● 张志华 著

加速寿命试验及其统计分析

JIA SU SHOUMING SHIYAN JIQI TONGJI FENXI

北京工业大学出版社

加速寿命试验及其统计分析

张志华　著

~~北京工业大学出版社~~

图书在版编目(CIP)数据

加速寿命试验及其统计分析/张志华著．—北京：北京工业大学出版社，2002.11

ISBN 7-5639-1107-3

Ⅰ．加… Ⅱ．张… Ⅲ．加速寿命试验-基本知识 Ⅳ．TB302

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2002)第 085732 号

加速寿命试验及其统计分析

张志华 著

*

北京工业大学出版社出版发行

邮编：100022 电话：(010) 67392308

各地新华书店经销

徐水宏远印刷厂印刷

*

2002 年 11 月第 1 版 2002 年 11 月第 1 次印刷

850 mm×1 168 mm 32 开 11 印张 274 千字

印数：1～2 000

ISBN 7-5639-1107-3/T·187

定价：26.00 元

序

这是一本专著，它把近30年来国内外研究加速寿命试验的主要成果都概括进去了．为此作者收集了大量文献资料，摘其精华，对每种加速寿命试验模型介绍了多种有代表性的数据处理方法，用作者本人的多年研究心得和独到见解组织成文，实属难得，补缺了国内空白．

注重实用是本书的又一特色．它收集了国内外大量实例，便于读者认识各种加速寿命试验模型，理解有关统计方法．每当一个模型有多种统计方法可用时，作者又做了比评，说明优劣，以便实际工作者选用．从这个意义上说，本书又是一本工程手册．

该书结构合理；叙述由浅入深，逐步展开；文字通俗易懂，便于阅读．国内外的主要文献都收集在其参考文献之中．

作者张志华同志是我国的理学博士．早在攻读硕士学位时就对加速寿命试验发生了兴趣，以后长期从事加速寿命试验模型及其统计分析的研究与应用，发表过许多论文，参加过不少课题研究，十多年来勤奋研究，硕果累累，是我国年轻统计学家之一，受到国内同行注目．这本书是他多年研究的一个总结．此书出版定会推动国内加速寿命试验的研究和应用．在此，预祝他在今后的教学与研究中取得更大成就，为祖国作出更大贡献．

茆诗松

2002年4月9日

前　言

加速寿命试验是用加大试验应力来缩短试验周期的一种基本寿命试验方法.随着科学技术的发展,高可靠性、长寿命产品越来越多,在正常工作条件下实施寿命试验已不能满足可靠性评估的要求.利用加速寿命试验方法可以在较短时间内对产品的可靠性进行评定,查明产品失效原因.20 世纪 60 年代以来,这一试验方法引起工程技术人员与统计学家的极大兴趣.加速寿命试验的理论研究有了长足发展,提出了一些新的加速寿命试验模型及数据处理方法,对工程应用起到了很大的促进作用.加速寿命试验方法自 20 世纪 70 年代引入我国,在电子、机械、仪表等行业中得到广泛应用,积累了丰富经验,同时我国还制定了有关的国家标准.

本书系统地论述了加速寿命试验的基本理论、方法及其应用,着重地介绍了加速寿命试验在理论和应用方面的近期发展,力求能够反映该分支的研究状况.

全书共分七章.第一章是关于可靠性数学的基础知识.第二章讨论了加速寿命试验及一些常见的加速寿命模型.第三章介绍了指数分布情况下加速寿命试验的一些常用统计分析方法.由于许多常见寿命分布(如 Weibull 分布、对数正态分布)经过适当变换均为位置刻度分布模型,因此,第四、五章讨论了位置刻度模型的加速寿命试验的统计分析.其中第四章重点讨论了定数截尾情况下加速寿命试验的线性估计;第五章重点介绍了加速寿命试验的

其他统计分析方法(极大似然方法、矩方法和 Bayes 方法),研究了加速寿命试验的最优设计问题.第六章介绍了竞争失效产品的加速寿命试验的统计分析.第七章介绍了加速寿命试验的非参数估计问题.

本书的写作始终得到我的老师茆诗松教授的热情关怀、指导和帮助,他在百忙中仔细审阅了全书的初稿,提出了许多宝贵意见,这对提高书稿质量起到了很大的作用,在此谨向他表示衷心的感谢.本书的写作还得到海军工程大学基础部领导及数学教研室同仁的支持和帮助,借此机会向他们表示衷心的感谢.本书在出版过程中,得到王清雨、刘津瑜、刘善兴等同志的大力帮助,作者也在此向他们表示衷心的感谢.

由于作者水平有限,书中错谬之处在所难免,恳求国内同行及读者不吝赐教.

作　者

目　　录

第一章　可靠性基础

产品可靠性是指产品在规定的条件下和规定的时间内完成规定功能的能力.它是产品无故障工作能力的度量.作为产品质量的重要属性,产品可靠性愈来愈受到人们的重视.作为基础,本章将介绍可靠性的有关基本概念.在§1.1中介绍了产品的常用可靠性指标;§1.2中介绍了产品常用的寿命分布;§1.3中简单地叙述了可靠性统计的基本方法.

§1.1　可靠性的基本概念

在可靠性研究中,人们主要关心产品的使用寿命(简称寿命),即产品能保持完成其规定功能的正常工作时间.由于产品寿命是随机的,因此无法直接用寿命作为指标来度量产品的可靠性.为了定量描述产品可靠性,人们从不同角度定义了各种产品的可靠性指标.

1.1.1　失效分布函数与可靠度函数

1. 失效分布函数

由于产品寿命是随机的,因此可以用非负随机变量来表示产品的寿命.假设 T 是产品的寿命,它表示产品从开始工作到首次失效的时间,称非负随机变量 T 的分布函数

$$F(t)=P(T\leqslant t)\quad t\geqslant 0 \tag{1.1.1}$$

为产品寿命的失效分布函数,又称为寿命分布函数. 函数$F(t)$具有下列性质:

1) $F(t)$是时间 t 的非减函数,$F(0)=0$;

2) $0\leqslant F(t)\leqslant 1, 0\leqslant t<+\infty$;

3) $\lim\limits_{t\to+\infty} F(t)=1$.

如果$F(t)$是可微的,即$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}(t\geqslant 0)$存在,那么称$\frac{\mathrm{d}F(t)}{\mathrm{d}t}$为产品寿命的(失效)密度函数,并记作$f(t)$. 显然,产品寿命分布函数和密度函数之间的关系是

$$F(t)=\begin{cases}\int_0^t f(x)\mathrm{d}x & t\geqslant 0\\ 0 & t<0\end{cases} \tag{1.1.2}$$

2. 可靠度函数

在实际中,产品在$[0,t]$时间内正常工作的概率为

$$R(t)=P(T>t) \tag{1.1.3}$$

则称$R(t)$为产品在时刻 t 的可靠度函数,简称可靠度. 由于$R(t)=1-F(t)$,因此可靠度函数$R(t)$具有下列性质:

1) $0\leqslant R(t)\leqslant 1, 0\leqslant t<+\infty$;

2) $R(t)$是时间 t 的非增函数,且$R(0)=1, R(+\infty)=0$.

当寿命 T 具有密度函数$f(t)$时,可靠度函数$R(t)$又可表示为

$$R(t)=\int_t^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \tag{1.1.4}$$

1.1.2 失效率函数

所谓失效率函数(简称失效率)是指已工作到时刻 t 的产品在时刻 t 后单位时间内发生失效的概率,即

$$\lambda(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R(t<T<t+\Delta t\mid T>t)}{\Delta t}$$

当 T 具有失效密度函数时,上述极限存在,并有如下关系:

$$\lambda(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{P(t < T < t + \Delta t)}{R(t)\Delta t} = \frac{f(t)}{R(t)} \quad (1.1.5)$$

由式(1.1.5)可知,失效率函数与失效分布函数和可靠度函数的关系为

$$\left.\begin{aligned} R(t) &= \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u\right] \\ F(t) &= 1 - \exp\left[-\int_0^t \lambda(u)\mathrm{d}u\right] \end{aligned}\right\} \quad (1.1.6)$$

从而得到失效率函数$\lambda(t)$具有如下性质.

定理 1.1 函数$\lambda(t)$为失效率函数的充分必要条件是

1)$\lambda(t) \geqslant 0$, $t \geqslant 0$;

2)$\int_0^{+\infty} \lambda(t)\mathrm{d}t = +\infty$.

在评价产品可靠性时,特别是在评价电子元器件的可靠性时,失效率是重要的可靠性指标,失效率越低,可靠性越高.对许多产品的寿命试验数据进行统计分析表明,失效率函数主要有下面3种类型:

第一种为早期失效,其$\lambda(t)$为下降函数,这是由于产品设计和不良加工所造成的缺陷,随着使用时间的增加将不断被发现和排除,从而导致失效率下降.

第二种为随机失效,其$\lambda(t)$近似为常数,此时产品性能十分稳定.

第三种为耗损失效,其$\lambda(t)$为上升函数,即随着产品元器件的老化、磨损等原因,使产品失效率呈上升趋势.

1.1.3 产品的寿命特征

设产品寿命 T 的失效密度函数为$f(t)$,那么它的数学期望

$$E(T) = \int_0^{+\infty} tf(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.7}$$

称为产品的平均寿命.若寿命 T 具有二阶原点矩,则称 T 的方差

$$\mathrm{Var}(T) = E(T - ET)^2 = E(T^2) - (ET)^2 \tag{1.1.8}$$

为产品的寿命方差.

由于 $f(t) = -\dfrac{\mathrm{d}R(t)}{\mathrm{d}t}$,故

$$E(T) = -\int_0^{+\infty} t\mathrm{d}R(t) = \int_0^{+\infty} R(t)\mathrm{d}t \tag{1.1.9}$$

在实际中,除用平均寿命等指标度量产品可靠性外,还常常用可靠寿命等指标来度量产品的可靠性.所谓产品可靠寿命是指:若产品的可靠度函数为 $R(t)$,使可靠度函数等于给定值 r(称 r 为可靠水平,$0<r<1$)的时间 t_r 为可靠寿命,且 t_r 满足

$$R(t_r) = r$$

由于 $R(t)$ 是单调函数,因此 t_r 常常是唯一的.特别指出,可靠水平 $r=0.5$ 的可靠寿命 $t_{0.5}$称为中位寿命;可靠水平$r=\mathrm{e}^{-1}$的可靠寿命 $t_{\mathrm{e}^{-1}}$称为特征寿命.

§1.2 常用的寿命分布

确定产品的寿命分布既是可靠性研究中的基本内容之一,又是可靠性研究的基础,这一节将讨论几种常见的寿命分布.

1.2.1 指数分布

在可靠性理论中,特别是在电子产品的可靠性研究中,指数分布是最基本、最常用的寿命分布,它的失效密度函数

$$f(t) = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} \quad t > 0 \tag{1.2.1}$$

式中 λ 为非负参数.其分布函数和可靠度函数分别为

$$F(t) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

$$R(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \qquad t > 0$$

由式(1.2.1)可知,若产品寿命服从指数分布,则其失效率是(唯一的)常数,即

$$\lambda(t) = \lambda$$

其他可靠性指标还有平均寿命、方差、可靠寿命、特征寿命,它们分别为

平均寿命 $\theta = 1/\lambda$;

方差 $\mathrm{Var}(T) = 1/\lambda^2$;

可靠寿命 $t_r = -(\ln r)/\lambda$;

特征寿命 $t_{\mathrm{e}^{-1}} = 1/\lambda$,它与平均寿命相等.

定理 1.2 产品寿命 T 服从指数分布的充要条件是 $\forall s>0$, $t>0$,恒有

$$P(T > t + s \mid T > t) = P(T > s) \qquad (1.2.2)$$

成立.

定理证明见文献[28].

定理 1.2 表明,如果已知产品到时刻 t 还能正常工作,则它再工作 s 小时不失效的概率与时间 t 无关.这就是所谓的指数分布的"无记忆性",它是指数分布的重要刻画.

产品寿命服从指数分布的物理解释是:假设产品在 $t=0$ 时开始工作,在工作过程中由于受外界各种随机冲击而引起产品失效.记 N_t 为在时间 $(0,t]$ 内产品受到冲击的次数.假若 $\{N_t, t \geqslant 0\}$ 为 Poisson过程,则满足条件:

1)在 $(a, a+t]$ 时间区间内产品受外界冲击次数 $N_{a+t} - N_a$ 的概率分布与起点无关;

2)在互不相交的时间区间内,产品受外界冲击次数是相互独

立的；

3)在间隔长为 Δt 的时间区间内产品受 2 次以上冲击的概率为$o(\Delta t)$.

满足上述 3 个条件，在时间$(0,t]$内产品受外界的冲击次数服从 Poisson 分布，即

$$P(N_t = k) = \frac{(\lambda t)^k}{k!}\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad k = 0,1,2,\cdots \qquad (1.2.3)$$

这里 λ 为参数，且 $\lambda>0$.

假若产品经受不住外界冲击，即当外界冲击来到时产品立即失效，此时产品寿命 T 就是第一次冲击来到的时间. 其可靠度函数

$$\begin{aligned} R(t) = P(T > t) = & P(\text{在}(0,t]\text{ 内无冲击}) = \\ & P(\text{在}(0,t]\text{ 内出现 0 次冲击}) = \\ & P(N_t = 0) = \mathrm{e}^{-\lambda t} \end{aligned} \qquad (1.2.4)$$

1.2.2 Gamma 分布

称非负随机变量 T 服从 Gamma 分布. 若 T 的密度函数

$$f(t) = \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)}t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda t} \quad t > 0 \qquad (1.2.5)$$

式中 α,λ 为参数，且 $\alpha>0,\lambda>0$，记作 $T\sim\Gamma(\alpha,\lambda)$. 当$\alpha=1$时，$f(t)$ 为指数分布；当 α 为正整数时，$f(t)$ 为爱尔兰分布. 其密度函数曲线如图 1.1 所示.

Gamma 分布的失效率函数

$$\lambda(t) = \frac{f(t)}{R(t)} = \frac{t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\int_t^{+\infty} t^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-\lambda t}\mathrm{d}t} \quad t > 0$$

当 $\alpha=\lambda=2$ 时，$\lambda(t)=\frac{4t}{1+2t}$. 几种失效率图形如图 1.2 所示.

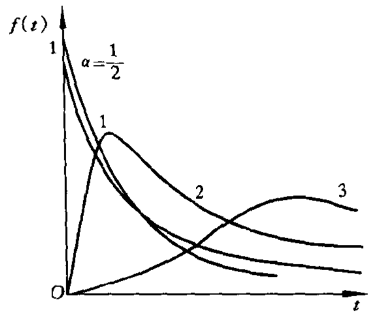

图 1.1　α 对 $f(t)$ 的影响

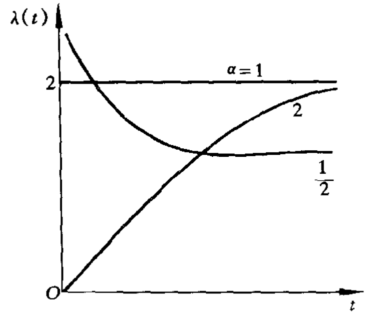

图 1.2　$\lambda(t)$ 与 α 的关系

Gamma 分布的平均寿命与方差分别为

$$E(T)=\frac{\alpha}{\lambda},\mathrm{Var}(T)=\frac{\alpha}{\lambda^2}$$

Gamma 分布作为指数分布的一种推广，也可以用上述冲击模型进行解释．假若产品能经受若干次外界冲击，但到第 α 次冲击来到时，产品立即失效，此时 产品寿命 T 就是第 α 次冲击来到的时间．假如在时间 $(0,t]$ 内产品受到的冲击次数 N_t 服从 Poisson 分布，则产品寿命 T 服从爱尔兰分布．

1.2.3　Weibull 分布

Weibull（威布尔）分布在可靠性理论中被广泛使用．对于大多数电子、机械、机电产品（如轴承、发电机、液压泵、材料疲劳等）的寿命都可认为服从 Weibull 分布．Weibull 分布的密度函数

$$f(t)=\frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1}\mathrm{e}^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m}\quad t>0 \tag{1.2.6}$$

记作 $T\sim W(m,\eta)$．其中 m 为形状参数，且 $m>0$；η 为特征寿

命，$\eta = t_{e^{-1}}$. 不同形状参数 m（η 固定）的密度函数曲线，如图 1.3 所示.

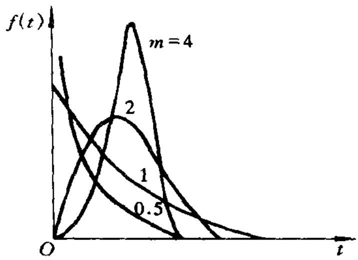

图 1.3　Weibull 分布的密度曲线

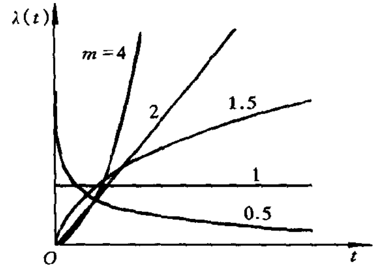

图 1.4　Weibull 分布的失效率曲线

若 $T \sim W(m,\eta)$，则可靠度函数

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t}{\eta}\right)^m} \quad t > 0 \tag{1.2.7}$$

失效率函数

$$\lambda(t) = \frac{m}{\eta}\left(\frac{t}{\eta}\right)^{m-1} \quad t > 0 \tag{1.2.8}$$

不同的形状参数 m 所对应的失效率函数的曲线，如图 1.4 所示. 从图 1.3 和图 1.4 可以看出，形状参数 m 对 Weibull 分布有很大影响.

当 $m<1$ 时，密度函数 $f(t)$ 与失效率函数 $\lambda(t)$ 都是减函数，此时相当于早期失效；

当 $m=1$ 时，Weibull 分布即为指数分布；

当 $m>1$ 时，密度函数曲线呈单峰状；

当 $m\geqslant 3$ 时，密度函数曲线呈单峰对称状，近似于正态分布. 失效率函数 $\lambda(t)$ 为增函数，此时相当于产品耗损失效.

Weibull 分布的平均寿命与方差分别为

$$E(T) = \eta\Gamma\left(\frac{1}{m}+1\right)$$

$$\mathrm{Var}(T) = \eta^2\left[\Gamma\left(\frac{2}{m}+1\right)-\Gamma^2\left(\frac{1}{m}+1\right)\right]$$

式中，$\Gamma(\cdot)$ 是伽马函数. 由式 (1.2.7) 不难得到可靠水平为 r 的可靠寿命

$$t_r = \eta\left(\ln\frac{1}{r}\right)^{\frac{1}{m}}$$

与 Weibull 分布密切相关的是所谓极值分布. 称随机变量 X 服从极值分布. 若 X 的分布函数

$$F(x) = 1 - \exp(-\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\sigma}})$$
$$-\infty < x < +\infty \tag{1.2.9}$$

式中，μ 为位置参数；σ 为刻度参数，且 $\sigma>0$. 当 $\mu=0,\sigma=1$ 时，则称 X 服从标准极值分布. 若 X 的分布函数为式(1.2.9)，则其密度函数

$$f(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\exp(-\mathrm{e}^{\frac{x-\mu}{\sigma}}) \quad -\infty < x < +\infty$$

失效率函数

$$\lambda(x) = \frac{1}{\sigma}\exp\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$
$$-\infty < x < +\infty \tag{1.2.10}$$

X 的平均寿命与方差分别为

$$E(X) = \mu - \nu\sigma, \quad \mathrm{Var}(X) = \frac{\pi^2}{6}\sigma^2$$

式中，$\nu=0.577\,2\cdots$是欧拉常数. 极值分布的可靠寿命

$$t_r = \mu + \sigma u_r$$

式中，

$$u_r = \ln(-\ln r)$$

定理 1.3 设 $T \sim W(m,\eta)$，则 $X=\ln T$ 服从分布函数为式(1.2.9)的极值分布，式中 $\mu=\ln\eta,\sigma=1/m$.