

一九五六年全國鐵道科學工作會議

論文報告叢刊

(33)

半無限粉性介質所傳遞的 荷載的側壓力

人民鐵道出版社

前 言

1956年全国铁道科学工作会议征集了技术报告、总结、论文三百余篇。它的内容，包括铁路业务的各个方面，基本上显示着全体铁路技术人员和有关高等学校教师们几年来在科学技术方面辛勤劳动的成果。对现场实际工作有参考价值，对铁路新技术的采用和发展方向，有启示作用。为此，刊印丛刊，广泛流传，保存这一阶段内的科技文献，以推动科学研究的进一步开展。

会议以后，我们对全部文件进行一次整编工作，然后组织部内设计总局、工程总局、工厂管理局、人民铁道出版社、车务、商务、机务、车辆、工务、电务各局、铁道科学研究院、北京和唐山铁道学院、同济大学、大桥、定型、电务等设计事务所的有关专业同志对每篇内容仔细斟酌，选择其中对目前铁路业务有广泛交流意义，或是介绍铁路新技术方向和系统的经验总结，将性质相近的文件合订一册，单独发行。为了避免浪费，凡是其他刊物或是以其他方式刊印过的文件，除特殊必要外，一般都不再刊载。出版顺序根据编辑和定稿的先后，排定丛刊号码，交付印刷，並無主次之分。

苏联铁道科学代表团在会议期间曾经作过九次学术报告，我们已将文字整理，编入了丛刊。

文件中的论点，只代表作者意见，引用或采用时，还应由采用人根据具体情况选择判断。

丛刊方式还是一种尝试，我们缺少经验，希望读者提供意见，逐步地改进。

铁道部技术局

1957年2月

半無限粉性介質所傳遞的荷載的側压力

(荷載对擋土牆的側压力)

吳 炳 焜

將土当作半無限粉性介質 (Сыпучая среда) 來求它所傳遞的荷載对剛性牆背的側压力 (通常称为主动压力), 到現在为止还没有在理論上完全研究过。例如在可能有的如圖 1 所示五种情况中, 只有均佈荷載而滿佈界面者 (a) 已有解^[1]。这里想研究一下其他四种荷載的側压力。

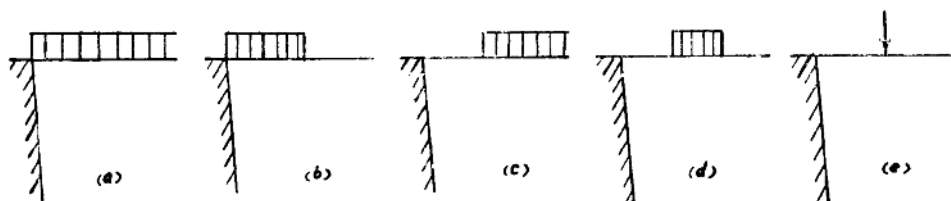


圖 1

以后我們將 (b) 和 (c) 的均佈荷載称为部分荷載, (d) 为帶荷載, 而平面問題中的集中荷載如 (e) 的为綫荷載。

(I) 一般理論介紹

依照現今多数人同意的論点, 荷載对牆的側压力應該由牆后介質全部到达極限平衡条件求出。因此側压力問題可以当作粉性介質的塑性力学中一个边值問題來解。下面先介紹一下我們要用到的若干基本理論, 为說明和計算簡單起見, 以后將只考慮介質界面为水平的情况。

(一) 粉性介質的極限平衡——

取牆頂为原点 0, z 軸垂直向下, x 軸水平向右, 如圖 2。若介質中任何点的大小主应力用 σ_1 和 σ_2 ($\sigma_1 > \sigma_2$) 表示, 大主应力作用綫和 z 軸所成的角度用 θ 代表, 那么該点到达極限平衡时的力学条件为^[1]:

$$\left. \begin{matrix} \sigma_z \\ \sigma_x \end{matrix} \right\} = \sigma (1 \pm \sin \phi \cos 2\theta) - H, \quad \tau_{xz} = \sigma \sin \phi \cos 2\theta \dots \dots \dots (1)$$

式中: $\sigma = \frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) + H, \quad H = k \cot \phi,$

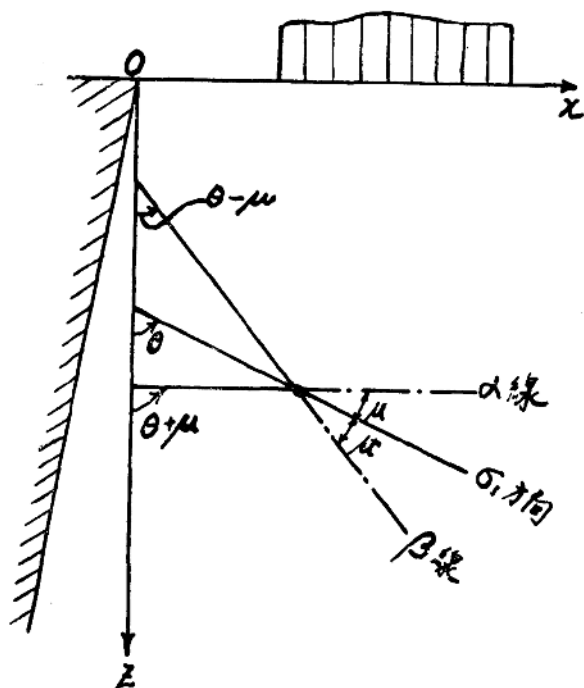


圖 2

若用兩個新變數:

$$\xi = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \sigma + \theta, \quad \eta = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \sigma - \theta \dots \dots \dots (3)$$

即將式 (1) 的變數 σ 和 θ 作下列變換:

$$\sigma = \exp[\tan \phi (\xi + \eta)], \quad \theta = \frac{1}{2}(\xi - \eta), \dots \dots \dots (4)$$

然後將該式的應力代入 (2), 即得便於應用的極限平衡基本方程^{[1][2]}:

$$\frac{\partial \xi}{\partial z} + \tan(\theta + \mu) \frac{\partial \xi}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} + \tan(\theta - \mu) \frac{\partial \eta}{\partial x} = 0 \dots \dots \dots (5)$$

這方程組的特徵曲綫^{[3][4][5]} 方程為:

$$\left. \begin{matrix} dx = dz \tan(\theta + \mu), & d\xi = 0 \\ dx = dz \tan(\theta - \mu), & d\eta = 0 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (6)$$

很容易看出兩組特徵曲綫就是裂綫, 因此我們得出下列重要結論:

$$\left. \begin{matrix} \text{在 } \alpha \text{ 綫上——} \xi = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \sigma + \theta = \text{常數} \\ \text{在 } \beta \text{ 綫上——} \eta = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \sigma - \theta = \text{常數} \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (7)$$

ϕ = 介質的內摩擦角,

k = 介質的粘聚力。

我們知道通過該點兩條裂綫的切綫互成 2μ 角,

$$2\mu = \frac{\pi}{2} - \phi,$$

而兩綫各和 σ_1 成 μ 角。若將由 σ_1 綫反時針方向轉 μ 角而得的裂綫稱為 α 綫, 其他一條稱為 β 綫, 那麼由圖 2 可看出 α 和 β 綫分別與 z 軸成 $\theta + \mu$ 及 $\theta - \mu$ 角。

不考慮自重時介質中任何點的應力平衡方程為:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0$$

$$\dots \dots \dots (2)$$

式 (1) 和 (2) 是極限平衡的基本方程。

(二) 边值問題解法——

有些簡單問題，如 ξ 和 η 兩變數中有一个或者二者都为常数时，很容易直接得出解。顯然这时未知边值可由式 (7) 和 (1) 求出，而裂綫方程也可直接积分得出。現將三种簡單情况的結果列出^[1]：

(1) $\xi = \text{常数}$ ； $\eta = \text{常数}$ ；裂綫为兩組直綫：

$$x = z \tan(\theta \pm \mu) + \text{常数} \dots\dots\dots (8)$$

(2) $\xi = \text{常数}$ ， η 为非常数而在一孤点發生变化；若取孤点为坐标系原点，兩組裂綫如下：

α 綫——螺心在原点的对数螺綫，其方程为：

$$\left. \begin{aligned} x &= C \sin(\theta - \mu) \exp(\theta \tan \phi) \\ z &= C \cos(\theta + \mu) \exp(\theta \tan \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (9)$$

式中 $C = \text{任意常数}$ ；

β 綫——通过原点的放射直綫羣。

(3) $\eta = \text{常数}$ ， ξ 为非常数而在一孤点發生变化；若取孤点为坐标系原点，兩組裂綫如下：

α 綫——通过原点的放射綫羣。

β 綫——螺心在原点的对数螺綫，其方程为：

$$\left. \begin{aligned} x &= C \sin(\theta + \mu) \exp(-\theta \tan \phi) \\ z &= C \cos(\theta + \mu) \exp(-\theta \tan \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

式中 $C = \text{任意常数}$ 。

若極限平衡区的 ξ 和 η 都是变数，那么我們只能用数解法來求得結果了。任意定下已知在边界上的 ξ 和 η 值的裂綫，由式 (6) 用近似数算法逐步求出裂綫網的位置，即可算出另一边界上某些点的未知应力。我們以后將具体应用这样的数算法。

(三) 模型律——

用数算法求解时模型律（或相似律）^[1] 佔十分重要地位，因所得結果必須要能用到任何尺寸不同但相似的問題上去。为此一切計算可採用無量綱变数進行。例如長度可用新变数：

$$z' = \frac{z}{l}, \quad x' = \frac{x}{l}.$$

l 为求解問題中一有特殊意义的距离；如这里可用圖 3 所示 l 值；

应力可用：

$$\sigma'_z = \frac{\frac{\sigma_z + H}{K}}{\frac{P + H}{K}} = \frac{\sigma_z + H}{P + H} = \frac{\sigma_z + H}{P_0}$$

$$\sigma'_x = \frac{\sigma_x + H}{P_0}, \quad \tau'_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{P_0}.$$

式中 $P = \text{边界荷载}$ ，而 $P_0 = P + H = \text{边界当量荷载}$ 。又 $\sigma' = \frac{\sigma}{K}$ 。

求后者的牆背边界上应力值。孤点 O 是兩区的共同点，而 E 是 $z = 0$ 的加载和未加载界面的共同点。

在 O 和 E 兩点以内的荷載区边界上 $\sigma_z = \sigma_1 = P$, $\theta = 0$ 。該区界綫 OM 是 α 綫而 EM 是 β 綫。由式 (1) 可求出 OME 区的:

$$\sigma = \frac{P+H}{1+\sin\phi}, \quad \theta = 0 \dots\dots\dots (11)$$

E 点以右界面下介質在荷載 P 作用下在受动状态, $\theta = \frac{\pi}{2}$, EA 綫是荷載区右界, 它是条 β 綫。对求牆上側压力講只 EA 綫以左介質应力状况是有影响的。

在孤点 E , θ 由零变至 $\frac{\pi}{2}$, 也即通过該点的 β 綫由 $\eta_1 = \frac{1}{2} \cot\phi \ln \frac{P+H}{1+\sin\phi}$ 的 EM 綫变到 $\eta_2 = \frac{1}{2} \cot\phi \ln \frac{P+H}{1+\sin\phi} + \frac{\pi}{2}$ 的 EN 綫。在 E 点 α 綫的长度为零, 它的 ξ 值不变。这 EMN 組成了一个 $\xi =$ 常数而 η 渐变的轉变区, 它的 β 綫为通过 E 点的放射綫羣而 α 綫为对数螺綫。該区界綫 $MN - \alpha$ 綫的方程經应用式 (9) 变换坐标系和求出常数 C 代入后为:

$$\left. \begin{aligned} x &= l + 0.5 l \csc \mu \sin(\theta - \mu) \exp(\theta \tan \phi) \\ z &= 0.5 l \csc \mu \cos(\theta - \mu) \exp(\theta \tan \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

作为荷載区界綫的 α 綫 OMN 因此是全知的了; 它的 $\xi = \frac{1}{2} \cot\phi \ln \frac{P+H}{1+\sin\phi}$ 而 η 值由上述的 η_1 渐变到 η_2 。現在我們的問題是要由已知的孤点 O 和边綫 OMN 去求牆背上的应力值。

由于須求的是側压力, 所以牆背上的应力最好以法向应力 σ_n 和剪应力 τ_{nt} 計。若牆背和 z 軸所成傾斜角 ω 以反时針方向为正, 而 t 为牆背綫方向, n 为它的法綫方向, 那么 n, t 坐标系可由將 z, x 系旋轉 $\frac{\pi}{2} + \omega$ 而得, 如圖 3 所示, 很容易將式 (1) 变到:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n \\ \sigma_t \end{aligned} \right\} = \sigma [1 \mp \sin\phi \cos 2(\theta - \omega)] - H \quad \left. \begin{aligned} \tau_{nt} = -\sigma \sin\phi \sin 2(\theta - \omega) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

若牆背和介質間的摩擦角为 δ , 求主动的側压力时牆对介質的摩擦力是向上的, 即照圖 3 的 n, t 坐标系 τ_{nt} 为正, 所以牆背边界条件为:

$$\tau_{nt} = (\sigma_n + H) \tan \delta \quad [\text{註}] \dots\dots\dots (13)$$

將式 (12) 的 σ_n 和 τ_{nt} 代入式 (13) 即可求出牆背区的 θ 值如下 [1]:

$$2\theta = 2\bar{\theta} = 2\omega + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} \dots\dots\dots (14)$$

將上式 θ 值代回式 (12) 我們得牆背应力:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n &= \sigma \cos \delta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \delta}) - H \\ \tau_{nt} &= (\sigma_n + H) \tan \delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (15)$$

通过孤点 O 的作为牆背区界綫的 α 綫和 z 軸所成角度 $\alpha_1 = \bar{\theta} + \mu$ (即圖 3 的 OG 綫); 而荷載区界綫 OM 和 z 軸成 $\alpha_2 = \mu$ 角。 σ 和 θ 值如何由荷載区轉变到牆背区完全要看 α_1 比 α_2 值大或小了。讓我們分別地來考察一下可能有的各种解:

[註] 在粉性介質的塑性力学中我們依照参考文献 [1] 採用这样的牆摩擦角定义; 对沙講它和常用者完全相同。

$$\left. \begin{aligned} x &= 0.5 \operatorname{csc} \mu \sin(\theta + \mu) \exp(-\theta \tan \phi) \\ z &= 0.5 \operatorname{csc} \mu \cos(\theta + \mu) \exp(-\theta \tan \phi) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

由 G 点通向牆背的 FG 綫顯然地和垂綫順時針方向成 $(\mu - \theta)$ 角。

現在再由圖 4 (a) 詳細地說明一下連續解求法。

这里荷載区和牆背区都各有一 ξ 和 η 均为常数的最簡單区域，裂綫均为兩組直綫。荷載区的最簡單区域为 OME ，

該区中：
$$\xi = \eta = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \frac{P+H}{1+\sin \phi};$$

牆背区者为 OGF ；該区中：

$$\left. \begin{aligned} \xi \\ \eta \end{aligned} \right\} = \frac{1}{2} \cot \phi \ln \frac{\sigma_n + H}{\cos \beta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \delta})} \pm \left(2\omega + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} \right)$$

因兩区有共同点 O 其 η 值不变，所以令上列兩区 η 值相等即得牆背 OF 段上的均佈側压力值：

$$\begin{aligned} \sigma_n + H &= (P+H) \frac{\cos \delta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \delta})}{1 + \sin \phi} \cdot \\ &\exp \left[\left(2\omega + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} \right) \tan \phi \right] \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

这是早已誘導出來的^[1]，如圖 1 (a) 界面滿佈荷載时牆背的均佈側压力公式。

現須用数算法求 $MN JG$ 轉变区中的裂綫網。該区一条已知边綫为 α 綫 MN ，他的 ξ 为定值， η 值随 θ 而变即：

$$\eta = \xi - 2\theta.$$

可將 MN 段的 θ 增量依精确度需要分成若干份，那應該綫上若干点的 ξ 和 η 值都是定值。在圖 4 (b) 中的 ξ, η 坐标系上 MN 为平行於 η 軸的 $E_1 E_2$ 綫，其 η 增量如上述分成若干份。轉变区另一已知边綫为 GM 綫，他的 η 值为定值而 ξ 值随 θ 而变，即：

$$\xi = \eta + 2\theta;$$

同样將 GM 綫的 θ 值增量分若干份即可求出該綫上若干点的 ξ 和 η 定值。在圖 4 (b) 上該綫由 $O_1 O_2$ 代表。

轉变区 $MN JG$ 內裂綫網交点的 ξ 和 η 值已如上述定下，即为圖 4 (b) 矩形 $E_1 E_2 O_2 J$ 內縱橫兩組直綫的交点值，那么这些点的坐标值就可应用数算約略法求出，即將式 (6) 寫成

$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta z \tan(\theta_\alpha + \mu), \\ \Delta x &= \Delta z \tan(\theta_\beta - \mu). \end{aligned}$$

然后解联立方程求出。这里 θ_α 和 θ_β 要精确些可取兩組裂綫在兩端 θ 的平均值^{[1][2]}。如圖 4 所示轉变区中任何一裂綫網交点的坐标值即可由 α 和 β 綫上兩鄰点 a 和 b 的已知值表出，即：

$$\begin{aligned} x - x_a &= (z - z_a) \tan(\theta_\alpha + \mu), \\ x - x_b &= (z - z_b) \tan(\theta_\beta - \mu). \end{aligned}$$

解上列联立方程得:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{z_a \tan(\theta_a + \mu) - x_a - z_b \tan(\theta_b - \mu) + x_b}{\tan(\theta_a + \mu) - \tan(\theta_b - \mu)} \\ x &= x_a + (z - z_a) \tan(\theta_a + \mu) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

而且又有:

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_a, \quad \eta = \eta_b; \\ \theta_a &= \frac{1}{2}(\theta_a + \theta), \quad \theta_b = \frac{1}{2}(\theta_b + \theta). \end{aligned}$$

这样从已知边綫出發可逐点求出裂綫網交点直到圖 4 (a) 的 GJ , 即 (b) 的 O_2J 为止。

GJ 綫求出后須求牆背区裂綫網是塑性力学中另一类边值問題。可由圖 4 直接說明他的解法。例如圖上的 b_1 点是已知的。通过該点的 β 綫和牆背相交时应符合該处边界条件:

$$\begin{aligned} x &= z \tan \omega \\ \text{和 } \theta &= \bar{\theta} = \text{式 (14) 值} = \text{常数。} \end{aligned}$$

若將 $x = z \tan \omega$ 代入

$$x - x_b = (z - z_b) \tan(\theta_b - \mu)$$

我們得牆背 F_1 点:

$$\left. \begin{aligned} z &= \frac{z_b \tan(\theta_b - \mu) - x_b}{\tan(\theta_b - \mu) - \tan \omega}, \quad x = z \tan \omega \\ \xi &= \eta + 2\bar{\theta} = \eta_b + 2\theta, \quad \eta = \eta_b \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (21)$$

得了 F_1 点值后即可用式 (20) 求出 b_2 点值, 然后再求出 F_2 点值。这样由圖 4 (a) 的已知边綫 GJ , 即 (b) 圖的 O_2J , 出發循环地应用式 (20) 和 (21) 可求出相应於某 ξ 和 η 值 (並其側压力值) 的牆背点坐标值。圖 4 (b) 的斜边 O_2IV 代表牆背綫。計算牆背各点側压力用式 (4) 和 (15)。

(2) 間断解——

若 $\alpha_1 > \alpha_2$ 荷载区和牆背区重叠了, 連續解就成为不可能。由圖 3 看若 ϕ 和 δ 为定值 ε 也是定值; 当牆背內轉傾斜角 ω 增大到超过式 (16) 值, OG 綫反將越过 OM 綫, 即兩区有重叠部分了。在这情况下求出的解称为間断解。

兩区重叠部分是突变区, 应力必定要發生剧烈变化。若想像这突变区極度地縮小宽度成为一条綫即得所謂間断綫。在間断綫上裂綫和应力都發生突变。就物理意义講間断綫好像夾在極限平衡区中一片完全可弯曲但不能伸縮的薄彈性片 [2][6]。間断綫 RR

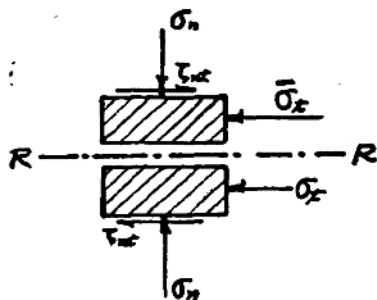


圖 5

(圖 5) 兩边应力如何突变可由应力平衡考慮推断 [1][2][6][7][8]。由应力平衡方程看 σ_n 和 τ_{nt} 跨过 RR 綫在 n 軸向是必須連續的, 但 σ_x 在 n 軸向並沒有这个要求, 因此它可以發生突变。如圖 5 σ_n 和 τ_{nt} 跨过 RR 綫兩边相同而 σ_x 可跳到 σ_x 值。我們这里若以上加短橫道值如 $\bar{\sigma}$, $\bar{\sigma}$ 等代表牆背区值, 而不加短橫道者代表荷载区值, 根据

$$\sigma_n = \bar{\sigma}_n, \quad \tau_{nt} = \bar{\tau}_{nt},$$

由式 (12) 可寫出間斷綫須遵守条件, ψ 为該綫和 z 軸所成角度:

$$\begin{aligned}\sigma[1 - \sin\phi \cos 2(\theta - \psi)] &= \bar{\sigma}[1 - \sin\phi \cos 2(\bar{\theta} - \psi)] \\ \sigma \sin 2(\theta - \psi) &= \bar{\sigma} \sin 2(\bar{\theta} - \psi)\end{aligned}$$

这里牆背区的 $\bar{\theta}$ 为式 (14) 不随坐标值而变的定值, 而 θ 是变数。解上列联立方程得間断綫方程:

$$\tan\psi = \frac{dx}{dz} = \frac{\sin(\theta + \bar{\theta}) + \sqrt{1 - \sin^2\phi \cos^2(\theta - \bar{\theta})}}{\cos(\theta + \bar{\theta}) + \sin\phi \cos(\theta - \bar{\theta})} \dots\dots\dots (22)$$

而跨过間断綫 σ 变为 $\bar{\sigma}$,

$$\bar{\sigma} = \frac{\sigma}{\cos^2\phi} \left[\sin\phi \sin(\theta - \bar{\theta}) - \sqrt{1 - \sin^2\phi \cos^2(\theta - \bar{\theta})} \right]^2 \dots\dots\dots (23)$$

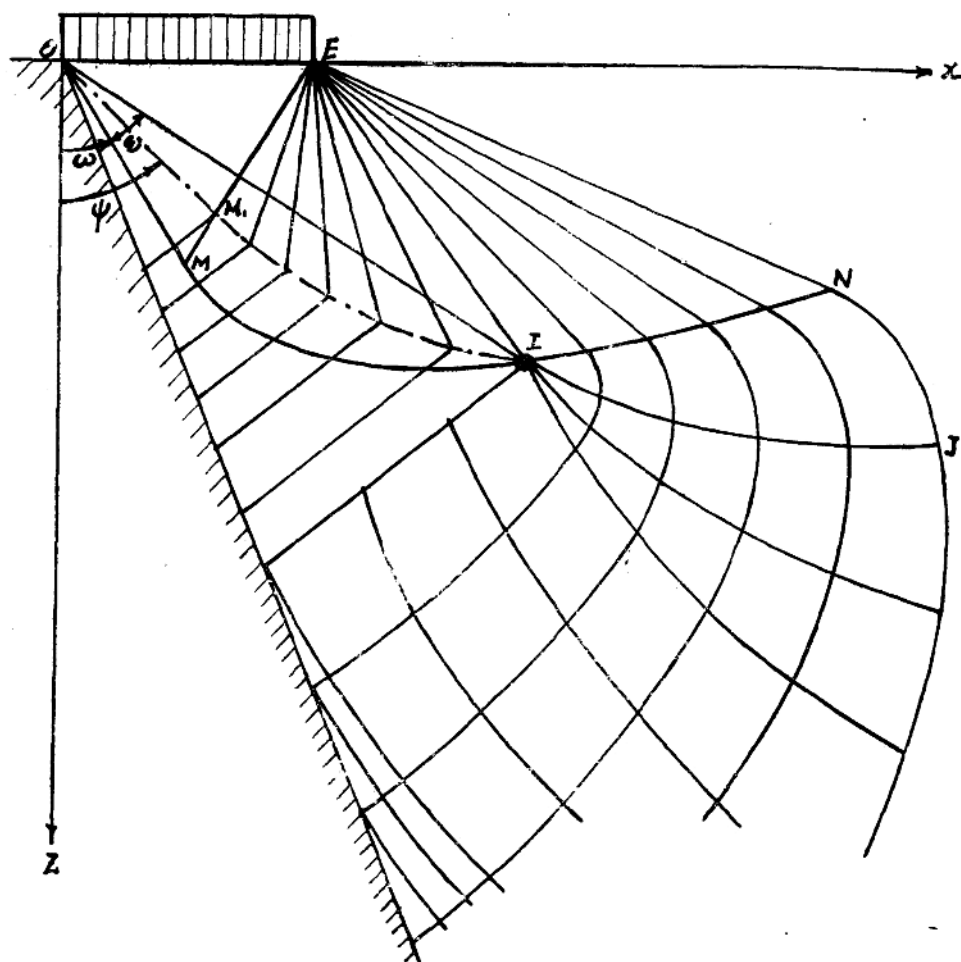


圖 6

OW 段受到荷载的均佈侧压力, W 点以下牆上不受压力了。

(3) 單区解——

但並非牆背傾斜角不断加大永远可得間断解的。当 $\omega > \mu$ 而求出的間断綫 OR 位置進入牆內去了(見圖 8), 即 $\psi' < \omega$, 那么顯然間断解又成为不可能的了。这时荷载区仍为簡單区域 OME 的一部分, 而牆背上侧压力只能由將牆背綫当作 OME 区内一条綫求出它的应力值, 即無法考虑牆背边界条件了。因为这种解只考虑到簡單荷载区应力情况, 我們姑称之为“單区解”。当然因此而得的应力值將会有:

$$\tau_{nt} \neq (\sigma_H + H) \tan \delta$$

情况, 但从应力值反求过来的 δ' 值必须符合 $\delta' \leq \phi$, 否則就不能用極限平衡求侧压力了。用式 (12) 直接可寫單区解的侧压力值。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_n + H &= \frac{1 - \sin \phi \cos 2\omega}{1 + \sin \phi} (P + H) \\ \tau_{nt} &= \frac{\sin \phi \cos 2\omega}{1 + \sin \phi} (P + H) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

这均佈侧压力只在牆背 OW 段上才有。

單区解 $\omega \geq \psi'$, ψ' 值可令 $\theta = 0$ 的 (22) 式求出, 即:

$$\tan \psi' = \frac{\sin \bar{\theta} + \sqrt{1 - \sin^2 \phi \cos^2 \bar{\theta}}}{\cos \bar{\theta} + \sin \phi \cos \bar{\theta}} = \frac{\tan \bar{\theta} + \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} + \cos^2 \phi}}{1 + \sin \phi} \dots\dots\dots (25)$$

$$\text{式中 } 2\bar{\theta} = 2\omega + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi}.$$

現在將因牆背傾斜角 ω 不同可能有的各种解总列如下:

- | | | |
|-----------|-----------------------------------|---|
| (一) 連續解 | $\omega \leq \omega_0$ | $2\omega_0 = -\delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi}$ |
| (二) 間断連續解 | $\omega_0 < \omega \leq \omega_1$ | $\omega_1 = \mu$ |
| (三) 間断解 | $\omega_1 < \omega < \omega_2$ | ω_2 由式 (25) 算出 |
| (四) 單区解 | $\omega \geq \omega_2$ | — " — |

(III) 算 例

为說明 (II) 所講原理並資以后比較研究依据, 我們在这里具体計算一下 $\phi = 30^\circ$, $\delta = \frac{2}{3}\phi = 20^\circ$ 的介質所傳遞的部分荷载对牆背的侧压力分佈。

首先計算几个牆背傾斜角臨界值:

$$(a) \quad 2\omega_0 = -\delta + \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} = 23^\circ 10', \quad \therefore \omega_0 = 11^\circ 35'$$

$$(b) \quad \omega_1 = \mu = \frac{\pi}{4} - \frac{\phi}{2} = 30^\circ$$

$$(c) \quad 2\bar{\theta} = 2\omega_2 + \delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} = 2\omega_2 - 23^\circ 10' \\ \therefore \bar{\theta} = \omega_2 - 11^\circ 35'$$

$$\text{將此 } \bar{\theta} \text{ 值代入 } \tan \omega_2 = \frac{\tan \bar{\theta} + \sqrt{\tan^2 \bar{\theta} + \cos^2 \phi}}{1 + \sin \phi}$$

$$\text{經試算求得 } \omega_2 = 58^\circ 20'$$

(一) 緊靠牆頂介質界而有寬度為 l 的均佈荷載 P (圖 9)

(1) 連續解——

取 $\omega=0$, 即牆背垂直。數算時一概用無量綱值, 但為書寫便利起見將撇号取消。為不使有負數出現取 $P=80K$, $\therefore P_0 = \frac{P+H}{K} = 80 + \cot 30^\circ = 81.732$ 。

(a) 邊綫 MN (圖 4) ——

M 點 $\theta = 0$, N 點 $\theta = \frac{\pi}{2}$; 將這 90° 的 θ 增量分成十一份 (靠 EA 綫近的分密些), 即在 MN 綫上固定了共十二點。在 M 點,

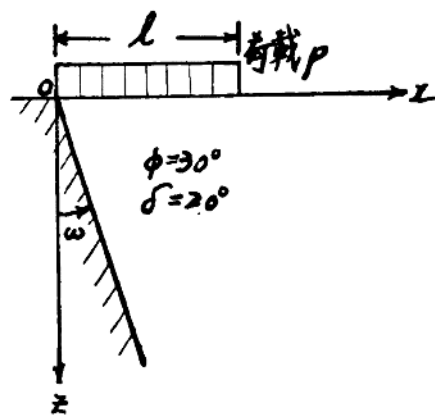


圖 9

$$\xi = \eta = \frac{1}{2} \cot 30^\circ \ln \frac{81.732}{1 + \sin 30^\circ} = 3.462,$$

其他各點 ξ 值不變, η 隨 θ 值而變, 由

$$\eta = 3.462 - 2\theta$$

求出。這些點的坐標值用式 (12) 求出 (但注意這裡我們用的是 $\frac{x}{l}$ 和 $\frac{z}{l}$ 無量綱值)。

(b) 邊綫 MG 及牆背點 F —— M 點 $\theta = 0$, G 點的

$$\theta = \bar{\theta} = \frac{1}{2} \left(\delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi} \right) = -11^\circ 35'.$$

將 θ 增量等分為兩份, 即 MG 上共固定三點。 M 點的 $\eta = \xi = 3.462$, 其他兩點 η 不變而 ξ 由 $\xi = 3.462 + 2\theta$ 求出。這些點的坐標值用式 (18) 求出。牆背點 F 的 ξ 和 η 值與 G 點的相同, 其坐標值由 $Z = Z_G + X_G \tan (\mu - \theta)$ 求出。

(c) 將 MN 邊綫各點值列入表 1 第一直行 1-1, 1-2, 1-3……1-12, MG 列入該表一橫行 1-1, 2-1, 3-1。 F 點為該橫行末一點 4-1。

(d) 表 1 由橫直已知邊綫組成的矩形中各裂綫網交點的 ξ 和 η 值可直接填入, 其坐標值用式 (20) 求出。該表斜邊 4-1, 5-2, 6-3……15-12 代表牆背綫。斜邊的 η 值等於每一橫行 β 綫的 η 值而 ξ 值由 $\xi = \eta + 2\theta$ 求出。斜邊各點坐標值用式 (21) 而斜邊以下仍用式 (20) 求出。計算結果見表 1。注意, 這表的形式完全和圖 4 (b) 相同。

(e) 圖 10(a) 和 (b) 表示表 1 所給裂綫網的形狀。

(f) 算出牆背各點 ξ 和 η 值後其

$$\sigma = \exp[\tan \phi (\xi + \eta)],$$

而 $P=80K$ 的無量綱側壓力值, 用 Q 和 T 代表, 利用下式

$$Q = \sigma \cos \delta (\cos \delta - \sqrt{\sin^2 \phi - \sin^2 \delta})$$

$$T = Q \tan \delta$$

即可求出, 列表如表 2。

表 2

Z	0	1.381	2.015	2.917	4.298	6.185	9.238	14.064	21.870	34.566	43.556	47.005	53.761
ξ	3.058	3.058	2.709	2.360	2.011	1.662	1.313	0.964	0.615	0.266	0.091	0.004	-0.084
η	3.462	3.462	3.113	2.764	2.415	2.066	1.717	1.368	1.019	0.670	0.495	0.403	0.321
$\xi+\eta$	6.520	6.520	5.822	5.124	4.426	3.728	3.030	2.332	1.633	0.936	0.586	0.412	0.237
σ	43.140	43.140	28.830	19.270	12.886	8.604	5.750	3.842	2.568	1.716	1.403	1.260	1.147
Q	23.310	23.310	15.579	10.410	6.957	4.649	3.107	2.076	1.388	0.927	0.758	0.685	0.620
T	8.484	8.484	5.670	3.789	2.532	1.692	1.131	0.756	0.505	0.338	0.276	0.250	0.226

(g) 現在可計算一下牆背各點在任何荷載 P 作用下的側壓力值。由於在 $P=80K$ 荷載作用下側壓力值為

$$\sigma_n + H = KQ, \tau_{nt} = KT, \text{ 所以單位當量荷載作用下的側壓力 } \sigma_n + H = \frac{Q}{81.732}, \tau_{nt} = \frac{T}{81.732}, \text{ 而在荷載 } P \text{ 作用下 } \sigma_n + H = \frac{Q}{81.732}(P+H), \tau_{nt} = \frac{T}{81.732}(P+H). \text{ 令 } \lambda = \frac{Q}{81.732}, \lambda_t = \frac{T}{81.732}, \text{ 我們可寫出側壓力公式:}$$

$$\sigma_n = \lambda P - (1-\lambda)H, \tau_{nt} = \lambda_t(P+H) \dots\dots\dots (26)$$

用表 2 的 Q, T 值計算所得的 λ 和 λ_t 值見表 3。

表 3

Z	0	1.381	2.015	2.917	4.298	6.185	9.238	14.064	21.870	34.566	43.556	47.005	53.761
λ	0.285	0.285	0.191	0.127	0.085	0.057	0.038	0.025	0.017	0.011	0.009	0.008	0.008
λ_t	0.104	0.104	0.069	0.046	0.039	0.021	0.014	0.009	0.006	0.004	0.003	0.003	0.003

對沙性土講 $H=0$ ，我們得側壓力公式：

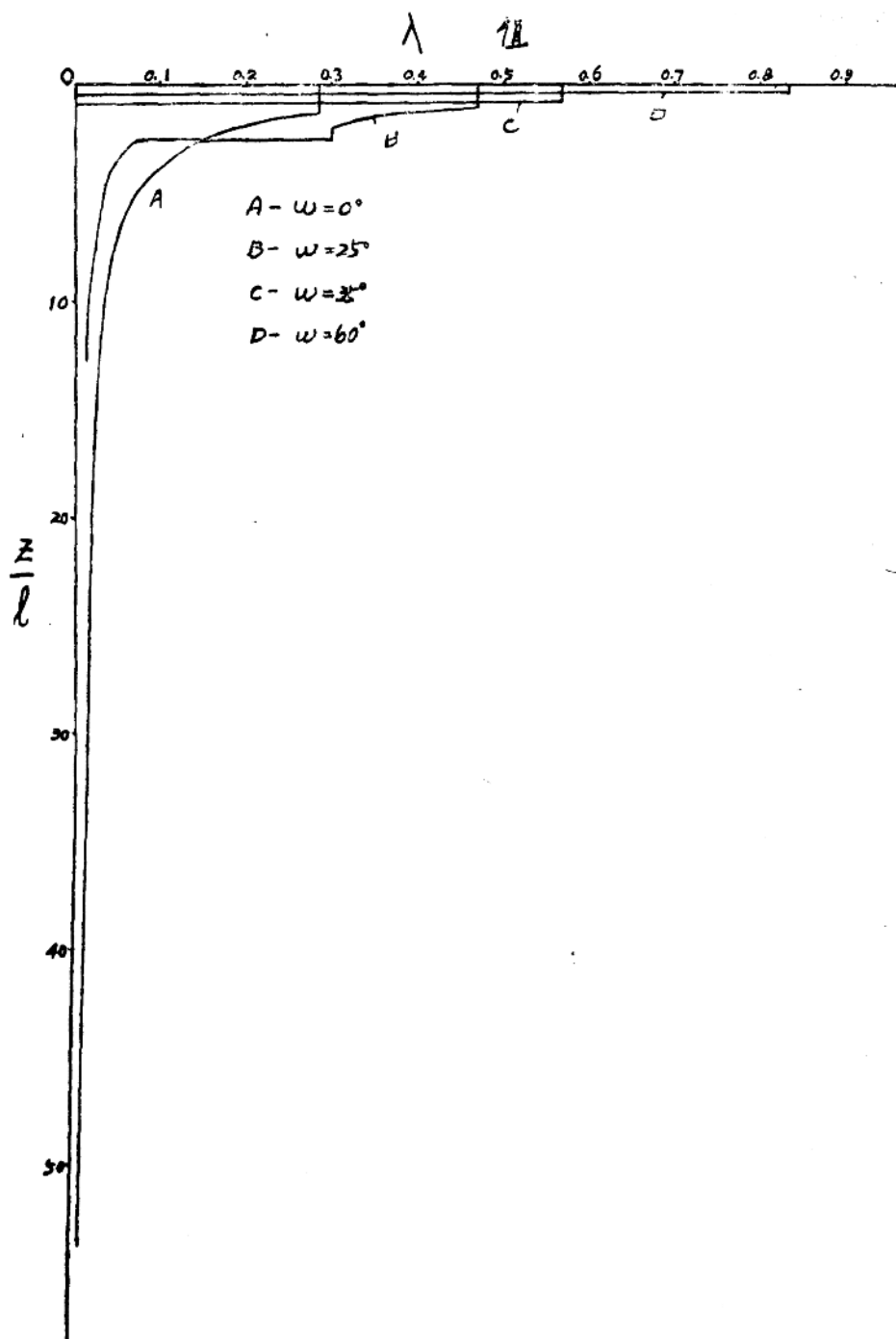
$$\sigma_n = \lambda P, \tau_{nt} = \sigma_n \tan \delta \dots\dots\dots (27)$$

因為粘性土的側壓力性質很複雜，用極限平衡理論求出的結果，即式(26)和實際情況很有出入，所以在應用時最好只用式(27)。將表 3 的 $Z' = \frac{Z}{l}$ 對 λ 作出曲綫即圖 11 的 A。在 $\frac{Z}{l} = 1.381$ 範圍以內牆上側壓力是均佈的， $\lambda = 0.285$ ，這和用式(19)計算所得者相同。這深度以下因界面只有部分荷載，側壓力就急劇減少了。若當 $\lambda < 0.1$ 就可看作無側壓力，那麼這部分荷載對牆有側壓力影響只到約 $\frac{Z}{l} = 40$ 。為便於比較起見另列 $\frac{Z}{l}$ 為整數值的 λ 值如表 4。

表 4

Z/l	1.38	2.00	3.00	5.00	10.00	20.00	30.00	40.00
λ	0.285	0.193	0.125	0.075	0.036	0.019	0.013	0

(h) 牆上側壓力的分佈完全要看牆高 h 對荷載寬度 l 的比值。 h/l 值越大牆下部受



的侧压力越小。为清楚地看出牆上侧压力分佈情形，在圖12上作了些各 h/l 值的 λ 随深度变化的曲綫。

(2) 間断~連續解——

取 $\omega = 25^\circ$ 。令 $P = K$ ，則 $P_0 = \frac{P+H}{K} = 2.732$ 。

(a) 先求牆背区和荷载区界綫的交点 I (見圖6) 的 θ 值。 $\epsilon = \mu + \frac{1}{2}(\delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi})$
 $= 18^\circ 25'$ 。解联立方程

$$x = Z \tan 43^\circ 25'$$

和

$$x = 1 + \sin(\theta - 30^\circ) \exp(\theta \tan 30^\circ)$$

$$Z = \cos(\theta - 30^\circ) \exp(\theta \tan 30^\circ)$$

得 I 点的 $\theta = 46^\circ 19'$ 。这 θ 值是間断和連續解的分界。

(b) 間断解的間断綫 OM_1 段是条直綫，牠和 Z 軸所成 ψ 角可直接用式 (22) 算出，式中 $\theta = 0^\circ$ ， $\bar{\theta} = \omega + \frac{1}{2}(\delta - \arcsin \frac{\sin \delta}{\sin \phi}) = 13^\circ 25'$ 牆' 上侧压力值用式 (23) 和 (15) 算出。

(c) 某些 θ 定值，如 10° ， 20° ……的間断綫点可用式 (22) 約略地求出。算出任一 θ 值点的間断綫坡度 $\tan \psi$ ，取該点和前一点的 ψ 平均而將 $\tan \psi$ 平均 = A 当作該段坡度。若 x_0 ， Z_0 为該 θ 值的間断綫点坐标值，而 $x_1 Z_1$ 为前一点的坐标值，解下列联立方程

$$x - x_1 = (Z - Z_1)$$

$$x = Z \tan(\theta - 30^\circ) + 1$$

即得 x_0 和 Z_0 ：

$$Z = Z_0 = \frac{AZ_1 - x_1 + 1}{A - \tan(\theta - 30^\circ)}$$

$$x = x_0 = Z_0 \tan(\theta - 30^\circ) + 1$$

表 5

θ		0°	10°	20°	30°	40°	$46^\circ 19'$
$\tan \psi$		0.758	0.892	1.066	1.298	1.627	1.917
ψ		$37^\circ 9'$	$41^\circ 44'$	$46^\circ 49'$	$52^\circ 23'$	$58^\circ 25'$	$62^\circ 27'$
ψ 平均		—	$39^\circ 27'$	$44^\circ 17'$	$49^\circ 36'$	$55^\circ 24'$	$60^\circ 26'$
$A = \tan \psi$ 平均		—	0.823	0.975	1.175	1.450	1.763
間断点綫	Z°	0.749	0.834	1.023	1.245	1.418	1.530
	x°	0.568	0.678	0.818	1.000	1.250	1.448
牆背点	Z	1.035	1.232	1.463	1.794	2.189	2.491
	x	0.483	0.575	0.682	0.837	1.021	1.162
$\delta = (\frac{2.732}{1+0.5\cos 2\theta})$		1.821	1.859	1.975	2.186	2.514	2.796
$\bar{\delta}$		2.379	1.991	1.730	1.574	1.507	1.508
Q		1.285	1.076	0.935	0.851	0.814	0.815
T		0.468	0.392	0.340	0.310	0.296	0.297