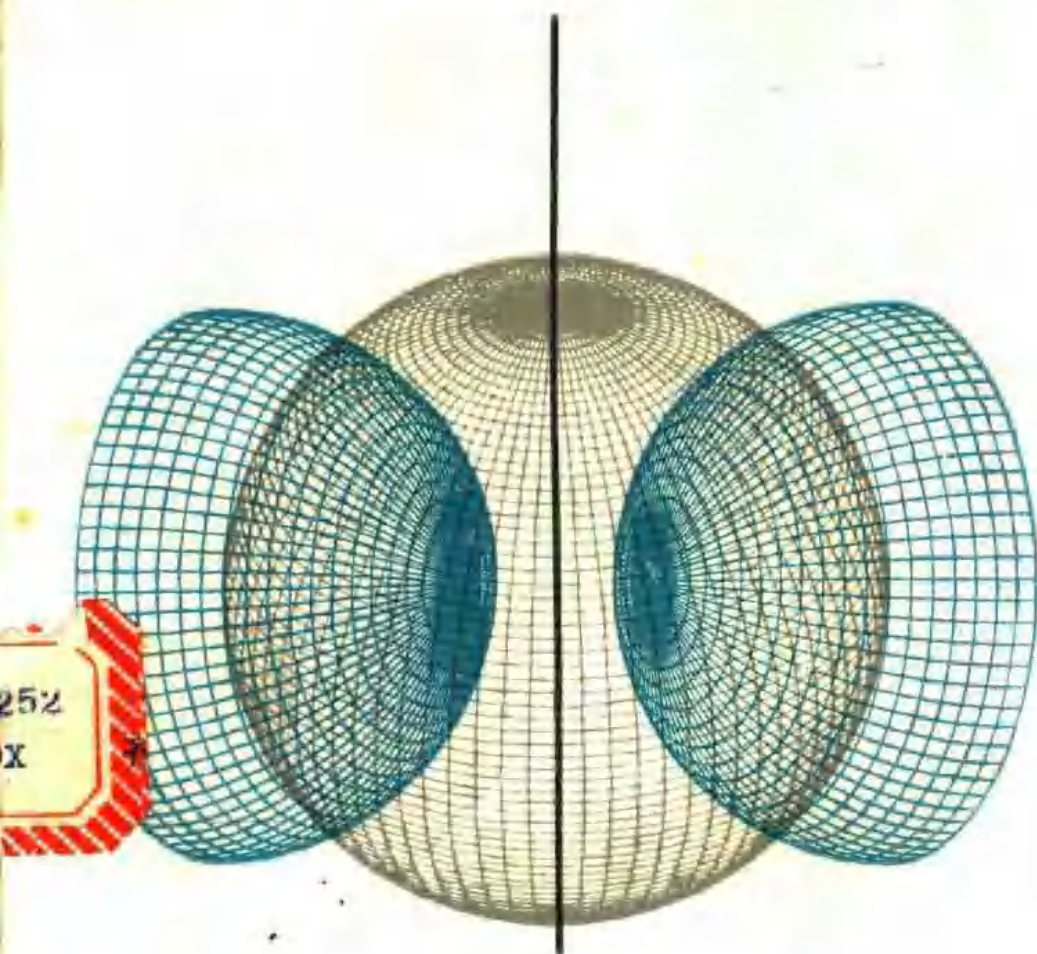


图形及其 计算机探索

齐东旭 梁振珊 马骊良 编

吉林大学出版社



252
X

图形及其计算机探索

齐东旭 梁振珊 马驹良 编

吉 林 大 学 出 版 社

图形及其计算机探索

齐东旭 梁振珊·马驹良 编

责任编辑：赵洪波

封面设计：张沐沉

吉林大学出版社出版
(长春市解放大路85号)

吉林省新华书店发行
吉林工学院印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32

1989年12月第1版

印张：6.25

1989年12月第1次印刷

字数：154千字

印数：1—500册

ISBN 7—5601—0416—9/N·7

定价：1.75元

序 言

我们生活在一个图形的世界里。

图形，它包括什么和不包括什么，从来没有一点疑问，却也总是说不清楚。数学研究大小与形状，即数与形，可能是离散的，也可能是连续的；有时是有限的，有时是无穷的。数与形难以截然分开，它们的关联与转化，形成丰富无比的数学世界。

人们习惯把对形的研究归入几何学。就此而言，有各种各样的几何学。任何一种几何，都是从某个方面或某种观点、手法，对图形作出定性或定量的研究。没有哪一种几何可以把图形的研究包罗详尽。

在欧几里得时代，对图形的研究大约仅限于直线形、圆之类的简单对象。就连最基本的几何对象“什么是曲线”这一问题的研究，从阿基米德到Урысон，经历了两千年艰苦的岁月；人类在图形面前显得软弱无力！

后来出现了计算机。

开始时，计算机在数值计算方面显示出人力不可比拟的高效率。然而，就处理图形来说，当时连最简单的直线段也画不出来。随着计算技术的进步，计算机的图形处理功能大为增强，对此最为关注的，首先是与图纸打交道的工程师。图，是工程师的共同语言。一件产品从设计到生产，常常需要数十张甚至成百上千张的图纸。任何差错都可能增加巨大的工作量。因而，当CAD/CAM的各式各样软硬件大批涌现时，工业界有识之士立即以它改变了自己原有的工作方式。

良好的硬件环境、完整的数学模型、有效的软件系统，是发展计算机图形研究及应用的必不可少的条件。

本世纪60年代，法国优秀工程师Pézier在雷诺汽车公司成功地创建了第一条自动流水线，它依据的数学基础发展成一套有效的技巧。这里，古老的Bernstein多项式理论得到了成功的应用，工程师们在计算机屏幕上设计曲线，就像使用往常的作图工具一样得心应手。Bozier多方面的功绩使他在晚年获得了Coons奖；Coons和Bézier被人誉为计算机图形学的开拓者。早在1946年，I.J.Schoenberg便奠定了样条函数的理论基础。随着计算机的发展，样条函数方法在CAD/CAM中发挥了巨大的作用。样条函数与Bernstein理论的沟通，更使自由曲线（面）的设计与研究提高到新的水平。就是在这样的实践背景下，产生了一个新的数学分支——计算几何学。

按A.R.Forrest的说法，计算几何是“用计算机分析综合几何形状信息的分支”。著名数学家苏步青教授指出，计算几何是“代数几何、微分几何、逼近论、计算数学和数控技术的边缘学科”。这就是说，计算几何是强调计算机作用的、涉及领域非常广阔的学科。

目前，计算几何研究的首要对象，是诸如汽车车身设计、飞机外形设计、服装设计、建筑设计等几何造型问题。大体上说，这类对象是“规则”的。

另一方面，“非规则”的几何对象比比皆是。诸如山脉、云烟、波浪、树木、闪电，以及星团、断痕、浸润、肺膜等等，人们发现，没有哪一类传统的方法对此有效。这种非规则的对象尚缺乏恰当的数学模型。

近些年来，经常出现一个叫做“分形”的名词，即Fractal，它是B.Mandelbrot首先命名的。分形几何可以说是本世纪有重大影响的成果之一。1985年的Barnad奖章、1986年的Franklin奖章相继授予了Mandelbrot，以表彰他对科学（不仅是数学）的贡献。Mandelbrot 1924年生于波兰华沙，后移居巴黎、美国，现为Yale大学数学教授。对分形的研究，其重要性远远超出了几何

学的范围，分形出现在许多物理、化学、生物，以及诸多动力系统的理论及实际课题之中。John A. Wheeler说：“谁不熟悉分形，谁不算是科学家”，这话也许说的过分。不过，分形值得普遍重视确是对的。

要了解分形，常常要回顾早年古老的事情：Peano曲线、Koch曲线和Weierstrass的处处连续而处处不可微的反例等等。然而，对历史的回顾，并不意味着分形的发明早在一百年前。Mandelbrot在他的文章“Fractals and the Rebirth of Iteration Theory”(见H. O. Peitgen, P. H. Richter, “The Beauty of Fractals”, pp. 151—180)中特别评论早年优秀数学家们的工作，写道：“……值得赞扬，是由于他们发明了如此的结构，使我能最后把它们串连一起，从而寻到其宝贵的价值；应该受到指责，是由于他们没能在这些结构之间，看到并开发出一种密切的内在联系。他们对待每一结构，象是对待一个畸形怪胎或不受欢迎的反例，这就从根本上忽视和疏漏了它们真实而深刻的内涵。”在近代科学进展中，Fractal与分歧(Bifurcation)、混沌(Chaos)交织在一起尤为物理学家关注，这是毫不奇怪的。计算机辅助分析过程的无限嵌套的几何结构，产生一幅幅变化莫测的、奇境般的图象，使理论工作者叹为观止。计算机对图形研究所起的作用，绝不亚于显微镜对生物、医学的作用。就连早先科学家不直接涉足的艺术领地，分形也提出挑战：在计算机屏幕上生成的山脉、彩云、花草、树木的画面，已开始达到以假乱真的程度！

本书的内容，曾作为吉林大学计算几何方向硕士研究生课程，试用过三期。我们在这本书里讨论图形，特别强调用计算机这一实实在在的工具探索图形的生成、图形的内在属性。由于图形含义太广泛了，我们只能从某几个角度来讨论，不可能是面面俱到。在CAD/CAM中极其有用的自由曲线、自由曲面的生成，我们开列两章讨论其数学基础；对分形，本书只是初步介绍。这些对在计算机上生成图形都是必不可少的基础。至于拼嵌群一章，

我们认为它是从事计算机图形研究和应用的人应有的数学修养。
本书最后一章取名数学实验，通过几个题目，体会图形给人们的
启示。这几个例子虽然互不相干，但是足以引起人们思索：假若
没有计算机，人类在图形面前仍是软弱无力的；计算机使我们真
正地进入了图形世界。

作者

1989年

目 录

序 言

第一章 自由曲线	(1)
§1 基本概念和调配函数.....	(2)
1. 几何信息的计算机表达.....	(2)
2. 插值与拟合.....	(4)
3. 调配函数生成的一般准则.....	(5)
4. 构造调配函数的一类模型——URN	(6)
§2 Bézier 曲线.....	(9)
1. Bézier曲线的定义.....	(9)
2. de Casteljau 算法和子分划算法.....	(10)
3. 导数.....	(12)
4. 合成和几何连续.....	(12)
5. 控制点的重复使用.....	(13)
6. 升阶公式.....	(14)
§3 B 样条曲线.....	(14)
1. B 样条曲线.....	(15)
2. de Boor 算法和子分划算法.....	(17)
3. 导数.....	(19)
4. B 样条曲线和Bézier曲线的关系.....	(19)
5. 样条插值和逼近.....	(20)
§4 多节点B样条曲线.....	(21)
1. 磨光算子.....	(21)
2. 多节点B样条磨光曲线.....	(22)
3. 多节点基样条插值曲线.....	(24)
§5 有理曲线.....	(26)
1. 有理Bézier 曲线.....	(26)

2. 有理 B 样条曲线	(27)
3. 圆锥曲线	(27)
4. Ball 曲线	(28)
§6 曲线段的拼接与调配	(30)
1. Coons 曲线段	(30)
2. 分段三次 C^1 插值曲线	(32)
3. 曲线的调配拼接	(34)
4. 调配曲线	(34)

第一章主要参考文献	(36)
-----------	--------

第二章 自由曲面	(40)
----------	--------

§1 乘积型曲面	(40)
1. 乘积型 Bézier 曲面	(41)
2. 乘积型 B 样条曲面	(42)
3. 乘积型均匀 B 样条曲面	(43)

§2 有限插值和超限插值	(44)
1. 直纹面和有限插值	(44)
2. 再生性和精度集合	(48)
3. Coons 曲面片	(49)
4. Coons 曲面片的各种变体	(53)
5. Brown 曲面	(56)

§3 非四边形曲面片	(57)
1. 三角形域上的超限插值	(58)
2. 三角形域上的有限插值	(64)
3. 五边形曲面片	(65)

§4 Bézier-Bézier 三角形曲面片	(69)
1. 三角形剖分和 Bézier 网	(69)
2. Bézier-Bézier 三角形曲面片	(70)
3. de Casteljau 算法和升阶公式	(71)
4. 方向导数	(72)
5. 子分划算法	(72)

§5 散乱数据的曲面拟合	(74)
--------------	--------

1. Shepard 方法	(74)
2. 基于三角形剖分的插值方法	(76)
3. B 样条曲面的最小二乘拟合	(80)
4. 二步逼近法	(80)
5. 任意曲面上散乱数据的拟合问题	(83)
第二章主要参考文献	(84)
第三章 拼嵌群	(87)
§1 群	(87)
1. 群和子群	(87)
2. 陪集、共轭关系、商群	(90)
3. 同态、同构	(91)
§2 Euclid 群	(92)
§3 拼嵌群	(95)
1. 离散群	(95)
2. 平移子群	(97)
3. 正常拼嵌群	(100)
4. 一般拼嵌群	(103)
5. 不同样模的铺嵌	(105)
6. 不规则铺嵌	(105)
第三章主要参考文献	(106)
第四章 分形	(107)
§1 海岸线模型	(107)
§2 Koch 曲线	(109)
§3 “充满平面”的曲线	(113)
§4 Cantor 集与 Devil 台阶	(116)
§5 非线性映射	(117)
§6 Mandelbrot 集	(120)
§7 图形生成的步骤	(123)
§8 Apollonian 包装及 Perron 树	(127)
§9 分形插值	(130)

第四章主要参考文献	(135)
第五章 自相似	(136)
§1 关于基的概念	(136)
§2 Gauss 整数与复数基	(137)
§3 复平面上 Gauss 整数的表示	(139)
§4 复平面上的分形	(141)
§5 坐标的按位分离	(145)
§6 分离数组的自相似结构	(147)
§7 自相似结构上的正交组	(151)
第五章主要参考文献	(153)
第六章 数学实验	(155)
实验一 关于 Чебышев 多项式的新发现	(155)
实验一参考文献	(158)
实验二 Gauss 和的图示	(158)
实验二参考文献	(160)
实验三 复平面上 $x^1 \rightarrow x^2$ 的二进分解	(161)
实验三参考文献	(163)
实验四 从确定的过程产生非确定的结果	(163)
实验四参考文献	(167)
实验五 “虚假”分歧动力系统的产生 与差分格式的关系	(168)
1. “虚假”的不变圆周	(168)
2. 差分格式的分析	(173)
3. Euler 格式的改进	(178)
实验五参考文献	(183)
实验六 参数形式的曲面绘图	(183)
实验六参考文献	(187)

第一章 自由曲线

作为计算机辅助图形生成的数学方法，第一章和第二章介绍CAGD中的自由曲线和自由曲面的设计。

CAGD是计算机辅助几何设计(Computer Aided Geometric Design) 的缩写。它是用计算机表达、设计并处理曲线、曲面、实体等几何信息的新兴研究领域。自由曲线和自由曲面的设计，不仅在诸如汽车车身、船体、飞机机身和机翼、涡轮叶片、服装和鞋样、器皿和玩具等各种产品的造型中起着关键作用，而且在地质勘探、海洋、气象、物理学甚至医学现象的实验数据的曲面拟合中，也有广泛应用。在现代计算机出现以前，曲面是用曲线族来描述的，例如，在产品造型中，通常用截面线和一些特征线来刻画产品的形状，利用这些信息制作样板，再用样板生成主模型，最后用拷贝方法由主模型做出冲模。近三十年来，随着数控机床和计算机的飞跃发展，要求曲面设计计算机化，即要求建立数学模型。本世纪60年代，S.A.Coons (见〔1〕)和P.E.Bézier (见〔2〕)先后完成了这一领域的奠基性工作。从此，曲面的古典设计方法开始退出历史舞台，产品的概念设计阶段，开始由计算机完成。设计者按照自己的构想，直接在计算机上设计产品模型，通过人机对话，对模型进行分析、修改和补充，直到满意为止。这就是CAGD。这里，曲线曲面的形状可按人们的主观意愿自由控制，可以结构合理而且外形优美，所以称作自由曲线和自由曲面。

本章介绍计算机上的自由曲线的设计，主要讨论Bézier方法和B样条方法。作为预备知识，第一节叙述基本概念和调配函数。

§1 基本概念和调配函数

这里, 作为预备知识, 我们先来介绍计算机上的曲线和曲面的表达方式、插值和拟合的概念以及生成调配函数的一般准则.

1. 几何信息的计算机表达

我们用黑体字母表示 R^3 或 R^2 中的点, 例如

$$p = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ 或 } u = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

曲线 $P(u)$ 看作由实 u -轴上的一个区间到 R^3 或 R^2 的映象; 曲面 $P(u, v)$ 看作由 uv -平面上一个区域到 R^3 的映象. 在计算机上, 这样用参数的向量函数来表示曲线和曲面是方便的.

在CAGD中, 通常将曲线和曲面分割为较小的段和片, 而分别处理每个段和片. 曲线由参数区域上的节点 $u_0 < u_1 < \dots < u_n$ 分割为若干段; 曲面由参数区域上的“割线” $u = u_i$ 和 $v = v_j$, (其中 $u_0 < u_1 < \dots < u_p$, $v_0 < v_1 < \dots < v_q$) 分割为若干四边形片, 或者对应于参数区域上的三角形的若干三角形片.

曲线或曲面的每一片, 对应于一个映射. 如果这些映射在整个参数区域上是 C^r 连续的, 我们就说曲线或曲面是 C^r 连续的.

为了统一表述这些小片, 我们引进局部坐标 t 或 $r = (r, s)^T$: 对于参数值 $u \in [u_i, u_{i+1}]$ 的曲线段 $P(u)$, 我们引进局部坐标 t , 令

$$u = (1-t)u_i + tu_{i+1} \quad (1.1)$$

于是这个曲线段便是 t -轴上的单位区间 $[0, 1]$ 的映象, 如图1.1. 对于参数值为 $u \in [u_i, u_{i+1}]$, $v \in [v_n, v_{n+1}]$ 的曲面片 $P(u, v)$, 我们引进局部坐标 $r = (r, s)^T$, 令

$$\begin{aligned} u &= (1-r)u_i + ru_{i+1} \\ v &= (1-s)v_n + sv_{n+1} \end{aligned} \quad (1.2)$$

这样，曲面片便是 rs -平面上的单位正方形 $[0,1] \times [0,1]$ 的映象。如图1.2。

对于三角形曲面片，我们沿 uv -平面上三角形的两个边，引进仿射坐标 $\mathbf{r} = (r, s)^T$ ，使得三角形曲面片是 rs -平面上半个单位正方形的映象，如图1.3。为了对称起见，通常引进第三个坐标 $t = 1 - (r + s)$ ，使得

$$\mathbf{u} = r\mathbf{a} + s\mathbf{b} + t\mathbf{c}$$

这里 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 是 uv -平面上三角形的顶点，局部坐标 r, s, t 叫做点 $\mathbf{u}$ 关于 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 的重心坐标（正如 $1-t, t$ 是直线段上的重心坐标一样），为强调对称性，图1.3中对称地在 rst -平面上画出了单位正

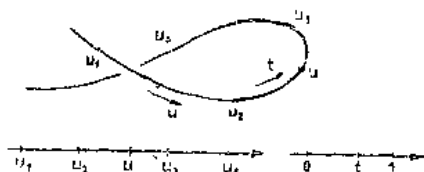


图1.1

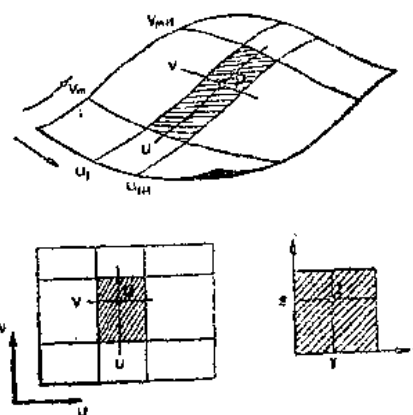


图1.2

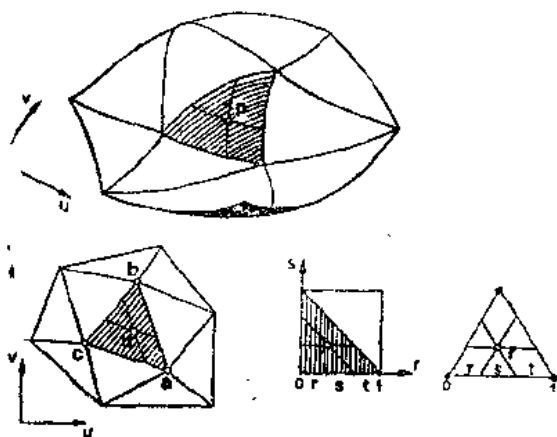


图1.3

三角形, 对于 uv -平面上任一点 u , 方程组

$$\begin{aligned} ar + bs + ct &= u \\ r + s + t &= 1 \end{aligned} \quad (1.3)$$

的解 (r, s, t) 给出 u 关于 a, b, c 的重心坐标. 由 Cramer 法则可以看出重心坐标的面积性质. 所以平面重心坐标又叫面积坐标.

2. 插值与拟合

曲线和曲面由无限多个点组成, 设计人员或测量仪只能给出其中部分点的坐标, 这就是所谓型值点. 逐个通过这些型值点构造出的曲线或曲面, 叫做插值型的. 熟知的 Lagrange 曲线

$$P(u) = \sum_{i=0}^n p_i L_i^n(u) \quad (1.4)$$

便是插值型的. 其中 $L_i^n(u)$ 是满足

$$L_i^n(u_k) = \delta_{i,k} \quad (1.5)$$

的 n 次 Lagrange 多项式, 并有 $\sum_{i=0}^n L_i^n(u) = 1$. $\{p_i\}_0^n$ 为给定的型值点, 曲线 (1.4) 通过型值点: $P(u_i) = p_i$, $i = 0, 1, \dots, n$. 应当指出, 这种插值曲线, 当 n 较大时出现摆动 (即所谓 Runge 现象), 在产品几何设计中是不实用的. 在 CAGD 中, 通常用 Bézier 曲线段 (§2) 合成插值曲线, 或用 B 样条曲线 (§3) 构造插值曲线. 此外, 也常用 Hermite 曲线段

$$H(t) = \sum_{k=0}^m \left[D^k p_0 H_k^{2m+1}(t) + D^k p_1 H_{2m+1-k}^{2m+1}(t) \right] \quad (1.6)$$

来合成插值曲线. 其中 $t \in [0, 1]$ 是局部参数, $D^k p_i = D^k H(i)$, $i = 0, 1$, $k = 0, 1, \dots, m$ 为给定的型值信息. 对于经常使用的三次 Hermite 曲线段 ($m=1$ 的情形), 我们将在 §6.1 中具体讨论.

在 CAGD 中, 设计某种产品的外形时, 常常只能给出其关键部位的轮廓, 即给定所谓控制点. 依次连接这些控制点形成的折线 (或多面体), 叫做控制多边形 (或多面体). 这是产品外形的粗糙近似, 即产品的 “毛坯”. 正像工业上对毛坯经过削刨铣磨加工成精致的工件一样, 数学上可以利用这些控制点生成保持控

制多边形（或多面体）大体形状的光滑曲线（或曲面），这种不是逐个通过控制点而保持控制多边形（或多面体）轮廓的曲线（或曲面），叫做拟合型的。有时形象地叫做磨光曲线或磨光曲面。§2和§3中的Bézier曲线和B样条曲线都是拟合型的，处理实验数据的最小二乘曲线，也是拟合型的。

3. 调配函数生成的一般准则

从给定的型值点得到插值曲线或拟合曲线，通常是将型值点的坐标各自乘以一个函数，这个函数的自变量一经指定，就相当于对型值点作出一个线性组合，因此把这类函数称作调配函数。

设 $p_0, p_1, \dots, p_N$ 为型值点。拟合曲线应线性依赖于这些型值点，以便能按比例放大及迭加，因此拟合曲线用调配函数写成

$$P(t) = \sum_{i=0}^N p_i \varphi_i(t), \quad t \in [0, 1]$$

怎样选取 $\varphi_0(t), \varphi_1(t), \dots, \varphi_N(t)$ 呢？

根据设计需要，在CAD/CAM的典型问题中，对 $\varphi_i(t)$ 常提出如下要求，也就是调配函数生成的一般准则：

(1) 当 $p_0 = p_1 = p_2 = \dots = p_N$ 时， $P(t)$ 应收缩为同一点，于是 $P(t) = p_0 = \sum p_i \varphi_i(t) = p_0 \sum \varphi_i(t)$ ，即应有

$$\sum_{i=0}^N \varphi_i(t) = 1 \quad (1.7)$$

当型值点位于同一直线上时，有

$$p_i = p_0 + \alpha_i(p_1 - p_0)$$

于是

$$\begin{aligned} P(t) &= \sum [p_0 + \alpha_i(p_1 - p_0)] \varphi_i(t) \\ &= p_0 + (p_1 - p_0) \sum \alpha_i \varphi_i(t) \end{aligned}$$

仍为直线。

(2) 拟合曲线落在型值点的凸包之内，且有保持型值点的凸性的性质，这时要求

$$\varphi_i(t) \geq 0, \quad i=0, 1, \dots, N, \quad t \in [0, 1] \quad (1.8)$$

(3) 为了使对给定次序的型值点拟合出的曲线, 在反方向 (即 p_i 换成 p_{N-i}) 之下是不变的, 要求调配函数满足

$$\varphi_i(t) = \varphi_{N-i}(1-t), \quad i=0, 1, \dots, N, \quad t \in [0, 1]$$

(4) 注意曲线拟合在几何造型上的应用, 必须考虑到计算机上响应速度, 以便实用于交互设计。这样一来, $\varphi_i(t)$ 的表达应尽量简单, 所以, 取它们为某种多项式或分段多项式为佳。

(5) 拟合曲线对型值点的依赖性是个细致的问题。如果拟合曲线上任意点都与全体型值点紧密相关, 则不易进行修改。因此, 局部相依赖于型值点的拟合方法是受欢迎的。这个要求反映在调配函数上, 即要求调配函数具有有限支集

$$\varphi_i(t) = 0, \quad \text{当 } |t| \geq T$$

以上五条准则并不总是同等重要的, 甚至对具体问题来说可能去掉或削弱某个要求, 也可能增加新的要求。总之, 各种不同的调配函数导致丰富多样的拟合方法。

4. 构造调配函数的一类模型—URN

在概率论中, 所谓 URN 模型早就被人用在简单随机过程的研究中。一些著名学者, 如 Pascal, Fermat, Laplace 及 Bernoulli 等人, 通过 URN 模型发展了博弈论及流体力学的某些理论与方法; 近代数学家 Polyá 利用 URN 模型考察疾病传染的规律。可见 URN 模型是很有价值的。

通过 URN 模型, 可以生成常用的调配函数, 也可以产生新的调配函数

本节介绍 Friedman 模型 (见 [3]), 并说明从这一观点可以统一得出 B 样条拟合及 Bezier 拟合方法中的调配函数。

Friedman 模型: 假定盒中装有 w 个白球和 b 个黑球。现在从盒中任意抽取一球, 并记录其颜色, 然后放回盒中。如果取出的是白球, 则向盒中增添 c_1 个白球和 c_2 个黑球; 反之, 如果取出的是黑球, 则向盒中增添 c_1 个黑球和 c_2 个白球。

这样一来, 无论第一次取出的球为何种颜色, 在一次试验之