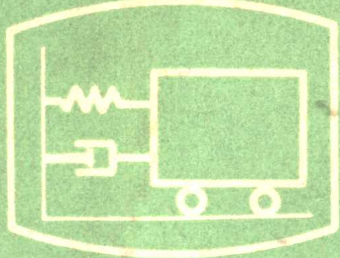


工业基础振动学

〔日〕斋藤秀雄 著

徐光弘 译 王麟森 校

西北电讯
工程学院

工业基础振动学

〔日〕 斋藤秀雄 著

徐光弘 译　　王麟森 校

西北电讯工程学院

一九八〇年九月

翻 译 说 明

本书是由日本东北大学教授、工学博士斋藤秀雄1977年8月著的“工业基础振动学”一书译成中文的。

本书的特点是归纳全面、通俗易懂。可作为高等学校机械系各专业的教科书、参考书，并适宜从事机械设计、结构设计的技术人员自学，供设计中进行振动计算时参考。

由于译者的专业技术水平和日文水平所限，错误和缺点肯定很多，衷心希望读者批评指正。

一九八〇年三月

序

随着工业的飞速发展，机械和结构物愈加高速、复杂和轻量，引起振动的机会增加了，抑制振动或防止振动成为非常重要的问题。振动和噪音公害也成为非常迫切的问题被予以注意。这些问题唯有以振动理论为基础才能进行分析，也才能找到解决问题的头绪。

在大学和高等专科学校的机械系各专业中，振动学以机械力学、振动工程学等名称作为一门专业基础课进行讲授。另外，由于出版了很多关于振动的著作，为了一般地学习振动学，我们是不会感到缺乏有关书籍的。但是，我认为对于初次学习本课程的学生来说，由于难于接受这种以数学、力学为主体的学问，掌握起来是相当费劲的。再说即使在开始阶段较多地学习与专业有关的知识，所得也少。我认为对于学生和一般技术人员来说，最好还是首先较好地理解基础知识以及它们之间的联系，为能在详细区分的专业领域进行工作打好基础，培养分析和解决实际问题的能力。

根据以上的想法，把占机械力学中心位置的机械振动、结构构件的振动和与它们有关的知识的基本性质通俗易懂地归纳为工业基础振动学一书，打算作为大学、高等专科学校的教科书、参考书以及从事实际工作的一般技术人员的自学书。

本书第一章叙述作为振动的基础的简谐振动的性质，以下各章按照自由度数从一个自由度系统到无限自由度系统进行安排，最后简单叙述非线性振动，使读者认识与线性振动的差异。习题附于各节，把学习的结果立即应用于习题，以便加深理解，习题答案或解法归总附于书末。书中的单位采用如附录所示的国际单位（SI）制，为了易于掌握其大小概念，附记了与工程单位制的换算表。

本书是一本入门书，努力做到掌握普通微积分就能理解，不需应用特殊的知识，但又以学习到本书的程度就能解决一般的问题来记述。由于讲课的分配时间有种种限制，讲课中不必遍及本书的全部内容，可选择适宜的章节。

最后，在本书出版之际，对为本书尽力的诸位深表谢意。

斋藤秀雄

1977 年 8 月

目　录

第一章　振动及其性质

1.1　振　动

把隔一定时间 τ 重复某种状态的运动叫做周期运动。周期运动是在运动中经常看到的非常普遍的运动。行星绕太阳的旋转运动、地球的自转或摆的运动、活塞的往复运动等都是周期运动。把周期运动和近似于周期运动的运动总称为振动。τ 叫做周期，单位时间内状态重复的次数 f 称为频率或振动数。设某种状态为 u、时间为 t，则周期运动可用下式表示：

$$u(t) = u(t+\tau) \tag{1.1}$$

$$f = 1/\tau \tag{1.2}$$

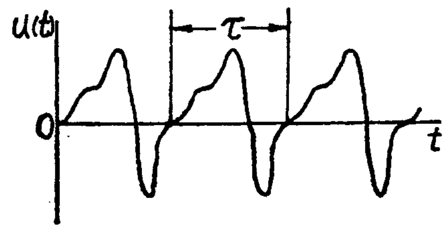


图 1.1

图 1.1 所示为周期运动的一个例子，图中取 t 为横座标、u 为纵座标。

1.2　简谐振动

在周期运动中，时间的正弦函数

$$u = a\sin(\omega t + \phi) \tag{1.3}$$

是最简单且最基本的振动。把这种振动叫做简谐振动或谐和振动。a 称为振幅，2a 称为全振幅，$\omega t + \phi$ 称为在时刻 t 的相位，ω 称为角频率（或圆频率），$t = 0$ 时的相位 ϕ 称为初相位。（1.3）式还可写成

$$u = a\cos(\omega t + \phi - \pi/2)$$

若设（$\phi - \pi/2$）为 ψ，则

$$u = a\cos(\omega t + \psi) \tag{1.4}$$

由以上可知，根据初相位的取法，u 既可为正弦函数也可为余弦函数，故简谐振动用（1.3）、（1.4）式中的哪一个来表示都可以。由图 1.2 可以方便地理解简谐振动。图(a)中，x、y 平面上的点 p 在以原点 0 为圆心、a 为半径的圆周上以匀角速度 ω 逆时针旋转。$t = 0$ 时，0p 位于与 x 轴之间夹角为 ϕ 的 $0p_0$。在时刻 t，0p 在与 x 轴之间夹角为 $\omega t + \phi$ 的位置，所以点 p 在 x、y 方向的位移为

$$x = a\cos(\omega t + \phi) \tag{1.5}$$

$$y = a\sin(\omega t + \phi) \tag{1.6}$$

（1.5）、（1.6）式也可以认为是矢量 $\overrightarrow{0p}$（$= a$）以匀角速度 ω 旋转时，a 在 x 轴、y 轴上的投影。（1.5）、（1.6）式明显地是简谐振动。取 t 作横坐标轴，将（1.6）式图示如图 1.2(b)，可知角速度 ω 与角频率相等。图中，当时间由 t 变到 $t + \tau$，a 的相位变化 2π 时，a 旋转一周，x、y 回到原来的值，完成一次振动。周期 τ 是 a 旋转一周所要的时间

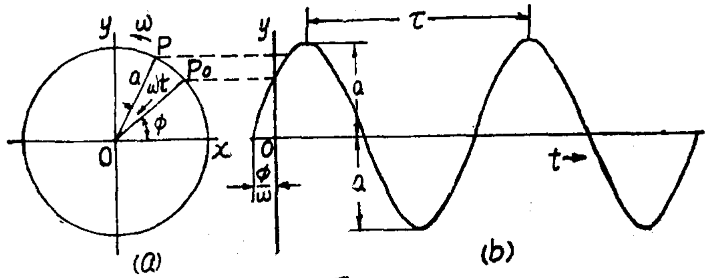


图1.2

$$\tau = \frac{2\pi}{\omega} \tag{1.7}$$

频率 f 为

$$f = \frac{\omega}{2\pi} \tag{1.8}$$

频率大多用每秒钟的振动次数以 Hz（赫兹）为单位来表示。

下面考虑 p 点 x 方向的速度 $\dot{x}$ 和加速度 $\ddot{x}$。由（1.5）式可得

$$\left.\begin{aligned}\dot{x} &= -\omega a\sin(\omega t+\phi) = \omega a\cos\left(\omega t+\phi+\frac{\pi}{2}\right)\\ \ddot{x} &= -\omega^2 a\cos(\omega t+\phi) = \omega^2 a\cos(\omega t+\phi+\pi)\end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

可知速度和加速度也仍然为简谐振动。又在图 1.3 中，若考虑相位比旋转矢量 **a** 超前 $\pi/2$、大小为 ωa 的矢量 **v** 和相位超前 π、大小为 $\omega^2 a$ 的矢量 **α**，可知速度和加速度可用 **v**、**α** 在x轴上的投影表示。

习　题　1.2

（1）试求振幅 5mm，周期 0.15s 的简谐振动的最大速度和加速度。

（2）装在悬臂梁前端的质量为 0.1kg 的集中质量，以频率 10Hz、振幅 2mm 作简谐振动。试求质量的速度振幅和加速度振幅各为多少？并求作用在质量上的惯性力。

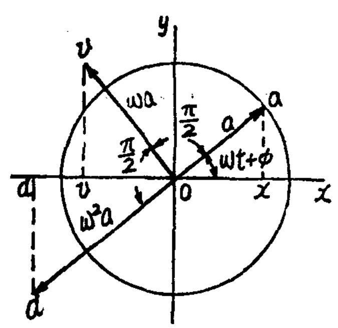
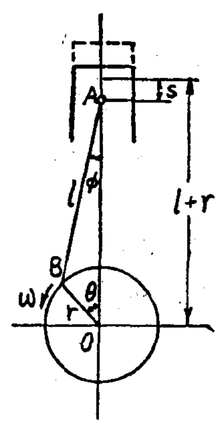


图1.3



图P-3

(3) 如图 p-3 所示，活塞曲柄往复机构的曲柄以匀角速度 ω 旋转时，试把活塞的位移 s、速度 v、加速度 a 用角 θ 的函数表示之。并求 $l>>r$ 时它们的近似公式。

(4) 习题(3)中，当曲柄半径 r 为 9cm、连杆长度 l 为 36cm、转速为 1400rpm 时，试计算活塞的最大速度和加速度。

(5) 为了使放置在以 4Hz 频率作垂直方向简谐振动的台上的物体不从台上离开，台的振幅应该小于多少？ $T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $mg>32\pi^2 m A$

$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

1.3 简谐振动的复数表示

图 1.4 中，x、y 平面上的任意矢量 **a** 可以用复数表示为

$$\mathbf{a}=b+ic$$

式中 $i=\sqrt{-1}$。

反之可以认为，任何复数 $b+ic$ 也表示具有 $x=b$、$y=c$ 成分的矢量。今设

$$a=\sqrt{b^2+c^2} \qquad \phi=tg^{-1}\frac{c}{b} \tag{1.10}$$

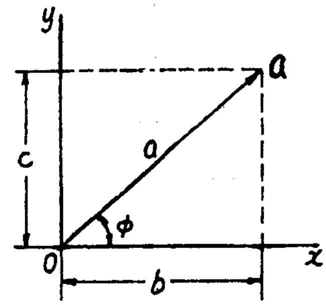


图1.4

则

$$\mathbf{a}=b+ic=a(\cos\phi+i\sin\phi)=ae^{i\phi} \tag{1.11}$$

用旋转矢量表示的简谐振动也可以用上述方法改写成复数表示。图 1.2 中的旋转矢量 **a** 可写成

$$\left.\begin{aligned}\mathbf{a}&=a[\cos(\omega t+\phi)+i\sin(\omega t+\phi)]\\&=ae^{i(\omega t+\phi)}\end{aligned}\right\} \tag{1.12}$$

表示简谐振动 (1.5) 或 (1.6) 式时，可以取 (1.12) 式的实部或虚部二者之中的一个分别表示如下：

$$\left.\begin{aligned}a\cos(\omega t+\phi)&=Re[ae^{i(\omega t+\phi)}]\\a\sin(\omega t+\phi)&=I_m[ae^{i(\omega t+\phi)}]\end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

式中 Re 或 I_m 是表示[ ]内函数的实部或虚部的符号。用 (1.12) 式可以推导出 (1.5)、(1.9) 式的复数表示如下：

$$\left.\begin{aligned}x&=ae^{i(\omega t+\phi)}\\\dot{x}&=\frac{d}{dt}[ae^{i(\omega t+\phi)}]=i\omega ae^{i(\omega t+\phi)}=\omega ae^{i(\omega t+\phi+\pi/2)}\\\ddot{x}&=\frac{d^2}{dt^2}[ae^{i(\omega t+\phi)}]=-\omega^2ae^{i(\omega t+\phi)}=\omega^2ae^{i(\omega t+\phi+\pi)}\end{aligned}\right\} \tag{1.14}$$

图 1.4 中，若认为 **a** 为力矢量，则简谐振动力 **F** 也可以在复数面上表示为

$$\mathbf{F}=F_0e^{i(\omega t+\phi)}$$

把简谐振动表示为矢量时，容易直观理解。而表示为复数时，可以简单机械地进行振动计算。

习 题 1.3

(1) 设 $a_1=1+i\sqrt{3}$、$a_2=4+i\sqrt{3}$，试用 $\mathbf{a}=ae^{i\phi}$ 的形式表示以下各式：

(a) $\mathbf{a}_1+\mathbf{a}_2$ (b) $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$ (c) $\mathbf{a}_1/\mathbf{a}_2$ (d) $\mathbf{a}_1{}^2/\mathbf{a}_2$

(2) 用复数形式表示 $\cos\omega t$、$\sin\omega t$。计算 $\cos^2\omega t$、$\cos^3\omega t$、$\sin^4\omega t$，用简谐振动之和表示之。

1.4 简谐振动的合成

叠加用简谐振动表示的运动时，将组成什么样的运动呢？由于其运动方向、频率和相位的不同，情况是不一样的，可以得到各种运动。下面分别讨论之。

(a) 同方向同频率简谐振动的合成

两个简谐振动分别为

$$x_1=a_1\cos(\omega t+\phi_1),\ x_2=a_2\cos(\omega t+\phi_2) \tag{1.15}$$

其合成运动为

$$\begin{aligned}x&=x_1+x_2\\&=(a_1\cos\phi_1+a_2\cos\phi_2)\cos\omega t-(a_1\sin\phi_1+a_2\sin\phi_2)\sin\omega t\end{aligned} \tag{1.16}$$

现设

$$c\cos\phi=a_1\cos\phi_1+a_2\cos\phi_2,\ c\sin\phi=a_1\sin\phi_1+a_2\sin\phi_2$$

则

$$x=c\cos(\omega t+\phi) \tag{1.17}$$

式中

$$\left.\begin{aligned}c^2&=a_1{}^2+a_2{}^2+2a_1a_2\cos(\phi_2-\phi_1)\\ \mathrm{tg}\phi&=\frac{a_1\sin\phi_1+a_2\sin\phi_2}{a_1\cos\phi_1+a_2\cos\phi_2}\end{aligned}\right\} \tag{1.18}$$

由（1.17）式可知，此时的合成曲线为有相同周期的简谐振动。合成三个以上的同周期的简谐振动时也一样，仍是相同周期的简谐振动。

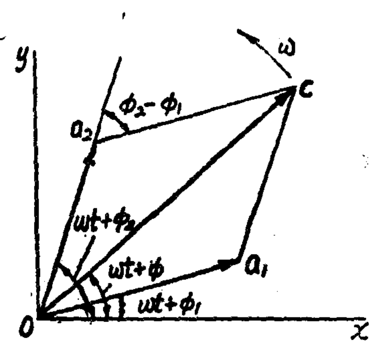


图1.5

上述情况若用矢量表示，是很容易理解的。图 1.5 为表示它们的矢量图。由于（1.15）式可用旋转矢量 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 的 x 成分表示，所以合成振动可以用把 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 两矢量加在一起的合成矢量 $\mathbf{c}$ 的 x 成分给出。$\mathbf{c}$ 的大小可由（1.18）的第 1 式给出，考虑图中的三角形 Oa_2c，便能直接理解。关于 ϕ，通过在图中求出 $\mathrm{tg}(\omega t+\phi)$，再设 $t=0$，可以求出(1.18)的第 2 式。

(b) 同方向不同频率的简谐振动的合成

$$x_1 = a_1\cos(\omega_1 t + \phi_1),\ x_2 = a_2\cos(\omega_2 t + \phi_2) \qquad (1.19)$$

上式两个简谐振动的合成虽可用如图 1.6 (a) 所示的旋转矢量 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 的合成矢量 $\mathbf{c}$ 的

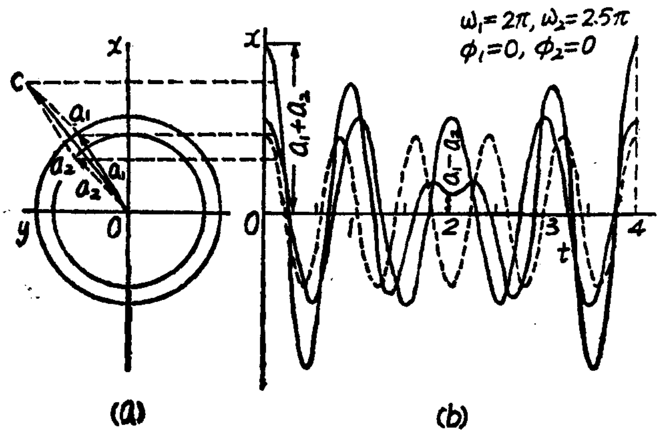


图 1.6

x 成分给出，但因为 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 的旋转速度不同，$\mathbf{c}$ 的大小在 $\mathbf{a}_1$、$\mathbf{a}_2$ 重叠时为最大值 a_1+a_2，在相反方向时为最小值 a_1-a_2，$\mathbf{c}$ 的大小随时间时时刻刻在它们之间变化。取 t 为横轴，将它表示如图 1.6(b)。x_1、x_2 用细实线和虚线表示，虽可用它们代数相加求出粗实线表示的合成曲线，但得出的合成振动不是简谐振动。

作为特殊情况，当角频率之差 $\omega_2-\omega_1$ 小的时候，所合成的运动为振幅周期性增减的振动。把这种现象叫做拍。为了简单，考虑 $a_1=a_2=a$，$\phi_1=\phi_2=0$ 的情况，此时

$$x = a(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t)$$
$$= \left(2a\cos\frac{\omega_2-\omega_1}{2}t\right)\cos\frac{\omega_2+\omega_1}{2}t \qquad (1.20)$$

当 ω_2 与 ω_1 几乎相等时，(1.20) 式成为近似于具有频率 $(\omega_2+\omega_1)/2$ 的简谐振动的振动，但其振幅随 $2a\cos(\omega_2-\omega_1)t/2$ 在 0 和 2a 之间变动。这种情况如图 1.7 所示，图中取 t 为横轴。

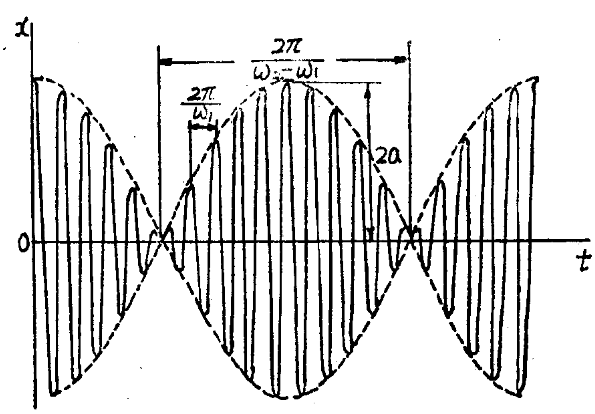


图 1.7

(c) 在互相垂直方向振动的简谐振动的合成

p 点在 x、y 平面上既在 x 轴方向，也在 y 轴方向进行简谐振动时

$$x = a\cos(\omega_1 t + \phi)$$
$$y = b\cos(\omega_2 t + \psi) \qquad (1.21)$$

p点的合成运动将成为什么样的呢？此运动在x、y平面中可作为具有（1.21）式座标的p点的轨迹来表示。把这种图形称为利萨如图形。试考虑上述（1.21）式中有相同频率的情况。今设

$$\omega_1=\omega_2=\omega, \qquad \psi-\phi=\alpha$$

则

$$y=b\cos(\omega t+\phi+\alpha)$$
$$=b\cos(\omega t+\phi)\cos\alpha-b\sin(\omega t+\phi)\sin\alpha$$

可是因为

$$\sqrt{a^2-x^2}=a\sin(\omega t+\phi)$$

所以

$$y=b\left(\frac{x}{a}\right)\cos\alpha-b\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}\sin\alpha$$

由此

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2-2\frac{xy}{ab}\cos\alpha+\left(\frac{y}{b}\right)^2=\sin^2\alpha \qquad (1.22)$$

（1.22）式虽是椭圆的公式，但由于a、b、α的取法不同，其形状也不同。取最简单的a=b的情况时，（1.22）式成为

$$x^2-2xy\cos\alpha+y^2=a^2\sin^2\alpha \qquad (1.23)$$

即	$\alpha=0$ 时	$(x-y)^2=0$	直线
	$\alpha=\pi/4$ 时	$x^2-\sqrt{2}\,xy+y^2=a^2/2$	椭圆
	$\alpha=\pi/2$ 时	$x^2+y^2=a^2$	圆
	$\alpha=3\pi/4$ 时	$x^2+\sqrt{2}\,xy+y^2=a^2/2$	椭圆
	$\alpha=\pi$ 时	$(x+y)^2=0$	直线

根据初相位差α的值，利萨如图形变化为直线、椭圆、圆、……。其图样如图1.8所示。若x、y方向振动的频率比不同，则图形变得复杂起来。图1.9(a)、(b)所示为频率比ω_1：ω_2等于1：2和1：3时的利萨如图形。即使相同的频率比，由于初相位差α的值不同，图形也不同，这与频率比为1：1时的情况是一样的。把频率未知的简谐振动与具有已知频率的简谐振动组合描绘出利萨如图形，可以由此求出未知的频率。例如，把已知的振动输入阴极射线示波器的水平轴，把未知频率的振动输入垂直轴，让示波器描绘出利萨如图形。然后，如图1.9(b)所示画水平切线和垂直切线，数出利萨如图形的横的和纵的切点数，并把不成为切点的接触点计算成切点数为1/2，就可使用下式求出未知频率：

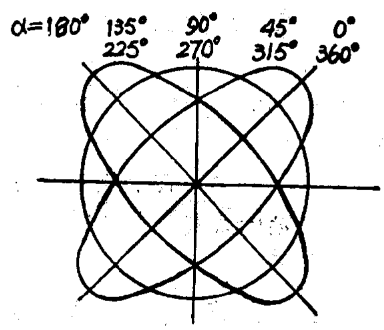


图1.8

$$\frac{\text{所测定振动的频率}}{\text{已知频率}}=\frac{\text{横的切点数}}{\text{纵的切点数}}$$

这是一个求未知频率的好方法。

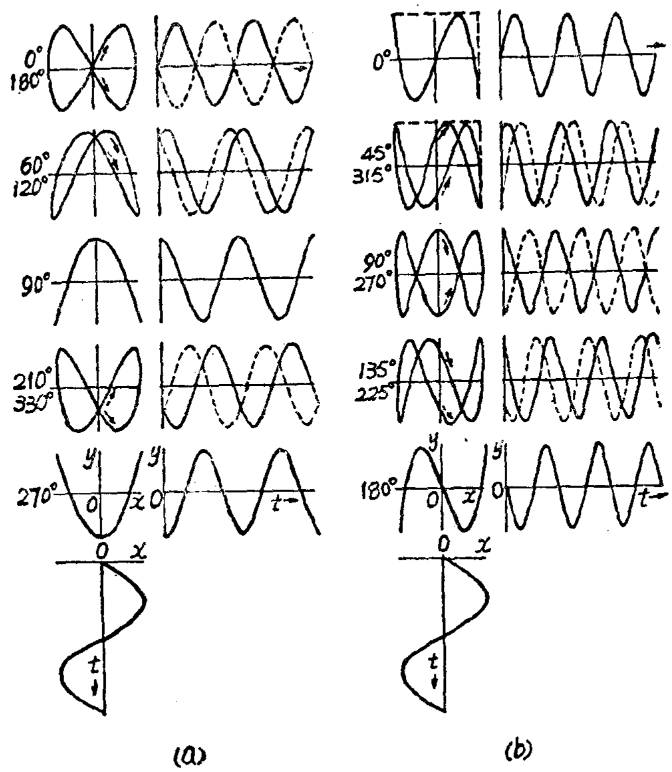


图1.9

习 题 1.4

(1) 试用复数表示合成（1.15）式所示的两个振动。

(2) 试求 $x_1=6\cos\omega t$，$x_2=10\cos(\omega t+1)$的合成振动。

(3) 试证明下列三个简谐振动的合成为0：

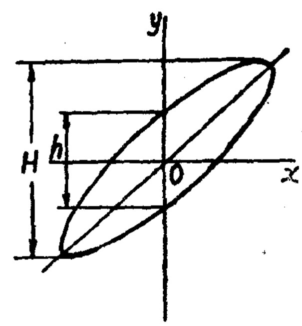
$$x_1=r\cos\omega t,\ x_2=r\cos(\omega t+2\pi/3),$$
$$x_3=r\cos(\omega t+4\pi/3)$$

(4) 合成振动 $x=8\sin(\omega t+\pi/6)$的一个成分为 $x_1=2\sin(\omega t+\pi/4)$时，试求另一成分。

(5) 同方向振幅为2cm，频率分别为5Hz和5.5Hz的两个简谐振动，其合成振动如何组成？

(6) 某物体在台上对台作 $x_1=0.95\sin 18t$ 的振动。此台还对地面作 $x_2=1.00\ 19t$的振动。若站在地面上看物体，能看到物体作什么样的运动？

(7) 机械在垂直的两个方向上振动，其轨迹为如图 p-7 所画的椭圆，试证明当由此椭圆测量出长度 h 和 H 时，即可求出在垂直两方向的振动的相位差。



图P-7

1.5 傅里叶级数和谐波分析

我们知道，合成周期不同的简谐振动时，合成运动已经不成为简谐振动，而是某种周期运动了。反过来考虑，则能很容易类推出可以把不是简谐振动的任意振动分解成数个简谐振动之和。以周期 τ、角频率 ω 重复的任意函数 $f(t)$ 作为具有周期 τ、$\tau/2$、$\tau/3$、……，即具有角频率 ω、2ω、3ω、……的简谐振动之和，一般可以表示如下：

$$f(t)=C_0+C_1\cos(\omega t+\phi_1)+C_2\cos(2\omega t+\phi_2)+C_3\cos(3\omega t+\phi_3)+\cdots\cdots \tag{1.24}$$

把如上用正弦或余弦函数的级数表示函数 $f(t)$ 的（1.24）式的右边叫做傅里叶级数。第2项叫做基本振动或1阶振动。第（$n+1$）项即具有角频率 $n\omega$ 的项叫做 n 阶振动。又把2阶振动以上的总称为高阶振动。谐波分析就是决定包含在（1.24）式中的 C_0、C_1、C_2、……，ϕ_1、ϕ_2、……。（1.24）式也可以写成

$$f(t)=a_0+a_1\cos\omega t+a_2\cos2\omega t+a_3\cos3\omega t+\cdots\cdots+b_1\sin\omega t+b_2\sin2\omega t+b_3\sin3\omega t+\cdots\cdots \tag{1.25}$$

在此

$$C_n=\sqrt{a_n{}^2+b_n{}^2}\ ,\quad \mathrm{tg}\phi_n=-\frac{b_n}{a_n}$$

把（1.25）式的两边从0到 2π 对 ωt 积分，则

$$\int_0^{2\pi}f(t)d(\omega t)=2\pi a_0$$

由此得

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(t)d(\omega t) \tag{1.26}$$

接着两边乘以 $\cos n\omega t$ 或 $\mathrm{sis}n\omega t$，并从0到 2π 对 ωt 积分，则得

$$\left.\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\cos n\omega t\,d(\omega t)\\ b_n&=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(t)\sin n\omega t\,d(\omega t)\end{aligned}\right\} \tag{1.27}$$

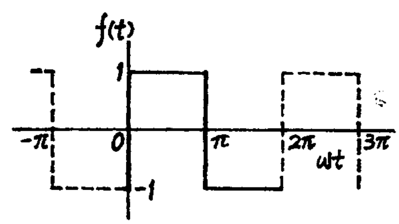


图1.10

用（1.26）、（1.27）式可以确定傅里叶级数的各系数。还有，积分区间只要有 2π 就行，故也可以取 $-\pi\sim\pi$ 代替 $0\sim2\pi$。作为例子，试把以上方法用于如图1.10所示的 $f(t)$。$f(t)$ 对于原点是反对称的，具有 2π 的周期。若用（1.25）、（1.26）和（1.27）式进行计算，则

$$f(t)=\frac{4}{\pi}\left(\frac{\sin\omega t}{1}+\frac{\sin3\omega t}{3}+\frac{\sin5\omega t}{5}+\cdots\cdots\right) \tag{1.28}$$

取（1.28）式到开始的 n 项，把它们加在一起的曲线如图1.11所示。

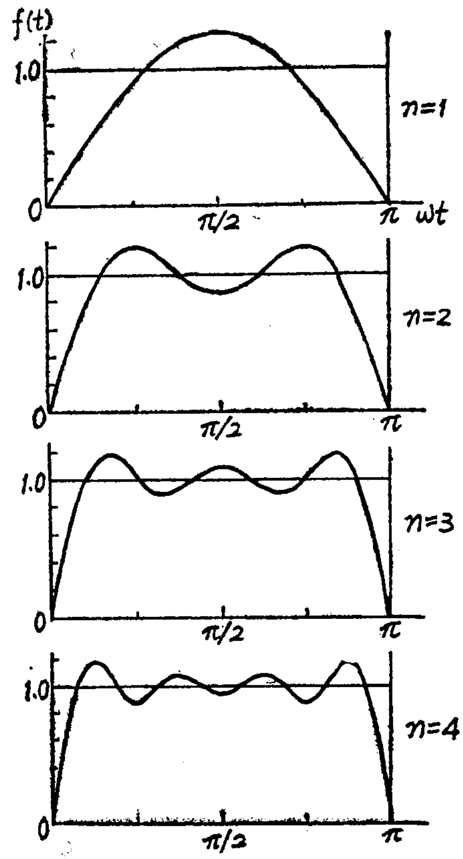


图1.11

习 题 1.5

(1) 试证明图 p-1 所示的周期函数 f(t) 可用下列的傅里叶级数表示：

(a) $f(t)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\frac{1}{5}\sin 5\omega t+\cdots\cdots\right)$

(b) $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{1}{\pi}\left(\sin\omega t+\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t+\cdots\cdots\right)$

(c) $f(t)=\frac{2}{\pi}\left(\sin\omega t-\frac{1}{2}\sin 2\omega t+\frac{1}{3}\sin 3\omega t-\cdots\cdots\right)$

(d) $f(t)=\frac{8}{\pi^2}\left(\sin\omega t-\frac{1}{3^2}\sin 3\omega t+\frac{1}{5^2}\sin 5\omega t-\cdots\cdots\right)$

(e) $f(t)=\frac{1}{2}-\frac{4}{\pi^2}\left(\cos\omega t+\frac{1}{3^2}\cos 3\omega t+\frac{1}{5^2}\cos 5\omega t+\cdots\cdots\right)$

(f) $f(t)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{1\cdot 3}\cos 2\omega t+\frac{1}{3\cdot 5}\cos 4\omega t+\frac{1}{5\cdot 7}\cos 6\omega t+\cdots\cdots\right)$

(2) 试用傅里叶级数表示周期函数 $f(t)=1-t^2$，$0\leqslant t\leqslant 1$。