3<7$，从而$\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|>\dfrac{2}{7|x-3|}$。取$\delta=\min\left(1,\dfrac{2}{7M}\right)$，则当$0<|x-3|<\delta$时，$\left|\dfrac{x}{x^2-9}\right|>M$，即$\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x}{x^2-9}=\infty$。(3)对任给$M>1$，当$|x|>1$时，要使$\left|\dfrac{x^2+x}{x+1}\right|=\dfrac{|x||x+1|}{|x+1|}=|x|>M$，可取$E=M$，当$|x|>$

E时，就有$\left|\frac{x^2+x}{x+1}\right|>M$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+x}{x+1}=\infty$。(4)对任给$\varepsilon>0$，为使$\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|=\frac{1}{2|2x+1|}<\frac{1}{2(2|x|-1)}<$ $<\varepsilon$，($|x|>\frac{1}{2}$)，只需$2|x|-1>\frac{1}{2\varepsilon}$，$|x|>\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$。取$M=\frac{1}{4\varepsilon}+\frac{1}{2}$，当$|x|>M$时就有$\left|\frac{3x+1}{2x+1}-\frac{3}{2}\right|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+1}{2x+1}=\frac{3}{2}$。(5)对任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\min\left(2,\ \frac{\varepsilon}{10}\right)$，当$|x-2|<\delta$时，由$|x-2|<2$得$0<x<4$，即$2<x+2<6$，从而$|x^2-4x+6-18|\leqslant|x^2-4|+|4x-8|=(|x+2|+4)\cdot$ $\cdot|x-2|<10|x-2|<\varepsilon$，最后一步用到$|x-2|<\varepsilon/10$，即有$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+4x+6)=18$。

40 若$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=a$，$\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k+1}=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

【对任给$\varepsilon>0$，存在正整数N_1，当$k\geqslant N_1$时$|x_{2k}-a|<\varepsilon$成立；又存在正整数N_2，当$k\geqslant N_2$时$|x_{2k+1}-a|<\varepsilon$成立。取$N=\max\{2N_1,2N_2\}$，当$n>N$时，$|x_n-a|<\varepsilon$总成立。

41 设$a>0$，证明$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。

【(1)$a=1$时显然。(2)设$a>1$。对任给$\varepsilon>0$，令$\lambda=\sqrt[n]{a}-1(>0)$，则$a=(1+\lambda)^n=1+n\lambda+\frac{1}{2}n(n-1)\lambda^2+\cdots+\lambda^n>n\lambda$，故有$\lambda=\sqrt[n]{a}-1<(a-1)/n$。取正整数$N\geqslant(a-1)/\varepsilon$，当$n>N$时就有$\sqrt[n]{a}-1=(a-1)/n<\varepsilon$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$。(3)设$0<a<1$。令$b=1/a$，则$b>1$，

由(2)中结果可得 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1/b}=1/\lim\sqrt[n]{b}=1$。

(4)当 $a>1$ 时可另解为，取正整数 $N>\ln a/\ln(1+\varepsilon)$，当 $n>N$ 时有 $\sqrt[n]{a}<1+\varepsilon$，显然 $\sqrt[n]{a}>1-\varepsilon$，所以 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$。

42 按定义证明数列 $s_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 是无穷大量

【$s_1=1$，$s_2=1+\frac{1}{2}$，$s_4=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1+\frac{1}{2}\cdot2$，$s_8=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>1+\frac{1}{2}+(\frac{1}{4}+\frac{1}{4})+(\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8})=1+\frac{1}{2}\cdot3,\cdots$，用数学归纳法可证明 $s_{2^k}>1+\frac{1}{2}\cdot k$。对任给 $M>0$，取 $N=4^{M-1}$，当 $n>N$ 时就有 $s_n>M$。

43 证明：若单调数列的某一子列收敛，则此单调数列本身是收敛的。

【子列定义：若在数列 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 中，自左往右任意选取无穷多个项，如 $x_3,x_8,x_{100},\cdots$，这种数列称为 $\{x_n\}$ 的子列。子列一般记作 $\{x_{n_k}\}$。

设 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{n_k}=a$，a有限，且设 $\{x_n\}$ 单增。则对任给 $\varepsilon>0$，存在正整数t，当 $k>t$ 时有 $|x_{n_k}-a|<\varepsilon$，即 $a-\varepsilon<x_{n_k}<$ $<a+\varepsilon$。取 $N=n_{t+1}$，一方面，当 $n>N$ 时有：$x_n\geqslant x_{n_{t+1}}>$ $>a-\varepsilon$；另一方面，可找到 $u>t$，使 $n_u>n$，得 $x_n\leqslant x_{n_u}<$ $<a+\varepsilon$。合起来得，当 $n>N$ 时有 $|x_n-a|<\varepsilon$。当 $\{x_n\}$ 单减时证法类似。

44 设在 $1\leqslant x<+\infty$ 时，$0<f'(x)<1/x^2$，证明 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在。

【由$f'(x)>0$得$f(x)$单增。又 $0<\int_1^x f'(x)\,dx<$ $<\int_1^x \frac{1}{x^2}dx$，$0<f(x)-f(1)<-1/x+1$，$f(1)<f(x)<$ $<-1/x+1+f(1)<f(1)+1$，知$f(x)$在$[1,\infty)$上有上界，故得证。

45 对每个自然数k，均有自然数N_k，且当$n>N_k$时有$|a_n-a|<1/k$，问是否有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$？

【$\lim\limits_{x\to\infty}a_n=a$成立。因对任给$\varepsilon>0$，可以找到自然数$k$，使$1/k<\varepsilon$，由题设存在$N_k$，当$n>N_k$时有$|a_n-a|<1/k<\varepsilon$，即得证。

46 若$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$，$\{x_n\}$是一点列，$x_n\to a(x_n\neq a)$则$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=A$。

【对任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，当 $0<|x-a|<\delta$ 时，$|f(x)-A|<\varepsilon$，由于$x_n\to a(x_n\neq a)$，存在N，当$n>N$时，$0<|x_n-a|<\delta$，从而有$|f(x_n)-A|<\varepsilon$，即有 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=$ $=A$。

注： 利用此题结论，可把求某些数列极限化归求函数极限问题。

47 设$x_n\to a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}/x_n$ 是什么？

【当$a\neq0$时，$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}/x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}/\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a/a=1$。若 $a=0$，则不定。例如设$x_n=1/n$，$y_n=(-1)^n$，$z_n=q^n$，$(|q|<$ $<1)$，$t_n=(-1)^{[n/2]}1/n$，则极限分别为 1，-1，q，不存在。其中$[x]$表示不超过x的整数部分。

48 用《$\varepsilon-\delta$》语言，在肯定的意义上表述$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$。

【存在某个$\varepsilon>0$，无论N多么大，都可以找到一个 $n>$ $>N$，使$|x_n-a|>\varepsilon$。

49 若$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$，试证存在$\varepsilon>0$，有无穷多个$x_n$使 $|x_n-a|>\varepsilon$。

【若$\lim x_n\neq a$，则存在某个$\varepsilon>0$，不论N有多么大，总可找到$n>N$使$|x_n-a|>\varepsilon$。首先取$N=1$，可找到$n_1>N=$ $=1$，使$|x_{n1}-a|>\varepsilon$；再取$N=n_1$，可找到$n_2>N=n_1$，使 $x_{n2}-a|>\varepsilon$；一般找到n_k使$|x_{nk}-a|>\varepsilon$后，再取$N=n_k$，则可找到$n_{k+1}>N=n_k$，使$|x_{n_{k+1}}-a|>\varepsilon$。于是得无穷多个$x_{n1}$，$x_{n2}$，…，$x_{nk}$，…，使$|x_{nk}-a|>\varepsilon$。

50 设$f(x)$在$[a, b]$上定义且严格单调，若 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$，$(a\leqslant x_n\leqslant b)$，试证$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

【用反证法。设$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\neq a$，由49题知，存在某$\delta>0$，有无穷多个$x_n$使$|x_n-a|>\delta$，不妨设有无穷多个$x_n$满足$x_n>a+\delta$。也不妨设$f(x)$在$[a,b]$上单增，从而对这无穷多个$x_n$有

$$f(x_n)>f(a+\delta) \qquad (*)$$

又由$\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=f(a)$得，取$\varepsilon=\frac{1}{2}[f(a+\delta)-f(a)]$，存在N，当$n>N$时有$|f(x_n)-f(a)|<\varepsilon$，于是

$$f(x_n)<f(a)+\varepsilon=f(a)+\frac{1}{2}[f(a+\delta)-f(a)]<f(a+\delta)$$

这显然与$(*)$式矛盾。

51 若$\{x_n\}$无界，则必有一子列$x_{nk}\to\infty(k\to\infty)$。

【由$\{x_n\}$无界知，对任给$M>0$，无论N多么大，总有$n>N$，使$|x_n|>M$。对于数1，存在$|x_{n1}|>1$；对于数2，