半群的双序集理论

喻秉钧 著

科学出版社
www.sciencep.com

半群的双序集理论

喻秉钧 著

本书的出版和所论课题的研究工作得到以下基金的资助：

国家自然科学基金(19671063)
四川省教育厅国家自然科学基金启动项目(川教计函[1999]127号)
四川省教育厅重点研究项目(川教计函[2002]48号)
四川省科技厅应用基础研究项目(川科基[01GY051-64])

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书介绍半群的双序集理论及其最新研究成果. 全书共分八章:第一章为双序集的基本概念和性质,第二、三两章以范畴为工具刻画一般正则半群和两类最重要正则半群的结构——基础正则半群和幂等元生成正则半群,第四章给出双序集的半群表示并证明任何双序集都来自半群,第五、六两章介绍双序集在两类非正则半群研究中的应用——拟正则半群和一致半群,第七章从泛代数角度讨论双序集的同余、态射和子结构与半群相应概念的关系,第八章给出目前已知的一些重要正则和拟正则双序集的构造方法和特征刻画.

本书可用作数学专业研究生的教材,也可供对半群代数理论感兴趣的教师、理论计算机科学工作者和其他应用数学工作者作为参考用书.

图书在版编目(CIP)数据

半群的双序集理论/喻秉钧著. —北京:科学出版社,2003
ISBN 7-03-011421-3

Ⅰ. 半… Ⅱ. 喻… Ⅲ. 半群-序集合-研究 Ⅳ. O152.7

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 028397 号

责任编辑:陈玉琢 吕 虹 / 责任校对:宋玲玲
责任印制:钱玉芬 / 封面设计:王 浩

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com
双青印刷厂 印刷
科学出版社发行 各地新华书店经销
*
2003 年 9 月第 一 版 开本:B5 (720×1000)
2003 年 9 月第一次印刷 印张:14
印数:1—2 000 字数:255 000

定价: 28.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈环伟〉)

序

“半群代数理论”在数学外部 (诸如“计算机科学”、“信息科学”) 和数学内部的巨大推动下，经过五十余年的系统研究，已形成为“代数学”的一个从研究对象、研究课题到研究方法都独具特色的独立的学科分支，它与“群论”的关系类似于“环论”与“域论”的关系. 这一地位的确立不仅在于一批系统的研究成果的出现，更在于一批独特的系统研究思路和方法的形成. 印度数学家 K. S. S. Nambooripad 在 20 世纪 70 年代初建立的“双序集理论”导致了“半群代数理论”研究思路和方法上的一个创新，将半群的经典的幂等元方法开发到一个新的水平和高度，构成了“半群代数理论”研究上的一个重大进展. “双序集理论”不仅以高度的技巧把经典的由特殊到一般、由局部到全局的研究方法发挥得淋漓尽致，而且由于融会贯通了范畴论和泛代数等现代代数学的思想和手段，获得了一批已成为半群经典的研究成果，成为一个具有全局影响和良好发展前景的代数理论.

喻秉钧教授是我国自己培养的第一批半群代数理论的博士, 曾赴印度, 在 Nambooripad 教授指导下学习并合作研究，也曾赴澳大利亚，在著名半群理论专家 G. B. Presdon 及其学生 T. E. Hall(“ Journal of Algebra ”半群学科编委、“ Semigroup Forum ”和“ Communications in Algebra ”编委) 指导下工作. 本书系统介绍了双序集的基础理论和近期发展，其中包含了作者本人的若干工作. 作为作者的博士生导师，我很乐意为该书作序，相信它的出版将对半群代数理论在我国的发展起到进一步的推动作用.

郭聿琦

2002 年 10 月 20 日

前　言

1973 年，印度数学家 K. S. S. Nambooripad 在研究任意正则半群结构时发现，半群中幂等元生成的左、右理想的自然包含关系对幂等元自身形成了两个拟序，任意半群的幂等元集合在这两个拟序下形成一种奇特的部分 2 代数，它就像一个骨架，承载了半群内在整体结构的主要信息. Nambooripad 从泛代数和范畴论的角度对这种部分 2 代数进行了抽象刻画，提出了双序集的概念. 利用这个概念，Nambooripad 成功地建立了正则双序集的范畴，序范畴和归纳范畴理论，并在此基础上一举解决了当时困扰半群界的任意正则半群的结构问题. Nambooripad 的理论很快引起了国际半群界的广泛关注和极高评价. 半群代数理论的鼻祖，美国 Tulane 大学的 A.H., Clifford 教授立即邀请他到美国各大学演讲，帮助他在美国数学会资助下出版其专著 "Structure of Regular Semigroups I"(Mem Amer Math Soc, No 224, 1979)，并亲自着手开展双序集的研究，写出了正则半群的基础表示等数篇奠基性论文 (参看本书参考文献 [9~11]). 从 20 世纪 80 年代以来，国际半群界几乎所有知名学者都曾不同程度地对这一理论进行过深入的研究. 例如： K. Byleen 等发现了四螺旋双序集的结构及其在双单非完全半单正则半群结构中的"建筑模块作用"； J. Meakin 系统研究了双序集的余扩张构造及其在正则半群用矩形带余扩张构造中的骨架作用； F. Pastijn 把正则双序集理论中起核心作用的夹心集概念推广为多元夹心集，他还系统研究了矩形双序集用半格双序集的余扩张及其对揭示逆半群的矩形带构造的作用；年轻数学家 D. Easdown 则在他的博士论文中着重研究了一般双序集的半群表示，刻画了多种非正则双序集的特征；特别是，他用字的组合方法证明了任一双序集都一定是某个半群的幂等元双序集，这个经典结论发表在 " Journal of Algebra " 上，揭示了双序集这个概念和半群的本质联系. 20 世纪 80 年代末以来，我国也有包括作者在内的部分数学工作者开展双序集的研究工作. 这些工作既有对某些特殊类型正则双序集及其相关正则半群类的研究，也有对某些非正则 (主要是拟正则) 双序集的构造的研究；同时，也在双序集的泛代数基础方向和双序集在语言代数应用方向上开展了某些工作. 这些，代表了双序集理论进一步发展的方向.

本书的目的是较系统地介绍双序集的基础理论和在几个主要方向上的最新进展. 我们在第一章中介绍双序集的基本概念及其构成要素；第二、三两章完整介绍 Nambooripad 的序群胚、归纳群胚的理论及其在刻画一般正则半群结构和两类最重要正则半群 —— 基础正则半群和幂等元生成正则半群结构中的作用；第四章介绍 Easdown 的双序集的半群表示和任意双序集均来自半群的理论以及 Pastijn 关

于多元夹心集及其在刻画半带 (即幂等元生成半群 —— 不一定正则) 中的作用; 第五章我们系统介绍 Easdown,Edwards 及作者本人在对拟正则双序集和拟正则半群研究中的一些结果; 第六章介绍 Amstrong 关于一致半群的双序集理论. 和第五章的目的类似, 我们企图通过某些非正则半群结构的刻画说明双序集在非正则领域中也有其独特的作用; 第七章介绍 20 世纪 90 年代中期 K. Auinger 和 T. E. Hall 对于双序集作为泛代数和半群理论共同研究对象的一些基础课题的研究; 第八章从“构造主义”的角度专门列出迄今为止所知的一些重要双序集 (主要是正则的) 的详细构作方法和特征刻画, 这些成果涉及的人较多, 其中也包括作者自己. 作者认为, 本书涉及的内容多数仍遗留下许多待解决的问题, 希望读者在阅读本书后可以由此出发进行深入一步的研究. 自然, 由于篇幅所限, 许多课题本书未曾涉及, 例如 Clifford 关于“正则经 (regular warp) ”的理论及双序集在语言代数中的应用等等.

本书是作者在给研究生讲授有关课程所用讲义的基础上经过多次修改完成的. 由于主客观多方面的原因, 本书的出版一再被推迟. 作者非常感谢十多年来一直给我鼓励和关心本书出版的我的导师、朋友和亲人们. 我的导师郭聿琦教授建议书名取为《半群的双序集理论》(原来取名为《双序集引论》) 以突出双序集和半群的本质联系, 并为本书作序. 我的夫人李丽副教授更是不断给我鼓励并亲自为我的文章绘图. 没有所有这些人的帮助, 本书的出版是不可能的.

由于作者的知识和水平的限制, 书中难免会有若干错误. 敬请读者批评指正.

喻秉钧

2002 年 10 月 7 日于狮子山桂苑

目　录

第一章 双 序 集

双序集理论是由印度数学家 K. S. S. Nambooripad 于 1973 年建立的. 其中心思想是利用半群中幂等元之间的联系揭示整个半群的内在结构. Nambooripad 发现, 任意半群的幂等元集合, 如果不空, 可以简化为一种部分 2 代数, 称为双序集, 它在一定程度上可以恢复整个半群的原有结构. 特别地, 对于正则半群, Nambooripad 建立了正则双序集的范畴理论, 并用它解决了任意正则半群的结构问题. 本章介绍双序集的定义和性质. 内容取自 K. S. S. Nambooripad[34,35].

§1.1 双序集的定义

设 E 为非空集, $D_E \subseteq E \times E$. 若存在从 D_E 到 E 的映射 p, 则称 E 为一个*部分 2 代数*(partial 2-algebra); 称 p 是 E 的*基本积*(basic product).$\forall (e,f) \in D_E$, 常简记 $p(e,f)$ 为 ef; 若 $\forall e,f,g \in E$, $(ef)g$ 与 $e(fg)$ 存在蕴含 $(ef)g = e(fg)$, 则称 E 为*部分半群*(partial semigroup).

设 E 为一个部分 2 代数, 以下几个二元关系将在本书中扮演中心的角色:

$$\omega^l = \{(e,f) \in D_E | ef = e\}, \qquad \omega^r = \{(e,f) \in D_E^{-1} | fe = e\},$$

$$\kappa = \omega^l \cup \omega^r, \quad \omega = \omega^l \cap \omega^r, \quad \mathcal{L} = \omega^l \cap (\omega^l)^{-1}, \quad \mathcal{R} = \omega^r \cap (\omega^r)^{-1}.$$

对任意 $e \in E$, 记

$$\omega^l(e) = \{f \in E | f \,\omega^l\, e\}, \qquad \omega^r(e) = \{f \in E | f \,\omega^r\, e\}, \qquad \omega(e) = \{f \in E | f \,\omega\, e\}$$

分别称为 e 生成的*左*、*右理想* 和 *ω- 理想*(left,right,ω-ideals). 若 A 是用上述二元关系表述的关于 E 的一个命题, 将 A 中的 ω^l, ω^r 互换并改变相应基本积的左右顺序, 所得命题 A^* 称为 A 的对偶.

定义 1.1 设 E 为一个部分 2 代数. 称 E 为*双序集* (biorded sets), 若下述六个公理及其对偶成立, 其中, e,f,g 等表示 E 中的任意元素.

(B1) ω^l 与 ω^r 均为*拟序*(满足反身性和传递性), 且 $D_E = \kappa \cup \kappa^{-1}$.

(B21) $f \,\omega^r\, e \Rightarrow f \,\mathcal{R}\, fe \,\omega\, e$.

(B22) $g \,\omega^l\, f,\ f,g \in \omega^r(e) \Rightarrow ge \,\omega^l\, fe$.

(B31) $g \,\omega^r\, f \omega^r\, e \Rightarrow gf = (ge)f$.

(B32) $g \,\omega^l\, f,\ f,g \in \omega^r(e) \Rightarrow (fg)e = (fe)(ge)$.

(B4) $g,f \in \omega^r(e), ge \,\omega^l\, fe \Rightarrow$ 存在 $g_1 \in \omega^r(e)$, 满足 $g_1 \,\omega^l\, f$ 且 $g_1 e = ge$.

下述定理说明，双序集产生的背景是含幂等元的任意半群.

定理 1.2 设 S 为半群，其幂等元集不空，记为 $E(S)$. 令

$$D_{E(S)} = \{(e,f) \in E(S) \times E(S) | \{ef, fe\} \cap \{e,f\} \neq \emptyset\},$$

则 S 的运算在 $D_{E(S)}$ 上的限制使 $E(S)$ 成为一个双序集. 称为半群 S 的幂等元双序集.

证明 留给读者. □

设 E 为双序集. 易验，ω 为偏序，$\mathcal{L}$ 和 $\mathcal{R}$ 是 E 上等价关系，且 $\mathcal{L} \cap \mathcal{R} = 1_E$.

对任意 $e,f \in E$. 记 $M(e,f) = \omega^l(e) \cap \omega^r(f)$. 称为 (e,f) 的M- 集. 在 $M(e,f)$ 上定义二元关系 $\prec$ 为：$\forall g,h \in M(e,f)$,

(1.3) $$g \prec h \iff eg\,\omega^r\,eh \text{ 且 } gf\,\omega^l\,hf.$$

易知 $\prec$ 是 $M(e,f)$ 上拟序.

定义 1.4 设 E 为双序集，$e,f \in E$. 集

$$S(e,f) = \{h \in M(e,f) | \forall g \in M(e,f),\ g \prec h\}$$

称为 (e,f) 的*夹心集* (sandwich set).

称 E 为*正则双序集* (regular biordered set), 若下述公理成立

(R) $\forall e,f \in E,\ S(e,f) \neq \emptyset$.

夹心集对半群中元素乘积的正则性刻画具有关键性作用，如以下定理 1.5 所示.

定理 1.5 设 S 为半群，$E(S) \neq \emptyset$. 对任意 $e,f \in E(S)$, 令

$S_1(e,f) = \{h \in M(e,f) | ehf = ef\}$, $S_2(e,f) = M(e,f) \cap V(e,f)$. 则有

(1) $S_1(e,f) = S_2(e,f) \subseteq S(e,f)$.

(2) ef 为正则元当且仅当 $S_1(e,f) \neq \emptyset$ 且在此时有 $S_1(e,f) = S(e,f)$.

(3) 若 S 为正则半群，则 $E(S)$ 是正则双序集.

证明 留给读者. □

习题 1.1

1. 若 E 是满足公理 (B1) 的部分 2 代数，则 (E,ω) 是偏序集.

2. 证明定理 1.2.

3. 证明定理 1.5.

4. 证明：偏序集 $(E,\leq)$ 为半格的充要条件是：若在 E 上定义基本积为：ef 有定义当且仅当 $(e,f) \in \leq \cup \leqslant^{-1}$, 则 E 为满足 $\leq = \omega^l = \omega^r$ 的正则双序集.

5. 设半群 $S = \langle p,q | pqp = p,\ qpq = q \rangle$. 证明 $E(S)$ 满足 $\omega^l = \omega^r = \omega$, 但不是半格.

6. 设 $(\Gamma,\leq)$ 为半格，X 为非空集. 令 $E = (X \times \Gamma) \cup \{0\}$, 在 E 上定义部分二元运算为：$\forall (x,e),(y,f) \in X \times \Gamma$, $(x,e)(y,f)$ 有定义当且仅当 $(e,f) \in \leq \cup \leq -1$ 且在此时有

$(x,e)(y,f)=(x,ef)$; 又 $(x,e)0=0(x,e)=00=0$. 证明: 这使得 E 是一个正则双序集且 (E,ω) 为半格. 但是当 $|X|>1$ 时, 在 E 中有 $\omega^r=\omega\neq\omega^l$.

§1.2 双序态射, 双序集范畴

定义 1.6 设 E 和 E' 为二双序集, θ 是从 E 到 E' 的映射. 称 θ 为*双序态射*(bimorphism 或 biorder morphism), 若它满足公理

(M) $\forall (e,f)\in D_E, (e\theta, f\theta)\in D_{E'}$ 且 $(ef)\theta=(e\theta)(f\theta)$.

称双序态射 θ 为*正则*的, 若它还满足下述二公理, $\forall e,f\in E$,

(RM1) $S(e,f)\theta\subseteq S'(e\theta,f\theta)$,

(RM2) $S(e,f)\neq\emptyset \Longleftrightarrow S'(e\theta,f\theta)\neq\emptyset$, 其中 $S'(e',f')$ 表 E' 中 (e',f') 的夹心集.

当双序态射 θ 是双射且 θ^{-1} 也是双序态射时, 称 θ 为*双序同构*, 有时简称为*同构*, 并记为 $E\overset{\theta}{\cong}E'$. 显然, 双序同构是正则双序态射.

若 $\theta_1:E\to E_1,\theta_2:E_1\to E_2$ 为双序态射, 易知 $\theta_1\theta_2$ 亦为双序态射. 特别地, 若 θ_1,θ_2 都正则, 则 $\theta_1\theta_2$ 也正则. 如此, 我们有*双序集范畴*$\underline{\mathcal{B}}$, 它的对象为双序集, 而态射为双序态射; 同时, 我们也有*正则双序集范畴* $\underline{\mathcal{RB}}$, 其对象是正则双序集, 而态射为正则双序态射. 显然, $\underline{\mathcal{RB}}$ 是 $\underline{\mathcal{B}}$ 的子范畴.

当 E 是正则双序集时, 公理 (RM1) 蕴含公理 (RM2). 以下二例说明, 一般情形下该二公理是独立的.

例 1.7 设 $E=\{e,f\},\omega_E^l=\omega_E^r=1_E$; $E'=\{0,e',f'\},\omega_{E'}^l=\omega_{E'}^r=1_{E'}\cup\{(0,e'),(0,f')\}$. 令 $\theta:E\to E'$, $e\theta=e',f\theta=f'$. 易验 θ 是双序态射且满足公理 (RM1), 但 $S'(e\theta,f\theta)=\{0\}\neq\emptyset$ 而 $S(e,f)=\emptyset$, 公理 (RM2) 不成立.

例 1.8 设 B 是乘法表 1.9 的带. 令 $E=B-\{h_{22}\}$. 由于 B 中乘法在 E 上的限制只对积 $fe,fh_{12},h_{21}e$ 与 $h_{21}h_{12}$ 无定义, 而它们都不是双序集 $E(B)$ 中的基本积, 故 B 的部分运算向 E 的限制使 E 成为一双序集; 进而, 不难验证 $E(B)$ 与 E 都正则.

令 θ 是 E 向 $E(B)$ 的嵌入, 它显然是双序态射. 由 E 与 $E(B)$ 的正则性知公理 (RM2) 成立. 但在 E 中 $S(h_{12},h_{21})=\{g_{22}\}$, 而在 $E(B)$ 中 $S'(h_{12},h_{21})=\{h_{22}\}$, 故公理 (RM1) 不成立. 此例还说明 $\underline{\mathcal{RB}}$ 不是 $\underline{\mathcal{B}}$ 的全子范畴.

定理 1.10 设 $\underline{\mathcal{S}}$ 是对象为含幂等元的半群, 态射为半群同态的范畴. 令 E 在对象上作用为 $S\to E(S)$; 而在态射上作用为 $\phi:S\to S',E(\phi)=\phi|E(S)$. 那么 E 是从 $\underline{\mathcal{S}}$ 到 $\underline{\mathcal{B}}$ 的共变函子. 特别地, 若记 $\underline{\mathcal{RS}}$ 为正则半群范畴 (它是 $\underline{\mathcal{S}}$ 的全子范畴), 则 E 在 $\underline{\mathcal{RS}}$ 上的限制是到 $\underline{\mathcal{RB}}$ 的共变函子, 且 $\forall S,S'\in ob(\underline{\mathcal{RS}}),\phi:S\to S',E(S\phi)=E(S)E(\phi)$.

表 1.9

	e	f	h_{11}	h_{12}	h_{21}	h_{22}	g_{11}	g_{12}	g_{21}	g_{22}
e	e	h_{11}	h_{11}	h_{12}	h_{11}	h_{12}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
f	h_{22}	f	h_{21}	h_{22}	h_{21}	h_{22}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
h_{11}	h_{12}	h_{11}	h_{11}	h_{12}	h_{11}	h_{12}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
h_{12}	h_{12}	h_{11}	h_{11}	h_{12}	h_{11}	h_{12}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
h_{21}	h_{22}	h_{21}	h_{21}	h_{22}	h_{21}	h_{22}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
h_{22}	h_{22}	h_{21}	h_{21}	h_{22}	h_{21}	h_{22}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
g_{11}	g_{11}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{11}	g_{12}	g_{11}	g_{12}
g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{12}	g_{11}	g_{12}	g_{11}	g_{12}
g_{21}	g_{21}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}
g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{22}	g_{21}	g_{22}	g_{21}	g_{22}

证明 $\forall S, S' \in ob(\underline{S})$ 及 $\phi: S \to S'$, 由于 ϕ 保持运算, $E(\phi) = \phi|E(S)$ 显然是 $E(S)$ 到 $E(S')$ 的映射且保持关系 ω^l, ω^r, 故公理 (M) 成立. 又 $\forall S, S', S'' \in ob(\underline{S})$ 及 $\phi: S \to S', \phi': S' \to S''$, 因为 $E(S)\phi \subseteq E(S')$, 故 $E(\phi\phi') = \phi\phi'|E(S) = \phi|E(S)\phi|E(S') = E(\phi)E(\phi')$. 特别地 $E(1_S) = 1_S|E(S) = 1_{E(S)}$. 故 E 是从 $\underline{S}$ 到 $\underline{B}$ 的共变函子.

设 $S, S' \in \underline{\mathcal{RS}}, \phi: S \to S', e, f \in E(S), h \in S(e, f)$, 由 ϕ 为同态易得 $hE(\phi) \in M(eE(\phi), fE(\phi))$ 且

$$eE(\phi)hE(\phi)fE(\phi) = e\phi h\phi f\phi = (ehf)\phi = ef\phi = eE(\phi)fE(\phi).$$

故由定理 1.5 得 $hE(\phi) \in S'(eE(\phi), fE(\phi))$, 故公理 (RM1) 成立. 再据该定理, $E(S)$ 是正则双序集, 故公理 (RM2) 亦成立, 如此, $E(\phi)$ 是正则双序态射. 故 E 向 $\underline{\mathcal{RS}}$ 的限制是到 $\underline{\mathcal{RB}}$ 的共变函子. 定理中最后一个等式是关于正则半群幂等元提升性 (Lallement 引理) 的推论. □

习题 1.2

1. 设 $S, S' \in ob\underline{\mathcal{RS}}, \phi: S \to S', E(S') \subseteq E(S)\phi$. 证明: $E(\phi)$ 是双序同构当且仅当它是单双序态射; 当且仅当 $\mathrm{Ker}\phi \subseteq \mathcal{H}$. 该结论对 $\underline{S}$ 是否成立?

2. 举例说明等式 $E(S\phi) = E(S)E(\phi)$ 在 $\underline{S}$ 中不一定成立.

§1.3 双 序 子 集

定义 1.11 设 E 为双序集, $E' \subseteq E$. 称 E' 为 E 的*双序子集*(biordered subset), 若 E 的部分运算在 E' 上的限制使 E' 也成为一个双序集. 进而, 称双序子集 E' 在 E 中*相对正则*(relatively regular), 若嵌入映射是正则双序态射.

定理1.12 设 E 为双序集, $E' \subseteq E.E'$ 为 E 的双序子集当且仅当下述二条件及其对偶成立:

(i) $\forall e,f \in E',(e,f) \in D_E \Longrightarrow ef \in E'$;

(ii) $\forall g,h,e \in E'$, 若 $g,h \in \omega^r(e)$ 且 $ge\,\omega^l\,he$, 则存在 $g_1 \in E'$, 使 $g_1e = ge$, 且 $g_1 \in M(h,e)$.

进而, E' 在 E 中相对正则当且仅当

(iii) $\forall e,f \in E',S'(e,f) = S(e,f) \cap E'$, 且 $S(e,f) \neq \emptyset$ 蕴含 $S'(e,f) \neq \emptyset$.

证明 条件 (i),(ii) 的必要性显然. 为证充分性, 首先注意, 条件 (i) 保证

$$\omega^l_{E'} = \omega^l_E \cap (E' \times E'), \qquad \omega^r_{E'} = \omega^r_E \cap E' \times E',$$

因而 $D_{E'} = D_E \cap (E' \times E')$. 这样, 公理 (B1) 及 (B21)~(B32) 在 E 中成立保证它们在 E' 中亦成立. 而条件 (ii) 保证公理 (B4) 在 E' 中也成立, 故 E' 是双序集.

条件 (iii) 显然保证 E' 在 E 中相对正则. 当 E' 在 E 中相对正则时, $1_{E'}$ 是正则双序态射, $\forall e,f \in E'$, 由 (RM1) 得 $S'(e,f) \subseteq S(e,f) \cap E'$; 若 $S'(e,f) = \emptyset$, 由 (RM2), 得 $S(e,f) = \emptyset$; 而若 $S'(e,f) \neq \emptyset$, 由定义直接有 $S(e,f) \cap E' \subseteq S'(e,f)$. 故总有 $S'(e,f) = S(e,f) \cap E'$, 且 $S(e,f) \neq \emptyset \Rightarrow S'(e,f) \neq \emptyset$. 此即条件 (iii). □

命题1.13 设 E 为双序集, 则公理 (B4) 中的元 g_1 是惟一的.

证明 设 $g,f \in \omega^r(e), ge\,\omega^l\,fe$, 而 $g_1,g_2 \in M(f,e)$, 满足 $g_1e = ge = g_2e$. 那么, 由 (B21), 我们有 $g_2\,\mathcal{R}\,g_2e = g_1e\,\mathcal{R}\,g_1$ 及 $fg_i\,\omega^r\,f\,\omega^r\,e, i = 1,2$. 据 (B31) 和 (B32) 得 $fg_2 = ((fg_2)e)f = ((fe)(g_2e))f = ((fe)(g_1e))f = ((fg_1)e)f = fg_1$, 但由 (B21)*, 我们有 $g_2\,\mathcal{L}\,fg_2 = fg_1\,\mathcal{L}\,g_1$. 故得 $g_2 = g_1$. □

命题1.14 设 E 为双序集, $\{E_i|i \in I\}$ 是 E 的一族双序子集. 若 $E' = \cap_{i\in I}E_i \neq \emptyset$, 则它也是 E 的双序子集. 进而, 若每个 E_i 都在 E 中相对正则, 且对任意 $i \in I$ 和 $e,f \in E_i,(e,f)$ 在 E_i 中的夹心集都与 (e,f) 在 E 中的夹心集相等, 则 E' 也在 E 中相对正则.

证明 当 $E' \neq \emptyset$ 时, 定理 1.12 中的条件 (i) 对每个 E_i 成立保证它对 E' 成立; 而 (ii) 对 E' 成立可由它对每个 E_i 成立及命题 1.13 而得.

若对任意 $i \in I$ 和 $e,f \in E_i,(e,f)$ 在 E_i 中的夹心集都与 (e,f) 在 E 中的夹心集相等, 那么我们有 $S'(e,f) = S(e,f), \forall e,f \in E'$. 这保证了定理 1.12 中的条件 (iii) 成立. 故 E' 在 E 中相对正则. □

注 本命题中相对正则性条件可减弱为"除某 $i_0 \in I$ 外对任意 $i \in I$". 尚不知能否去掉该条件.

命题1.15 设 E 为双序集. $\forall e \in E, \omega^l(e), \omega^r(e)$ 及 $\omega(e)$ 都是 E 的相对正则的双序子集.

证明 我们先证 $\omega^r(e)$ 是 E 的相对正则双序子集. 设 $f,g \in \omega^r(e)$ 且 $(g,f) \in$

D_E. 不妨设 $g\,\omega^r f$. 由 (B21) 有 $gf\,\omega\, f\,\omega^r e$, 故 $gf \in \omega^r(e)$, 即定理 1.12 之条件 (i) 对 $\omega^r(e)$ 成立. 进而, 设 $f,g,h \in \omega^r(e)$, 若有 $g,h \in \omega^r(f)$ 且 $gf\,\omega^l hf$, 则由 (B4) 所得 g_1 满足 $g_1 \mathcal{R} g_1 f = gf\, \mathcal{R}\, g\,\omega^r e$, 因而 $g_1 \in \omega^r(e)$; 若有 $g,h \in \omega^l(f)$, 且 $fg\,\omega^r fh$, 则由 (B4)* 所得 g_1 满足 $g_1\,\omega^r h\,\omega^r e$, 也有 $g_1 \in \omega^r(e)$. 故条件 (ii) 也成立. 最后, 因为 $S(f,g) \subseteq M(f,g) = \omega^l(f) \cap \omega^r(g)$, 故当 $g \in \omega^r(e)$ 时亦有 $S(f,g) \subseteq M(f,g) \subseteq \omega^r(e)$. 从而定理 1.12 中的条件 (iii) 也成立. 这就证明了 $\omega^r(e)$ 是 E 的相对正则的双序子集.

对偶可证, $\omega^l(e)$ 也是 E 的相对正则的双序子集. 注意到对 $f,g \in \omega(e)$, 我们有 $S(f,g) \subseteq \omega^l(f) \cap \omega^r(g) \subseteq \omega^l(e) \cap \omega^r(e) = \omega(e)$, 由命题 1.14 得 $\omega(e) = \omega^l(e) \cap \omega^r(e)$ 是 E 的相对正则双序子集. □

在本节余下部分, 我们来考虑双序子集的正则性和相对正则性的关系.

易知, 正则双序集的每个相对正则双序子集必为正则双序集. 但例 1.8 说明其逆不真. 下述定理说明在与子半群正则性的联系上, 二者是等价的.

定理 1.16 设 S 是半群, $E(S) \neq \emptyset$,E' 是 $E(S)$ 的正则双序子集. 那么 E' 是 S 的某正则子半群的幂等元双序集当且仅当 E' 在 $E(S)$ 中相对正则, 且 $\forall e,f \in E'$, 在 $E(S)$ 中有 $S_1(e,f) \neq \emptyset$.

证明 设有 S 的正则子半群 S' 使 $E(S') = E'$. 由定理 1.5,$\forall e,f \in E'$, 在 E' 中有 $S'(e,f) = S_1'(e,f) = M(e,f) \cap V(e,f) \cap S' \neq \emptyset$, 因为 ef 在 S' 中正则确保它在 S 中也正则, 故在 $E(S)$ 中亦有 $\emptyset \neq S(e,f) = S_1(e,f) = M(e,f) \cap V(e,f) \cap S \supseteq S'(e,f)$. 这说明 E' 向 $E(S)$ 的嵌入满足定义 1.6 的公理 (RM1). 由于 $E',E(S)$ 都是正则双序集, 嵌入映射平凡地满足公理 (RM2). 故 E' 在 $E(S)$ 中相对正则.

反之, 设 $E(S)$ 的正则双序子集 E' 在 $E(S)$ 中相对正则且 $\forall e,f \in E'$, 在 $E(S)$ 中有 $S_1(e,f) \neq \emptyset$. 令 S' 为 E' 在 S 中生成的子半群. 我们先归纳地证明, 对任意 $x \in S'$, 存在 $e \in E$, 使 $e\,\mathcal{L}^{S'} x$, 从而 S' 正则.

$\forall e,f \in E'$, 因 $S_1(e,f) \neq \emptyset$, 由定理 1.5 之 (2), 在 $E(S)$ 中有 $S(e,f) = S_1(e,f) \neq \emptyset$. 由于 E' 在 $E(S)$ 中相对正则, 据定理 1.12 有 $S'(e,f) = S_1(e,f) \cap E' \neq \emptyset$. 显然, 这就得到 $S_1'(e,f) \neq \emptyset$, 任取 $h \in S_1'(e,f)$, 我们有 $hf = h(ef) \in E'$, 且 $hf\,\mathcal{L}^{S'} ef$.

现在, 归纳假设 E' 中任意 n 个元素之积都满足所述性质而 $x = f_0 f_1 \cdots f_n = x' f_n, f_i \in E', i = 0,1,\cdots,n$. 由归纳假设, 有 $e' \in E'$ 使 $e'\,\mathcal{L}^{S'} x'$. 令 $g \in S_1'(e',f_n)$. 那么 $gf_n \in E'$ 且 $g\,\mathcal{L}^{S'} e'g$. 由 $\mathcal{L}^{S'}$ 为右同余, 立得 $gf_n\,\mathcal{L}^{S'} e'gf_n = e'f_n\,\mathcal{L}^{S'} x'f_n$. 这就证明了我们的第一个断言.

为证 $E(S') = E'$, 显然只需证 $E(S') \subseteq E'$. 任取 $x \in E(S')$. 由第一个断言及其对偶, 有 $e,f \in E'$, 使 $e\,\mathcal{L}^{S'} x\,\mathcal{R}^{S'} f$. 据 Miller-Clifford 定理, 有 $f\,\mathcal{L}^{S'} ef\,\mathcal{R}^{S'} e$. 令 $h \in S_1'(e,f) \subseteq E'$. 由于 $h \in V(ef)$, 有 $hf = hef\,\mathcal{L}^{S'} ef\,\mathcal{L}^{S'} f$. 但由 $h\,\omega^r f$ 知 $hf\,\omega\, f$, 故 $hf = f$ 从而 $h\,\mathcal{R}^{S'} f$. 类似可证, $h\,\mathcal{L}^{S'} e$. 于是得 $h\,\mathcal{H}^{S'} x$. 但两者均为

幂等元，故得 $x=h\in E'$. 这就完成了我们的证明. □

推论 1.17 设 S 为正则半群， E' 是 $E(S)$ 的正则双序子集. 那么， E' 在 $E(S)$ 中相对正则的充要条件是 E' 生成 S 的正则子半群且 $E(\langle E'\rangle)=E'$. □

习题 1.3

试证命题 1.14 后的注中所述该命题的减弱结论.

§1.4 双序集是部分半群

双序集公理中不包含部分运算的结合律，这给证明和实际计算带来很大不便. 我们在本节介绍 Premchand[44] 的结果，证明双序集实为部分半群，从而可在今后的证明与计算中简化某些步骤. 在此基础上，我们给出一个与定义 1.1 等价的公理体系，其中不但含有结合性公理，而且每个公理都是自身左右对偶的. 因而其形式较定义 1.1 为简单.

命题 1.18 设 E 是满足双序集公理中 (B1)~(B32) 及其对偶的部分 2 代数. 对 $e,f,g\in E$, 若 $(ef)g$ 与 $e(fg)$ 都有定义，则 $(ef)g=e(fg)$. 从而 E 是部分半群.

证明 设 $e,f,g\in E, ef, fg$ 有定义. 由公理 (B1), 必有下述 16 种情形之一出现：

(1) $e\,\omega^r\,f\,\omega^r\,g$;	(2) $e\,\omega^r\,f\,(\omega^r)^{-1}\,g$;
(3) $e\,\omega^r\,f\,\omega^l\,g$;	(4) $e\,\omega^r\,f\,(\omega^l)^{-1}\,g$;
(5) $e\,(\omega^r)^{-1}\,f\,\omega^r\,g$;	(6) $e\,(\omega^r)^{-1}\,f\,(\omega^r)^{-1}\,g$;
(7) $e\,(\omega^r)^{-1}\,f\,\omega^l\,g$;	(8) $e\,(\omega^r)^{-1}\,f\,(\omega^l)^{-1}\,g$;
(9) $e\,\omega^l\,f\,\omega^r\,g$;	(10) $e\,\omega^l\,f\,(\omega^r)^{-1}\,g$;
(11) $e\,\omega^l\,f\,\omega^l\,g$;	(12) $e\,\omega^l\,f\,(\omega^l)^{-1}\,g$;
(13) $e\,(\omega^l)^{-1}\,f\,\omega^r\,g$;	(14) $e\,(\omega^l)^{-1}\,f\,(\omega^r)^{-1}\,g$;
(15) $e\,(\omega^l)^{-1}\,f\,\omega^l\,g$;	(16) $e\,(\omega^l)^{-1}\,f\,(\omega^l)^{-1}\,g$.

以下，我们列出 6 个引理，命题 1.18 是它们的推论. 这些引理的证明都是利用公理 (B1)~(B32) 进行结合律的验算. 为避免过分冗长，我们只给出有代表性的两个引理之证明，而将其余证明作为习题留给读者.

引理 1.19 若情形 (1),(3),(5),(6),(7),(8),(11),(15) 或 (16) 之任一成立, 则 $(ef)g$ 与 $e(fg)$ 有定义且 $(ef)g=e(fg)$. □

引理 1.20 若情形 (10) 成立且 $(ef)g$ 与 $e(fg)$ 中一个有定义，则两者皆有定义且相等. □

引理 1.21 设情形 (9) 成立. 若 $e(fg)$ 有定义，则 $(ef)g$ 有定义且二者相等;

对偶地，设情形 (14) 成立，若 $(ef)g$ 有定义，则 $e(fg)$ 有定义且二者相等.

证明　设 $e\omega^l f\omega^r g$ 且 $e(fg)$ 有定义. 此时，下述四关系之一必成立：

$$\text{(a) } e\omega^r fg;\qquad \text{(b) } fg\omega^r e;\qquad \text{(c) } e\omega^l fg;\qquad \text{(d) } fg\omega^l e.$$

当 (a) 成立时，有 $e\omega^r fg\omega^r f\omega^r g$, 化为情形 (1), 由引理 1.19 得.

当 (b) 成立时，有 $f\mathcal{R}fg\omega^r e\omega^l f$, 故 $e=ef=f$, 从而 $(ef)g=fg=f(fg)=e(fg)$.

当 (c) 成立时，有 $e\omega^l fg\omega g$, 故 $(ef)g=eg$ 有定义且 $(ef)g=eg=e=e(fg)$.

当 (d) 成立时，有 $fg\omega^l e\omega^l f\mathcal{R}fg$, 故 $fg=(fg)f=f$, 于是有 $e\omega^l f\omega^l g$, 化为情形 (11), 由引理 1.19 得. □

引理1.22　设情形 (13) 成立. 若 $(ef)g$ 和 $e(fg)$ 均有定义，则 $(ef)g=e(fg)$. □

引理1.23　设情形 (2) 或 (12) 成立. 若 $(ef)g$ 和 $e(fg)$ 均有定义，则 $(ef)g=e(fg)$.

证明　设 $e\omega^r f(\omega^r)^{-1}g$, 由 $(ef)g$ 有定义，必有下述四关系之一：

$$\text{(a) } ef\omega^r g;\qquad \text{(b) } g\omega^r ef;\qquad \text{(c) } ef\omega^l g;\qquad \text{(d) } g\omega^l ef.$$

当 (a) 成立时，有 $e\mathcal{R}ef\omega^r g\omega^r f$, 据 (B31) 得 $(ef)g=eg=e(fg)$.

当 (b) 成立时，有 $g\omega^r ef\mathcal{R}e$, 故 $(ef)g=g=eg=e(fg)$.

当 (c) 成立时，由 $e(fg)$ 有定义，还有下述四关系之一：

$$\text{(c1) } e\omega^r fg;\qquad \text{(c2)} fg\omega^r e;\qquad \text{(c3)} e\omega^l fg;\qquad \text{(c4) } fg\omega^l e.$$

设 (c1) 成立，有 $ef\mathcal{R}e\omega^r fg=g$, 即 $ef\omega^r g$, 化为情形 (a); 类似地，(c2) 化为 (b).

设 (c3) 成立，有 $f\omega^r e\omega^l fg=g$, 故 $ge\omega g\omega^r f$, 据公理 (B31) 得 $(ge)f=((ge)f)g=(ge)g=ge$. 如此，有 $e\mathcal{L}ge=(ge)f=g(ef)\mathcal{L}ef$. 又由 $e\omega^r f$, 有 $e\mathcal{R}ef$, 故得 $e=ef$. 如此，$e\omega^l f(\omega^r)^{-1}g$, 化为情形 (10). 因为 $(ef)g$ 存在，据引理 1.20 得 $(ef)g=e(fg)$.

设 (c4) 成立，有 $ef\omega^l g=fg\omega^l e$, 但 $e\mathcal{R}ef$, 故 $ef=e$, 从而 $g\omega^l e\omega^l f$. 由 (B31)* 得 $(ef)g=eg=e(fg)$.

当 (d) 成立时，与上类似，有 (因 $fg=g$) 下述四关系之一：

$$\text{(d1) } e\omega^r g;\qquad \text{(d2) } g\omega^r e;\qquad \text{(d3) } e\omega^l g;\qquad \text{(d4) } g\omega^l e.$$

设 (d1) 成立，有 $ef\omega^r g\omega^l ef$, 故 $g=ef$, 由此得 $(ef)g=ef=e(ef)=eg=e(fg)$.

设 (d2) 成立，有 $g\omega^r e\mathcal{R}ef$, 故 $(ef)g=g=eg=e(fg)$.

设 (d3) 成立，有 $e\,\omega^l\,g\,\omega^l\,ef\,\mathcal{R}\,e$，故 $e=ef$，从而 $e\,\omega^l\,f\,(\omega^l)^{-1}\,g$，化为情形 (10)，因 $(ef)g$ 有定义，由引理 1.20 得 $(ef)g=e(fg)$.

设 (d4) 成立，由 $g\,\omega^l\,e$ 及 $g,e\in\omega^r(f)$，据公理 (B32) 得 $(eg)f=(ef)(gf)$. 因为 $g\,\omega^l\,ef\,\omega\,f$，上式即 $(eg)f=(ef)g$. 又因 $eg\,\omega\,e\,\omega^r\,f$，$eg\,\mathcal{L}\,g\,\omega\,f$，故 $eg\,\omega\,f$. 从而得到 $(ef)g=(eg)f=eg=e(fg)$.

对偶地，可证关于情形 (12) 的结论. □

引理 1.24 设情形 (4) 成立. 若 $(ef)g$ 与 $e(fg)$ 都有定义，则 $(ef)g=e(fg)$. □

作为推论，我们得到

定理 1.25 双序集是部分半群. □

为应用方便，我们约定，对部分 2 代数 E 中元素 x,y,z，说 xyz 有定义，指的是 $xy,yz,(xy)z$ 及 $x(yz)$ 均有定义且 $(xy)z=x(yz)=xyz$. 特别地，若 E 是满足双序集公理中 (B1)~(B32) 及其对偶的部分 2 代数，则对任意 $x\in\kappa(y),\kappa\in\{\omega^l,\omega^r,\omega\}$ 积 yxy 有定义.

下述命题之证与引理 1.23 相似，留给读者.

命题 1.26 设 E 是一个部分 2 代数，满足双序集公理中的 (B1)~(B32) 及其对偶. 设 $e,f,g\in E$ 且 $e,f\in\omega^r(g)\ [\omega^l(g)]$，若 ef 有定义，则 $(geg)(gfg)$ 与 $g(ef)g$ 均有定义且 $(geg)(gfg)=g(ef)g$. □

命题 1.27 设 E 是一个部分 2 代数，满足双序集公理的 (B1)~(B32) 及其对偶. E 是双序集的充要条件是它满足

(A5) $\forall e,f,g\in E,\{e,f\}\subseteq\omega^r(g)$ 或 $\{e,f\}\subseteq\omega^l(g)$，则 $gS(e,f)g=S(geg,gfg)$.

证明 我们只需证明，此时公理 (B4) 与 (A5) 中 $\{e,f\}\subseteq\omega^r(g)$ 时的断言等价.

设 E 满足 (B4) 且 $\{e,f\}\subseteq\omega^r(g)$. 对 $h\in S(e,f)$，有 (B21),(B22) 知 $ghg=h\in M(eg,fg)=M(geg,gfg)$. 任取 $k'\in M(geg,gfg)$，则 $k'\,\omega\,g$，从而 k',e,g 满足 (B4) 的条件，故存在 $k\in M(e,g)$ 满足 $gkg=kg=k'g=k'$. 由此，$k\,\mathcal{R}\,k'\,\omega^r\,fg\,\mathcal{R}\,f$，故 $k\in M(e,f)$. 由 $h\in S(e,f)$，有 $k\prec h$，故由 (B32) 得

$$(geg)k'=(eg)(kg)=(ek)g\,\omega^r\,(eh)g=(eg)(hg)=(geg)(ghg).$$

又由命题 1.26 及 (b22) 得

$$k'(gfg)=(gkg)(gfg)=g(kf)g=(kf)g\,\omega^l\,(hf)g=(ghg)(gfg).$$

这表明在 $M(geg,gfg)$ 中有 $k'\prec ghg$，故 $ghg\in S(geg,gfg)$，即 $gS(e,f)g\subseteq S(geg,gfg)$. 为证反包含式，令 $h'\in S(geg,gfg)=S(eg,fg)$. 与前类似，利用 (B4) 可证：存在 $h\in M(e,f)$ 使 $ghg=hg=h'$. 任取 $k\in M(e,f)$，由 (B21),(B22) 可知 $k'=kg=gkg\in M(geg,gfg)$，故有 $(eg)k'=(geg)k'\,\omega^r\,(geg)h'=(eg)h'$ 且