卫星大地测量学原理

〔捷〕M. 布尔莎 著

武汉测绘学院

一九八〇年十二月

卫 星 大 地 测 量 学 原 理

（原名宇宙大地测量学原理）

— 动力卫星大地测量学原理 —

ZÁKLADY KOSMICKÉ GEODÉZIE

(ОСНОВЫ КОСМИЧЕСКОИ ГЕОДЕЗИЯ)

〔捷〕M. 布尔莎 (M. BURŠA) 著

管泽霖　宁津生　译

武汉测绘学院

1980年武汉

说　　明

《卫星大地测量学原理》共分上下两册，上册是叙述几何卫星大地测量问题，译稿已由国家测绘总局测绘研究所於 1976 年铅印，内部发行。本书为下册，是 1975 年的俄译本，主要是叙述动力卫星大地测量问题，它阐述了地球外部空间的重力位及有关的球函数理论，并详细地推导了卫星轨道摄动的拉格朗日方程，以及根据摄动观测确定地球的动力常数。最后还讨论了根据已知的动力常数解算动力卫星大地测量的一些具体问题，如大地水准面形状，在地球外部空间及大地水准面上的重力分布，大地参考系的参数等。

本书在叙述问题时，比较系统和完整，导出了便於实际计算的公式，并列出许多有关的数据和图表，供应用时参考。全书的叙述方法较适合於大地测量工作者阅读。

由於译者水平有限，译本中若有错误之处，请予批评指正。

译　　者

1980 年 5 月

目　录

符 号 说 明

a——卫星轨道的长半轴

$\overline{a}$——总的地球椭球体长半轴

a°——水准椭球体长半轴

a_r——参考椭球体长半轴

$a,b,c,$——在 x,y,z 坐标系中的方向余弦

$a_i,b_i,c_i,$——外部水准面的外法线方向余弦

a_e,b_e,c_e——椭球面外法线方向余弦

$a_n^{(k)},b_n^{(k)}$——椭球体向径球函数级数的展开系数

A——相对于 X 轴的地球体惯性矩

$\overline{A}$——大地方位角

A,B,C——在 X,Y,Z 坐标系中的方向余弦

$A_n^{(k)},B_n^{(k)}$——大地水准面向径球函数级数的展开系数

B——大地纬度

B——相对于 y 轴的地球体惯性矩

$\overline{B}$——在水准椭球体上的大地纬度

C——相对于 Z 轴的地球惯性矩

dm——地球质元

$d\tau$——相应于质元的体元

D——相对于 x 轴的地球体离心力矩

e——卫星轨道偏心率

e——水准椭球体偏心率

$\overline{e}$——总的地球椭球体偏心率

e_r——参考椭球体（旋转椭球）偏心率

$e_i(i=1,2\cdots6)$——轨道要素总的符号

e_1——赤道椭圆偏心率

E——偏近地点角

E——相对于 y 轴的地球体离心力矩

E_r——参考椭球体

E_k——卫星动能

E,F,G——第一平方形式的高斯基本系数

f——引力常数

F——力

F——相对于 z 轴的地球体离心力矩

F_x,F_y,F_z——在 x,y,z 轴的方向上力的分量

g——重力加速度

$g_n^{(k)},h_n^{(k)}$——在给定面上重力加速度球函数级数的展开系数

H——距椭球体的大地高（$H=Hg+\zeta g$）

H_g——正常高

i——卫星轨道面相对于赤道面的倾角

J——水准面的平均曲率

J_e——椭球体的平均曲率

$J_n^{(k)}$——在引力位展开式中 n 阶 k 级球函数的动力系数（斯托克司常数）

$\left(J_n^{(k)}\right)_{月}$——在月亮引力位展开式中的动力系数

$\left(J_n^{(k)}\right)_{日}$——在太阳引力位展开式中的动力系数

$\left(J_n^{(0)}\right)^\circ$——正常引力位展开式中的动力系数

J_i——外部水准面平均曲率

k——球多项式和球函数的级

K——两倍的卫星扇面积速度

K——水准面的高斯（总的）曲率

K_e——椭球体的高斯（总的）曲率

K_i——外水准面的高斯（总的）曲率

l,m,n——在 x,y,z 系中方向参数

L——大地经度

L,M,N——在 x,y,z 系统中方向参数

m_c——卫星质量

M——平近点角

$M_{地}$——地球质量

$M_{月}$——月亮质量

$M_{日}$——太阳质量

n——相对球的外法线

n——球多项式或球函数的阶

$N_n^{(k)}$——n阶k级球函数的范数

O——地球质心

O_r——参考椭球中心

P——研究引力场的点（被吸引点）

$P_n^{(k)}(t)$——n阶k级勒让德缔合多项式

$P_n^{(o)}(t)$——n阶勒让德多项式带球函数

Q——离心力位

r——被吸引点距吸引质量的流动点的距离

$\dot{r}$——在 x,y,z 系中的向径

R——在大地参考系中的扰动函数

$\overline{R}$——在地心坐标系中的扰动函数

R——在 x,y,z 系中的向径

S——格林尼治恒星时

$S_n^{(k)}$——在引力位展开式中n阶k级球函数的动力系数（斯托克司常数）

$\left(S_n^{(k)}\right)_{月}$——在月亮引力位展开式中的动力系数

$\left(S_n^{(k)}\right)_{日}$——在太阳引力位展开式中的动力系数

$S^{(\varphi)}$——斯托克司函数

t——在运动方程中的时间

t_o——卫星过近地点的时间

t'——相对于 x',y',z' 或 x,y,z 系统中地方天文子午圈的站心时角

t''——相对于 x',y',z' 或 x,y,z 系统中地方大地子午圈的站心时角

$t=\sin\overline{\varphi}$——球函数的引数

T——大地参考系中的扰动位

T——质心格林尼治时角

$\overline{T}$——质心坐标系中的扰动位

u——卫星的赤纬角距

U——正常位

U_o——水准椭球体上的位

v——卫星速度

v——真近点角

$v_x v_y v_z$——在 x,y,z 系中卫星的速度分量

V——引力位

V_n——n阶一般的球多项式（球体函数）

$V_n^{(k)}$——n阶k级基本球多项式（球体函数）

ω——加速度

$\omega_x,\omega_y,\omega_z$——加速度分量

W——重力位

W_o——大地水准面上的重力位

W_e——椭球面上的重力位

$Y_n^{(k)}$——n阶k级一般球函数

(xz)——（格林尼治）基本天文子午面

x,y,z——质心坐标系

x',y',z'——轴的定向为 $x'\|x$，$y'\|y$，$z'\|z$ 的站心坐标系

$x_{月},y_{月}z_{月}$——月亮（质心）的质心坐标

$\Delta x_0,\Delta y_0,\Delta z_0$——参考椭球中心相对于地球质心的空间直角坐标

(XZ)——（格林尼治）基本大地子午面

X,Y,Z——大地参考坐标系

X',Y',Z'——轴的定向为 $X'\|X$，$Y'\|Y$，$Z'\|Z$ 的站心坐标

z——地球的平均旋转轴

$\bar{z}$——天文天顶距

Z——参考椭球的旋转轴

$\bar{Z}$——大地天顶距

$\frac{ds}{dt}$——卫星的扇形速度

α——地球椭球体的极扁率

α_0——水准椭球体的极扁率

α——（球函数中的）参数

α'——在 $x'y'z'$ 或 xyz 系中的站心赤经

$\bar{\alpha}$——天文方位角

α_1——三轴椭球体的赤道扁率

β, β_1——正常重力加速度公式中的系数

Υ——春分点

γ——正常重力加速度

γ_e——赤道上的正常重力加速度

$\gamma_n^{(0)}$——在椭球面上正常重力加速度球函数级数的展开系数

δ——质心赤纬

δ——质元密度

Δ——质心距离

Δ——拉普拉斯微分算子

$\varepsilon_0, \psi_0, \omega_0$——确定 X, Y, Z 系与 x, y, z 系轴定向的尤拉角

ζ_q——似大地水准面高度

λ——天文经度

$\bar{\lambda}$——起始（格林尼治）子午圈（XY）与向量 ρ 在大地赤道面上投影之间的角度

$\lambda_n^{(k)}$——在球和球体函数理论中的因数

Λ——质心经度

$\Lambda_{月}$——月亮的质心经度

$\Lambda_{日}$——太阳的质心经度

$\Lambda_{月}$——卫星的月心经度

$\Lambda_{日}$——卫星的日心经度

Λ_a——三轴地球椭球体长半轴的质心经度

ν——正常引力场中的力线

ρ——流动质点距参考椭球体中心的距离

ρ_e——椭球面的向径

ρ_0——被吸引点距参考椭球体中心的距离

ρ_r——通过参考椭球体中心的大地水准面向径

τ——地球体的体积

φ——天文纬度

$\bar{\varphi}$——向径和大地赤道之间的角度

Φ——质心纬度

$\Phi_{月}(\delta_{月})$——月亮的质心纬度（赤纬）

$\Phi_{日}(\delta_{日})$——太阳的质心纬度（赤纬）

$\Phi_{月}$——卫星的月心纬度

$\Phi_{日}$——卫星的日心纬度

ψ——流动质元的向径与被吸引点的向径之间的角度

ω——卫星的近地点角距

ω——地球旋转角速度

Ω——卫星轨道升交点赤经

Ω——空间域

第一章　地球外部的重力场

§1　起始关系式

地球的所有质元总合起来产生引力位V，下面按通常方法只讨论卫星运行的外部空间的引力位。外部被吸引点P的位V表示成质元dm所产生的单元位dV(P)的积分。对于单元位dV有下列正确的表达式（图1）：

$$dV(P)=\frac{dm}{r}=f\frac{dm}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\psi}}=f\frac{\delta(X,Y,Z)d\tau}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\psi}},\qquad(1)$$

式中ρ_0是X，Y，Z坐标系的原点O_r和被吸引点P的距离，O_r与参考椭球体中心相合。ρ是dm和O_r的距离；r是dm和P点的距离；ψ是方向$\overline{O_r dm}$与$\overline{O_r P}$之间的角距；f是引力常数；$\delta=\delta(X,Y,Z)$是质元dm的密度，它是X，Y，Z坐标的函数，$d\tau$是质元dm的体元。

X，Y，Z坐标系可以是任意的，但是在选择这个坐标系时，将坐标原点尽可能接近于地球的质心，而Z轴与地球的周日旋转轴重合是有利的。以后将应用大地参考系。

按地球的整个体积τ对（1）式积分，则得：

$$V(P)=f\iiint_\tau\frac{\delta(X,Y,Z)}{\sqrt{\rho_0^2+\rho^2-2\rho_0\rho\cos\psi}}d\tau\qquad(2)$$

对于外部位，假设$\rho_0>\rho$，则可改化成：

$$V(P)=f\iiint_\tau\frac{\delta(X,Y,Z)}{\rho_0\sqrt{1+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2-2\frac{\rho}{\rho_0}\cos\psi}}d\tau\qquad(3)$$

上式被积函数根号中的表达式可以展开成均匀收敛的级数：

$$\left[1+\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2-2\frac{\rho}{\rho_0}\cos\psi\right]^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2-2\frac{\rho}{\rho_0}\cos\psi\right]+$$

$$+\frac{3}{8}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2-2\frac{\rho}{\rho_0}\cos\psi\right]^2-\frac{5}{16}\left[\left(\frac{\rho}{\rho_0}\right)^2-2\frac{\rho}{\rho_0}\cos\psi\right]^2+\cdots\qquad(4)$$

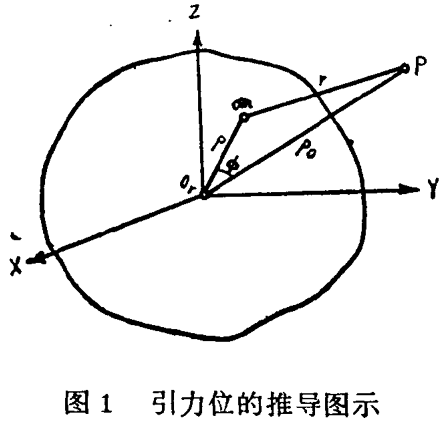

图1　引力位的推导图示

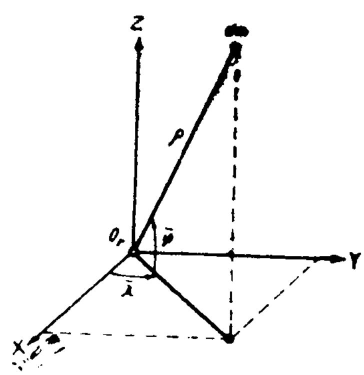

图2　直角和球面坐标系

引数 $\cos\psi$ 对于积分（3）式是不方便的，所以将它变换成球面坐标系 $\overline{\rho}$，$\overline{\varphi}$，$\overline{\lambda}$（图2）或空间直角（参考）坐标系 X，Y，Z*。角 $\overline{\lambda}=-T^r$ 是向径 ρ 在（XY）面上的投影与轴 X 之间的夹角，按此两角度可得：

$$\left.\begin{aligned} X&=\rho\cos\overline{\varphi}\cos\overline{\lambda}\\ Y&=\rho\cos\overline{\varphi}\sin\overline{\lambda}\\ Z&=\rho\sin\overline{\varphi}\end{aligned}\right\}\tag{5}$$

如果引进半径为 ρ 的辅助球，则 $\overline{\varphi}$，$\overline{\lambda}$ 角为球面坐标纬度和经度，那么要讨论位的 P 点的坐标就是 ρ_0，$\overline{\varphi}_0$，$\overline{\lambda}_0$ 或 X_0，Y_0，Z_0，流动质元 dm 的坐标则为 ρ，$\overline{\varphi}$，$\overline{\lambda}$ 或X，Y，Z。

函数 $\cos\psi$ 可以由上述单位辅助球上的球面三角形表示，三角形的顶点是方向 $\overline{O,Z}$，$\overline{O,P}$ 及$O_r$dm 与球面的交点（图3）

$$\cos\psi=\sin\overline{\varphi}\sin\overline{\varphi}_0+\cos\overline{\varphi}\cos\overline{\varphi}_0\cos(\overline{\lambda}_0-\overline{\lambda})\tag{6}$$

或顾及（5）式，则为

$$\cos\psi=\frac{1}{\rho\rho_0}(XX_0+YY_0+ZZ_0)\tag{7}$$

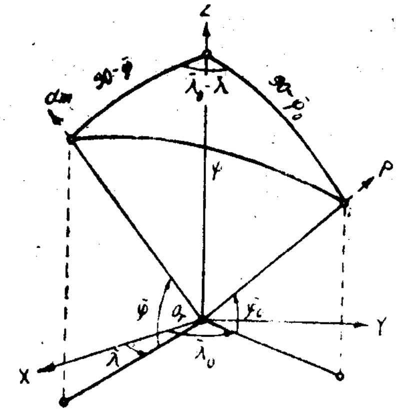

图3 极球面三角形、直角和地心坐标系

现在可以将（4）式代入（3）式进行积分。但是首先利用有意的和非常有用的幂级数（4）式中 $(\rho/\rho_0)^n$ 的系数性质是有利的，纵然它也要求扼要的阐述调和函数的基本概念和某些特征，而正是这些函数，却是解算动力宇宙大地测量的基本数学工具。

§2 调 和 函 数

如果函数 V（X，Y，Z）有连续的一阶偏导数 $\frac{dV}{dX}$，$\frac{dV}{dY}$，$\frac{dV}{dZ}$ 以及二阶偏导数 $\frac{d^2V}{dX^2}$，$\frac{d^2V}{dY^2}$，$\frac{d^2V}{dZ^2}$，并在 Ω 域的每一点上满足拉普拉斯方程。

$$\frac{\partial^2V}{\partial X^2}+\frac{\partial^2V}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2V}{\partial Z^2}=\Delta V=0\tag{8}$$

则函数 V（X，Y，Z）就是在空间定义域 Ω 内的调和函数。

符号 Δ 称为拉普拉斯微分算子：

---

*在《宇宙大地测量原理》第Ⅰ册第4章中给出了各种不同坐标系的定义

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial X^2}+\frac{\partial^2}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2}{\partial Z^2} \tag{9}$$

很容易证明，遵守上述条件的函数V（X，Y，Z）具有各阶连续偏导数，并且泰勒级数：

$$V(X,Y,Z)=V(X_0,Y_0,Z_0)+\frac{\partial V}{\partial X}(X-X_0)+\frac{\partial V}{\partial Y}(Y-Y^0)+$$

$$+\frac{\partial V}{\partial Z}(Z-Z_0)+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}V_n(X-X_0,Y-Y_0,Z-Z_0) \tag{10}$$

是收敛的，因此V（X，Y，Z）在Ω内是解析函数。

今后我们要引用的调和函数在无限远总是正则的，并且对此函数下列等式是成立的：

$$\lim_{X,Y,Z\to\infty} V(X,Y,Z)=0,\quad \lim_{\rho\to\infty}\rho V(X,Y,Z)=\text{常数} \tag{11}$$

例如（1）式的质点位是调和函数，所以对它有：

$$\Delta[dV(P)]=fdm\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=0$$

因为：

$$\left.\begin{aligned}
&r=\sqrt{(X_0-X)^2+(Y_0-Y)^2+(Z-Z_0)^2}\\
&\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial X_0}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial Y_0}=-\frac{1}{r^3}(X_0-X)\\
&\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Y_0}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial Y_0}=-\frac{1}{r^3}(Y_0-Y)\\
&\frac{\partial\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Z_0}=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial Z_0}=-\frac{1}{r^3}(Z_0-Z)
\end{aligned}\right\} \tag{12}$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial X_0^2}=\frac{3}{r^5}(X_0-X)^2-\frac{1}{r^3}\\
&\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Y_0^2}=\frac{3}{r^5}(Y_0-Y)^2-\frac{1}{r^3}\\
&\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Z_0^2}=\frac{3}{r^5}(Z_0-Z)^2-\frac{1}{r^3}
\end{aligned}\right\} \tag{13}$$

则

$$\Delta\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial X_0^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Y_0^2}+\frac{\partial^2\left(\frac{1}{r}\right)}{\partial Z_0^2}=\frac{3}{r^5}r^2-\frac{3}{r^3}=0 \tag{14}$$

要讨论位的P_0（X_0，Y_0，Z_0）点应当位于奇异点（r = 0）之外，即质元dm之外。

如上所述，引力位

$$V(P)=f\iiint_{\tau}\frac{\delta(X,Y,Z)}{r}d\tau \tag{15}$$

也是调和函数，

即
$$\Delta V(P)=0 \tag{16}$$

这是很明显的，如果利用（14）式，P（X_0，Y_0，Z_0）点坐标与积分变量无关，即：

$$\Delta V(P)=f\Delta\left[\iiint_{\tau}\frac{\delta(X,Y,Z)}{r}d\tau\right]=f\iiint_{\tau}\delta(X,Y,Z)\Delta\left(\frac{1}{r}\right)d\tau \tag{17}$$

这里，同样P点应该位于吸引质量的τ区域之外。

应当注意，地球重力位W（P）与引力位不同，它不是调和函数。如果用Q（P）表示离心力位，那么：

$$W(P)=V(P)+Q(P) \tag{18}$$

以及
$$\Delta w(P)=\Delta V(P)+\Delta Q(P)=\Delta Q(P) \tag{19}$$

在这种情况下意味着P点是与物体τ一起旋转的。

若用ω表示旋转角速度，并假设Z轴是物体的主惯性轴，那末离心力位为：

$$Q(P)=\frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2) \tag{20}$$

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial Q}{\partial X}=\omega^2X, &&\frac{\partial Q}{\partial Y}=\omega^2Y, &&\frac{\partial Q}{\partial Z}=0\\ &\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}=\omega^2, &&\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}=\omega^2, &&\frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2}=0\end{aligned}\right\} \tag{21}$$

及

$$\Delta Q(P)=\frac{\partial^2 Q}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 Q}{\partial Z^2}=2\omega^2\neq 0, \tag{22}$$

因此

$$\Delta W(P)=2\omega^2\neq 0$$

这证明，重力位不是调和函数，若Z轴不是主惯性轴，则离心力位等于〔见第I册地心坐标x，y，z与参考坐标系X，Y，Z的改化关系(59)式〕

$$Q(P)=\frac{1}{2}\omega^2[(X+\Delta x_0+\omega Y-\psi_0Z)^2+(Y+\Delta y_0-\omega_0X+\varepsilon_0Z)^2]=$$

$$=\frac{1}{2}\omega^2(X^2+Y^2)+\delta Q(P)=\frac{1}{2}\omega^2\rho^2\cos^2\overline{\varphi}+\delta Q(P) \tag{23}$$

$$\delta Q(P)\simeq\omega^2(X\Delta x_0+Y\Delta y_0-\psi_0XZ+\varepsilon_0YZ)$$

在动力宇宙大地测量，天体力学及天文动力学中，常常指的是不随地球旋转的点的位，所以在那里离心力的影响等于零（Q＝0），在这种情况下我们碰到的是引力位，而不是重力位。

§ 3　在球面坐标系中的拉普拉斯方程

在动力宇宙大地测量中广泛使用特殊方式的调和函数，叫做球面和球体函数。为了叙述它们，首先用（5）式球面坐标系去表示（8）式拉普拉斯方程是方便的。应当指出，所谓正交系，是满足下列方程式：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial \varphi}\frac{\partial X}{\partial \lambda}+\frac{\partial Y}{\partial \varphi}\frac{\partial Y}{\partial \lambda}+\frac{\partial Z}{\partial \varphi}\frac{\partial Z}{\partial \lambda}=0\\
&\frac{\partial X}{\partial \lambda}\frac{\partial X}{\partial \rho}+\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\frac{\partial Y}{\partial \rho}+\frac{\partial Z}{\partial \lambda}\frac{\partial Z}{\partial \rho}=0\\
&\frac{\partial X}{\partial \rho}\frac{\partial X}{\partial \varphi}+\frac{\partial Y}{\partial \rho}\frac{\partial Y}{\partial \varphi}+\frac{\partial Z}{\partial \rho}\frac{\partial Z}{\partial \varphi}=0
\end{aligned}\right\}\tag{24}
$$

实际上，如果在（24）式中代入（15）式的导数：

$$
\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial X}{\partial \varphi}=-\rho\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\lambda}, && \frac{\partial Y}{\partial \varphi}=-\rho\sin\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\\
&\frac{\partial X}{\partial \lambda}=-\rho\cos\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}, && \frac{\partial Y}{\partial \lambda}=-\rho\cos\bar{\varphi}\cos\bar{\lambda}\\
&\frac{\partial X}{\partial \rho}=\cos\bar{\varphi}\cos\bar{\lambda}, && \frac{\partial Y}{\partial \rho}=\cos\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\\
&\frac{\partial Z}{\partial \varphi}=\rho\cos\bar{\varphi}, && \frac{\partial Z}{\partial \lambda}=0,\quad \frac{\partial Z}{\partial \rho}=\sin\bar{\varphi}
\end{aligned}\right\}\tag{25}
$$

则得：

$$
\left.\begin{aligned}
&\rho^2\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}-\rho^2\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}=0\\
&-\rho\cos^2\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}+\rho\cos^2\bar{\varphi}\sin\bar{\lambda}\cos\bar{\lambda}=0\\
&-\rho\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}\cos^2\bar{\lambda}-\rho\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}\sin^2\bar{\lambda}+\rho\sin\bar{\varphi}\cos\bar{\varphi}=0
\end{aligned}\right\}\tag{26}
$$

我们来讨论由坐标线所围成的空间单元（图 4），并用 X，Y，Z 坐标系表示它的顶点坐标。

$$
\left.\begin{aligned}
X(M_1)&=X(M)+\left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)_M d\rho+\left(\frac{\partial X}{\partial \varphi}\right)_M d\bar{\varphi}+\\
&\quad+\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda}=X(M)+\left(\frac{\partial X}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda}\\
Y(M_1)&=Y(M)+\left(\frac{\partial Y}{\partial \lambda}\right)_M d\bar{\lambda}
\end{aligned}\right\}\tag{27}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
Z(M_1) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \overline{\lambda}}\right)_M d\overline{\lambda} \\
X(M_2) &= X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \overline{\varphi}}\right)_M d\overline{\varphi} \\
Y(M_2) &= Y(M) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \overline{\varphi}}\right)_M d\overline{\varphi} \\
Z(M_2) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \overline{\varphi}}\right)_M d\overline{\varphi} \\
X(M_3) &= X(M) + \left(\frac{\partial X}{\partial \rho}\right)_M d\rho \\
Y(M_3) &= Y(M) + \left(\frac{\partial Y}{\partial \rho}\right)_M d\rho \\
Z(M_3) &= Z(M) + \left(\frac{\partial Z}{\partial \rho}\right)_M d\rho
\end{aligned}\right\} \tag{27}
$$

顾及（25）式，则得（以下省掉字母M）：

$$
\left.\begin{aligned}
X_1 - X &= -\rho\cos\overline{\varphi}\sin\overline{\lambda}\, d\overline{\lambda} \\
Y_1 - Y &= \rho\cos\overline{\varphi}\cos\overline{\lambda}\, d\overline{\lambda} \\
Z_1 - Z &= 0 \\
X_2 - X &= -\rho\sin\overline{\varphi}\cos\overline{\lambda}\, d\overline{\varphi} \\
Y_2 - Y &= -\rho\sin\overline{\varphi}\sin\overline{\lambda}\, d\overline{\varphi} \\
Z_2 - Z &= \rho\cos\overline{\varphi}\, d\overline{\varphi} \\
X_3 - X &= \cos\overline{\varphi}\cos\overline{\lambda}\, d\rho \\
Y_3 - Y &= \cos\overline{\varphi}\sin\overline{\lambda}\, d\rho \\
Z_3 - Z &= \sin\overline{\varphi}\, d\rho
\end{aligned}\right\} \tag{28}
$$

由此

$$
\left.\begin{aligned}
\overline{MM}_1 &= \sqrt{(X_1-X)^2+(Y_1-Y)^2+(Z_1-Z)^2} = \rho\cos\varphi d\overline{\lambda} \\
\overline{MM}_2 &= \sqrt{(X_2-X)^2+(Y_2-Y)^2+(Z_2-Z)^2} = \rho d\overline{\varphi} \\
\overline{MM}_3 &= d\rho
\end{aligned}\right\} \tag{29}
$$

上式可从几何关系导出（图 4 — 5）。由于坐标系 ρ，$\overline{\varphi}$，$\overline{\lambda}$ 是正交的，显然相应的体 元 τ 可以写成

$$
d\tau = \overline{MM}_1 \cdot \overline{MM}_2 \cdot \overline{MM}_3 = \rho^2\cos\overline{\varphi}\, d\rho\, d\overline{\varphi}\, d\overline{\lambda} \tag{30}
$$

再将格林第二定理用于体元 $d\tau$，它是体积分（三重）与面积分（二重）之间的关系：

$$\iiint\limits_{\tau} (U\Delta V - V\Delta U)\, d\tau = \iint\limits_{\sigma} \left(U\frac{\partial V}{\partial n} - V\frac{\partial V}{\partial n} \right) d\sigma \tag{31}$$

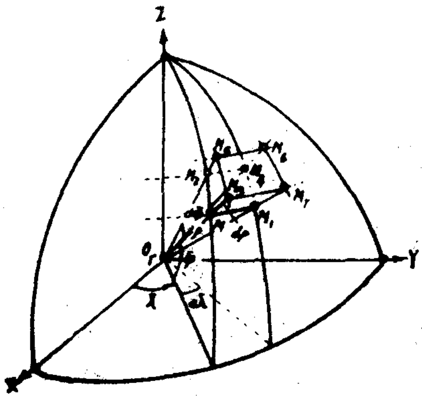

图 4　体元的坐标

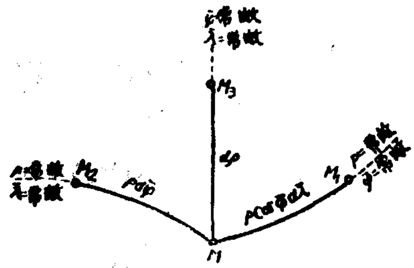

图 5　正交球面坐标

式中 U，V 是在 τ 区域内具有二阶偏导数的三个变量的任意连续函数；σ 是体积 τ 的表面，$d\sigma$ 是该表面的面元，n 是 σ 面的外法线方向。在这里，假设 V 是所讨论的引力位，并且以下假设 U = 常数，即 $\Delta U = 0$。

则

$$\iiint\limits_{\tau} U\Delta V d\tau = \iint\limits_{\sigma} U\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \tag{32}$$

或

$$\iiint\limits_{\tau} \Delta V d\tau = \iint\limits_{\sigma} \frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \tag{33}$$

并且 $\Delta V \neq 0$，因为在 τ 区域内部，引力位不是调和函数。对于体元（在(33)式中用体元 $d\tau$ 来代替有限体积 τ）的情况很明显有下列等式：

$$\Delta V d\tau = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{\partial V}{\partial n} \right)_i d\sigma_i \tag{34}$$

在（34）式右边包含了位 V 对体元 $d\tau$ 的六个界面（单元界面）的外法线的偏导数与这些界面面积的乘积之和。

按图 4 可以写出：

$$\Delta V d\tau = \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_1M_4M_2} + \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_3M_7M_6M_5} +$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_1M_7M_3} + \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_2M_4M_6M_5} +$$

$$+ \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{MM_3M_5M_2} + \left(\frac{\partial V}{\partial n} d\sigma \right)_{M_1M_7M_6M_4} \tag{35}$$

下指标列举的顶点表示相应的单元界面，若顾及到讨论的是单元大小，则可以认为两相对界

面的外法线方向所组成的角度接近于 180°。

所以

$$\left.\begin{aligned}
&\left(\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma\right)_{M_3M_7M_8M_5}=\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}d\sigma\right)_{M_3M_7M_8M_5}=\\
&=-\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}d\sigma\right)_{MM_1M_4M_2}+\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\frac{\partial V}{\partial \rho}d\sigma\right)d\rho\\
&\left(\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma\right)_{M_2M_4M_8M_5}=\left(\frac{\partial V}{\rho\partial \overline{\varphi}}d\sigma\right)_{M_2M_4M_8M_5}=\\
&=-\left(\frac{\partial V}{\rho\partial \overline{\varphi}}d\sigma\right)_{MM_1M_7M_3}+\frac{\partial}{\partial \overline{\varphi}}\left(\frac{\partial V}{\rho\partial \overline{\varphi}}d\sigma\right)d\overline{\varphi}\\
&\left(\frac{\partial V}{\partial n}d\sigma\right)_{M_1M_7M_8M_4}=\left(\frac{\partial V}{\rho\cos\overline{\varphi}\,\partial \overline{\lambda}}d\sigma\right)_{M_1M_7M_8M_4}=\\
&=-\left(\frac{\partial V}{\rho\cos\overline{\varphi}\,\partial \overline{\lambda}}d\sigma\right)_{MM_3M_5M_2}+\frac{\partial}{\partial \overline{\lambda}}\left(\frac{\partial V}{\rho\cos\overline{\varphi}\,\partial \overline{\lambda}}d\sigma\right)d\overline{\lambda}
\end{aligned}\right\}\tag{36}$$

再顾及（30）式

$$\left.\begin{aligned}
&(d\sigma)_{MM_1M_4M_2}=\rho^2\cos\overline{\varphi}\,d\overline{\varphi}\,d\overline{\lambda}\\
&(d\sigma)_{M_2M_4M_8M_5}=\rho\cos\overline{\varphi}\,d\rho\,d\overline{\lambda}\\
&(d\sigma)_{M_1M_7M_8M_4}=\rho\,d\rho\,d\overline{\varphi}
\end{aligned}\right\}\tag{37}$$

则

$$\rho^2\cos\overline{\varphi}\,d\rho\,d\overline{\varphi}\,d\overline{\lambda}\,\Delta V=\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{\partial V}{\partial\rho}\rho^2\cos\overline{\varphi}\,d\overline{\varphi}\,d\overline{\lambda}\right)d\rho+$$

$$+\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\left(\frac{\partial V}{\rho\partial\overline{\varphi}}\rho\cos\overline{\varphi}\,d\rho\,d\overline{\lambda}\right)d\overline{\varphi}+\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\left(\frac{\partial V}{\rho\cos\overline{\varphi}\,\partial\overline{\lambda}}\rho\,d\rho\,d\overline{\varphi}\right)d\overline{\lambda}\tag{38}$$

由此，考虑到ρ，$\overline{\varphi}$，$\overline{\lambda}$是独立变量，则得：

$$\Delta V=\frac{1}{\rho^2\cos\overline{\varphi}}\left[\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^2\cos\overline{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\left(\cos\overline{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\overline{\varphi}}\right)+\frac{1}{\cos\overline{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\overline{\lambda}}\left(\frac{\partial V}{\partial\overline{\lambda}}\right)\right]\tag{39}$$

最后得

$$\Delta V=\frac{\partial^2 V}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial V}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\cos\overline{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\left(\cos\overline{\varphi}\frac{\partial V}{\partial\overline{\varphi}}\right)+\frac{1}{\rho^2\cos^2\overline{\varphi}}\frac{\partial^2 V}{\partial\overline{\lambda}^2}\tag{40}$$

在球面坐标中（9）式拉普拉斯算子变为：

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{2}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2\cos\overline{\varphi}}\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\left(\cos\overline{\varphi}\frac{\partial}{\partial\overline{\varphi}}\right)+\frac{1}{\rho^2\cos^2\overline{\varphi}}\frac{\partial^2}{\partial\overline{\lambda}^2}\tag{41}$$

§4 球体及球函数

拉普拉斯方程 $\Delta V=0$ 是二阶偏微分方程，它具有无限多个解，因为它的通解含有两个任意的连续函数。

我们将求得一个这样的解，它是n阶齐次多项式，并是有理和整数函数，用 $V_n(X, Y, Z)=V_n(\rho, \overline{\varphi}, \overline{\lambda})$ 来表示，我们首先从直角坐标系X，Y，Z来解算。

多项式 $V_n(X, Y, Z)$ 称为n阶主球多项式或n阶主球体函数*，它应当满足以下两个条件：

a）拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 V_n(X,Y,Z)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V_n(X,Y,Z)}{\partial Y^2}+\frac{\partial^2 V_n(X,Y,Z)}{\partial Z^2}=\Delta V_n(X,Y,Z)=0; \tag{42}$$

σ）齐次条件

$$V_n(kX,kY,kZ)=k^n V_n(X,Y,Z) \tag{43}$$

或尤拉方程

$$X\frac{\partial V_n(X,Y,Z)}{\partial X}+Y\frac{\partial V_n(X,Y,Z)}{\partial Y}+Z\frac{\partial V_n(X,Y,Z)}{\partial Z}=nV_n(X,Y,Z)$$

首先要阐明（42）式具有多少个 $V_n(X, Y, Z)$ 形式的解，即球体函数 $V_n(X, Y, Z)$ 包含了多少个任意（线性独立）系数。

将它表示成下列形式：

$$V_n(X,Y,Z)=Z^nQ_0(X,Y)+Z^{n-1}Q_1(X,Y)+\cdots+ZQ_{n-1}(XY)+$$
$$+Q_n(X,Y)=\sum_{k=0}^{k=n}Z^{n-k}Q_k(X,Y) \tag{44}$$

式中 $Q_n(X, Y)$ 是变量X，Y的n阶齐次多项式。

即：

$$Q_n(X,Y)=a_0^{(n)}Y^n+a_1^{(n)}Y^{n-1}X+a_2^{(n)}Y^{n-2}X^2+\cdots+a_{n-1}^{(n)}YX^{n-1}+a_n^{(n)}X^n \tag{45}$$

多项式（45）式含有 $n+1$ 项，N是球多项式（44）式的项数，它等于

$$N=1+2+\cdots+n+1=\frac{1+(n+1)}{2}(n+1)=\frac{(n+1)(n+2)}{2} \tag{46}$$

将（44）式对所有变量进行两次微分，并代入拉普拉斯方程中[它的解是 $V_n(X,Y,Z)$]，我们就得到 $(n-2)$ 阶多项式。这个多项式有 N' 项，且 $N'<N$，即

$$N'=1+2+\cdots+n-1=\frac{1+(n-1)}{2}(n-1)=\frac{n(n-1)}{2} \tag{47}$$

球体函数具有的线性独立系数的个数为：

$$N-N'=\tfrac{1}{2}[(n+1)(n+2)-n(n-1)]=2n+1 \tag{48}$$

---

*这里我们将它与球函数区分开来（见后），可是在有的文献中往往不去区别球体函数与球函数。