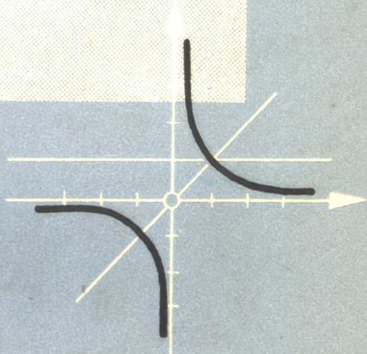
怎样作图象

刘远图編譯



科学普及出版社

內 容 提 要

这本小册子中用正、反比例和二次多项式为例，講述了作函数图象的最簡单方法，并指出怎样利用这些图象作更复杂的函数的图象。本书可供高中学生閱讀。

总号：131

怎样作图象

編譯者：刘 远 图

出版者：科 学 普 及 出 版 社

（北京市西直门外郝家湾）

北京市书刊出版业营业许可证出字第112号

发行者：新 华 书 店 北 京 发 行 所

印刷者：北 京 市 通 县 印 刷 厂

开 本：787×1092 1/32 印张：13/16

1965年11月第 1 版 字数：10,000

1965年11月第1次印刷 印数：27,220

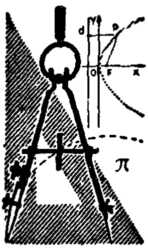
统一书号：13051・080

定 价：（2）0.10元

怎样作图象

刘远图编譯

赵根榕校



科学普及出版社

一九六五年·北京

目　次

作图象法

"按点"作图象法

在許多知識領域內，都需要根据已知的数学公式作出图象。这些图象很直观地显示了自变量与函数之間的关系，然而要作出这些图象往往很不容易。

这本小册子就給大家介紹几种最簡单的作图象的方法。

在平面上划两条相互垂直的直綫，一条水平綫，一条豎直綫。它們的交点記作O，我們把水平綫叫做**横坐标軸**或 X **軸**，豎直綫叫做**纵坐标軸**或 Y **軸**。

点O把坐标軸分成两部分：正半軸和負半軸。我們規定：X 軸的右半軸和 Y 軸的上半軸为正半軸，加箭头表示；X 軸的左半軸和 Y 軸的下半軸为負半軸，不加箭头。

規定了坐标軸的平面叫做**坐标平面**。

由坐标平面上的任一点M向坐标軸作垂綫，在两条坐标軸上分别截得綫段OA和OB（图1），它們的长度分别用 x 和 y 表示。A（或B）在正半軸上时，x（或 y）取正值，在負半軸上时，x（或 y）取負值。

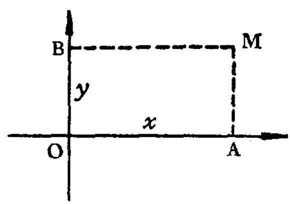


图 1

x 叫做点M的**横坐标**，y 叫做**纵坐标**。

显然，坐标原点O的两个坐标都等于零，X軸上的点的纵坐标等于零，Y軸上的点的横坐标等于零。

这样一来，平面上每一点都可以用由两个数x和y組成的一数对(x,y)来确定了。反过来，只要給定一数对(x,y)，就可以作出相应的点M了。

假設一个公式$\left(\text{例如 } y=\dfrac{1}{1+x^2}\right)$已指明，对自变量$x$进行哪些运算后，就得到函数$y$的值(例如$y=\dfrac{1}{1+x^2}$指明，将$x$平方，再加1，然后用所得的結果去除1，就得到$y$的值)。于是，取$x$为某个值$x_0$时，按这个公式，$y$就取某个数值$y_0$。$x_0$和$y_0$就在坐标平面上确定一个点$M_0$。同样，$x$取另一个值$x_1$时，得$y_1$。数对$(x_1,y_1)$确定坐标平面上的另一点。

x取所有可能的值时，就确定了滿足这个公式的所有的点。这些点合在一起称为这个函数的**图象**。

一般說来，一个图象上的点有无穷多个。因此，实际作图象时，不能把所有的点一个不漏地一点一点地描下来。在許多情况下，只要有为数不多的点就有可能判断图象的大概形状。

“按点”作图象的方法就是，先作出图象上的某些点，再用(尽可能)光滑的曲綫把它們連接起来。

例如，我們要作函数

$$y=\frac{1}{1+x^2} \tag{1}$$

的图象，先列出下面这个表：

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$

在第一行里填 x 的值

$$0,1,2,3,-1,-2,-3.$$

在第二行里填 y 的相应的值(用公式(1)算得的)

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{10}.$$

再在坐标平面上作出相应的那些点(图 2)。然后用光滑的曲

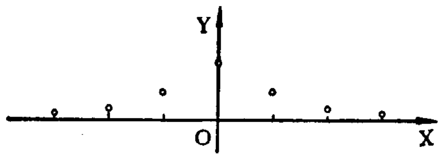


图 2

綫把它們連接起来,就得到了图象(图 3)。

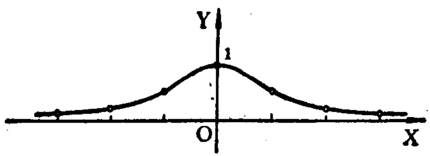


图 3

我們看到,"按点"作图象的方法是十分簡单的。

但是,如果盲目地应用"按点"作图象法,就可能产生很大的錯誤。

我們来看一个例子。用"按点"作图象法作函数

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2} \tag{2}$$

的图象。

先列出 x 和 y 的对应表：

x	0	1	2	3	-1	-2	-3
y	1	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{121}$	$\frac{1}{676}$

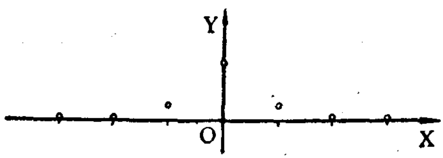


图 4

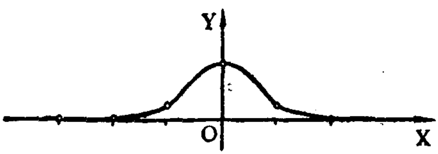


图 5

在坐标平面上作出相应的点(图 4)。再用光滑的曲綫把这些点連接起来，就得到一个图象(图 5)。

但是如果我們取某个中間值（例如，$x=0.5$）来检查一下，就会得到一个意外的結果，当 $x=0.5$ 时，$y=16$。显然这与我們作出的图象根本不符合。同时，我們还不能保証，当 x 取其他中間值(它們有无穷多个)时，就不会出現更加不合理的情况。

由此可見，“按点”作图象的方法有一定的局限性。

“按运算”作图象法

我們再介紹一种作图象的方法，这种方法需要直接在坐

标平面上进行公式中给定的一切运算——加、减、乘、除等。因此称它为“按运算”作图象法。对于防止上述的意外情况来說，它是比較可靠的。

我們来考察几个簡单的例子。

例 1 作函数

$$y=x \tag{3}$$

的图象。

这个函数表明：所求图象上的每一点都有相同的横坐标和纵坐标。这些点的軌迹是两个正半軸夹角和两个負半軸夹角的平分綫(图 6)。

例 2 作函数

$$y=kx \tag{4}$$

的图象，其中的系数 k 是一个常数。

用 k 去乘上一图象的每一个纵坐标，就可以得到这个函数的图象。

例如，假定 $k=2$，那么只要把上一图象的每一纵坐标乘 2，我們就得到一条向上傾斜得更大的直綫(图 7)。沿 X 軸向

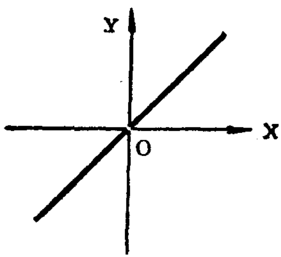


图 6

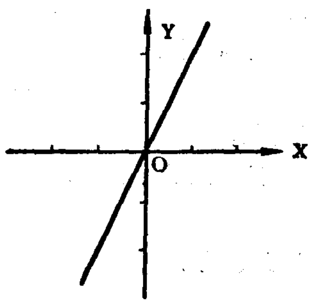


图 7

右每走一步，这条直綫就沿 Y 軸向上走两步。因此，在方格紙或坐标紙上作这个图象将更容易。

在一般情况下，由(4)得到的也是一条直綫。若 $k>0$，則每向右走一步，它就沿 Y 軸向上爬 k 步；若 $k<0$，則每向右走一步，它就向下移 k 步。

例 3 作方程

$$y=kx+b \tag{5}$$

的图象。

由方程(5)看到，所求图象上的点与直綫 $y=kx$ 上的对应点的纵坐标都只差一个数 b。因此，把直綫 $y=kx$ 整个地向上（当 $b>0$ 时）或向下（当 $b<0$ 时）移动 b 个单位，就得到所求的图象。它不經过坐标原点（假設 $b\neq0$），而在点 $(0,b)$ 与 Y 軸相交（图 8）。数 b 称为**截距**。

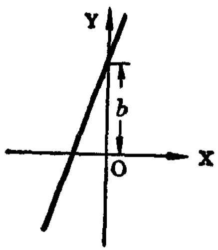


图 8

上面討論了一次多項式的图象的作法，下面来討論二次多項式。

例 4 作函数

$$y=x^2 \tag{6}$$

的图象。

这个式子可以写成

$$y=y_1^2$$

的形式，其中

$$y_1=x.$$

換句話說，如果把直綫 $y=x$ 的每一纵坐标乘平方，就可以得

到所求的图象。

由于 $0^2=0$, $1^2=1$, $(-1)^2=1$,我們得到三个点 A、B 和 C (图 9)。

当 $x>1$ 时,$x^2>x$。因此,在点 B 的右方,图象应該在坐标角的平分綫的上面(图 10)。

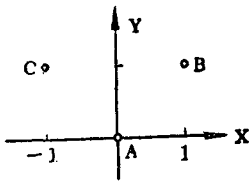


图 9

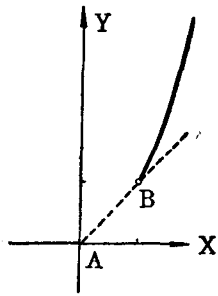


图 10

当 $0<x<1$ 时,$0<x^2<x$。因此,在 A 和 B 之間,图象应該在平分綫的下面。

图象在点 A 与 X 軸相切(图 11)。这是因为,只要 $x<k$,不等式

$$x^2<kx$$

就成立。因此,在接近点 A 的地方,图象在上面是直綫 $y=kx$(k 可以任意小)和下面是 X 軸的夹角的中間。这就說明,图象在点 A 与 X 軸相切。

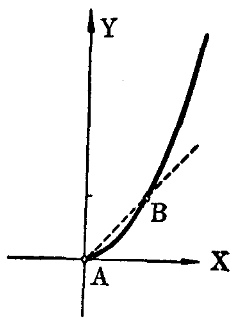


图 11

現在考虑 Y 軸左边的情况。因为

$$(-a)^2=(+a)^2,$$

所以曲綫在 $-a$ 的纵坐标与在 $+a$ 的纵坐标相等。在几何上这就表示，左半平面的图象与右半平面的图象（关于 Y 軸）对称。因而可以用軸对称的方法由后者得到前者（图 12）。

我們得到的这条曲綫，叫做**标准抛物綫**。

例 5 作函数

$$y = ax^2 \tag{7}$$

的图象。

用数 a 乘标准抛物綫（6）的每一纵坐标，就可以得到曲綫（7）。

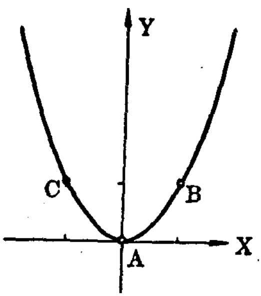


图 12

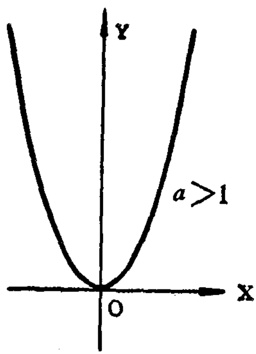


图 13

当 $a>1$ 时，得到的曲綫与标准抛物綫相似，只是向上倾斜得更大一些（图 13）。

当 $0<a<1$ 时，曲綫较为平直（图 14）。

当 $a<0$ 时，曲綫的分支倒向下方（图 15）。

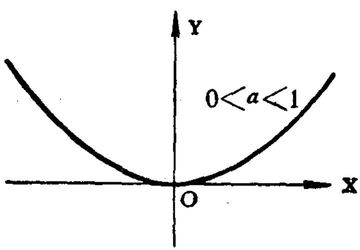


图 14

例 6 作函数

$$y=ax^2+b \quad (8)$$

的图象。

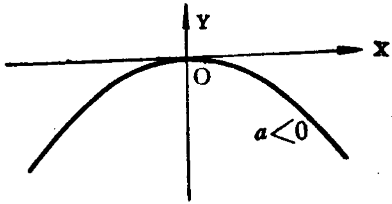


图 15

当 $b>0$ 时，把(7)的图象向上平移 b 个单位，就得到(8)的图象了(图 16)。

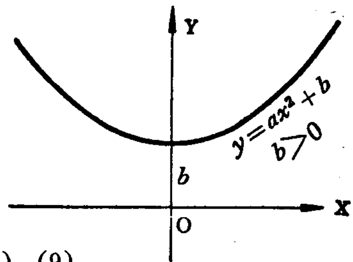


图 16

当 $b<0$ 时，就不是向上平移，而是向下平移(图 17)。

例 7 作函数

$$y=x(x-1)(x-2)(x-3) \quad (9)$$

的图象。

这里給出的是 4 个因式的乘积。分别作出每一个因式的图象，結果就得到 4 条与坐标角的平分綫平行的直綫，它們在 Y 軸上的截距分别是 0、-1、-2、-3 (图 18)。

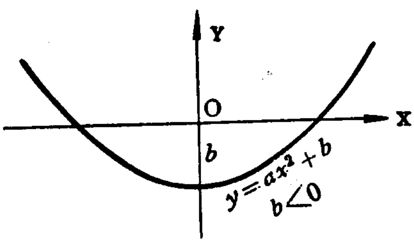


图 17

只要有一个因式等于零，它們的乘积就等于零，因此，在 X 軸的点 0、1、2、3 上，y 等于零。在其他地方，y 不等于零，它的

符号很容易由因式的符号得出。例如,在点 3 的右边,所有的因式都是正的,因而 y 是正的;在点 2 和 3 之間,有一个因式是負的,因而 y 是負的;在点 1 和 2 之間,有两个因式是負的,因而 y 是正的;等等(图 19)。

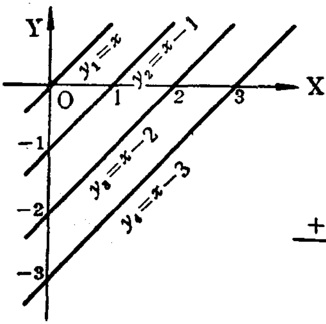


图 18

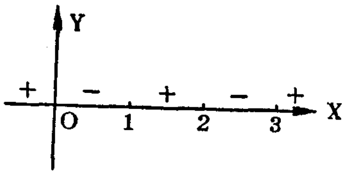


图 19

在点 3 的右边,当 x 增大时,各因式都增大,所以乘积 y 不仅随着增大,而且增大得很快(图 20)。从点 0 往左,4 个因式都是負数,而且絕对值逐漸增大,因而 y 是正数,而且增大得很快。

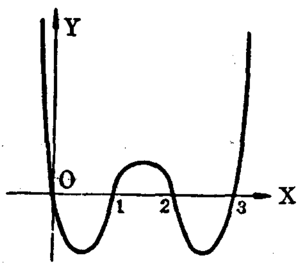


图 20

現在我們就很容易画出图象的大概形状了。

例 8 作函数

$$y=\frac{1}{1+x^2} \tag{10}$$

的图象。

我們先分别作出分子和分母的图象。分子

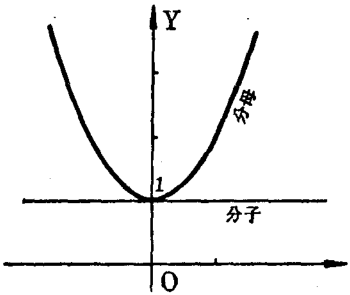


图 21

$$y_1=1$$

的图象是一条直綫，平行于 X 軸，高度为 1。分母

$$y_2=x^2+1$$

的图象是一条向上平移了 1 的标准抛物綫(图21)。

現在，我們用分子的纵坐标y_1除以分母的相应的(即对同一x 所取的)纵坐标y_2。

当 $x=0$ 时，我們看到，$y_1=y_2=1$。因而 $y=\dfrac{y_1}{y_2}=1$。当 $x\neq 0$ 时，$y_1<y_2$，因而 $y<1$。因为 y_1 和 y_2 到处为正，所以 y 也是正的。因而图象在 X 軸和直綫 $y=1$ 界限的区域里。当 x 无限增大时，y_2 也无限增大，但 y_1 是一个常数，所以y 趋向于零。根据这些便可以得到 y 的图象(图22)。

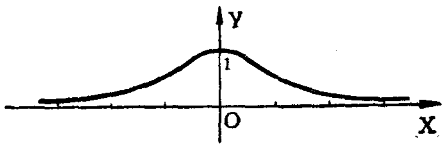


图 22

这个图象与以前用“按点”作图象法作出的完全相同。

例 9　作函数

$$y=\frac{1}{x} \tag{11}$$

的图象。

分子 $y_1=1$ 和分母 $y_2=x$ 的图象，我們都已經会作了(图23)。

当 $x=1$ 时，我們有 $y_1=y_2=1$，因而 $y=1$。当 $x>1$ 时，$y_1<y_2$，因而 $y<1$，这与上例的情形相同。当 x 无限增大时，y 趋向于零。于是我們得到 $x>1$ 的那一部分图象(图 24)。

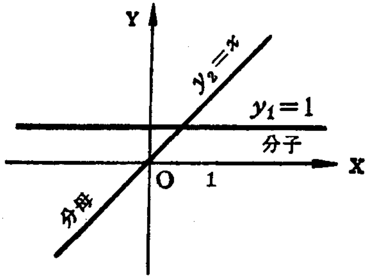


图 23

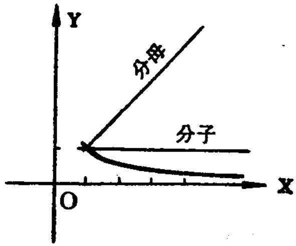


图 24

当 x 由 1 趋向于 0 时，y_2 趋向于零，而 y_1 总等于 1，因而y 无限增大。于是我們就得到走向无限远的一分支(图25)。

当 $x<0$ 时，y_2 为負，因而 y 也为負。

整个图象的大概形状如图 26 所示。

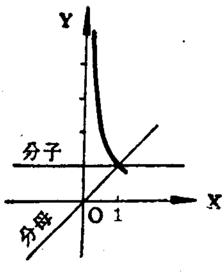


图 25

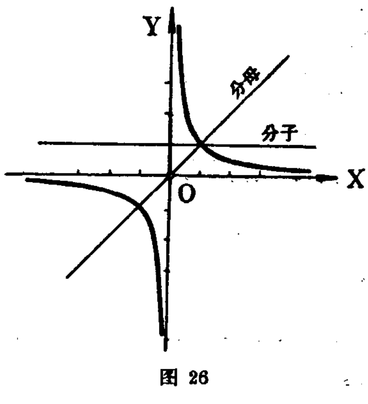


图 26

例 10 作函数

$$y=\frac{1}{(3x^2-1)^2} \tag{12}$$

的图象。

先作分母的图象。曲綫

$$y_1=3x^2$$

是3倍了的标准抛物綫（图27），减1就意味着把图象向下平移1个单位(图28)。

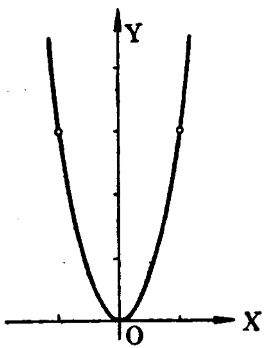


图 27

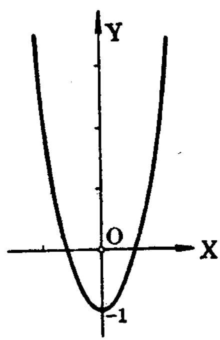


图 28

令

$$y_2=3x^2-1=0,$$

就很容易找到曲綫 $y_2=3x^2-1$ 与 X 軸的两个交点：

$$x_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{1}{3}}=\pm 0.577\cdots.$$

現在我們再把所得的图象平方：

$$y_3=(3x^2-1)^2.$$

在点 x_1 和 x_2 上，$y_3=0$。在其他地方，y_3 都是正的。因而图