《中学课程课外读物》

北京市海淀区教师进修学校主编

高二代数

自学解难

重庆出版社　华夏出版社

中学课程课外读物

代数自学解难

——附参考答案

北京市海淀区教师进修学校主编

重庆出版社　华夏出版社

1987年·重庆

责任编辑　赵　剑

高二代数自学解难

重庆出版社、华夏出版社出版
新华书店重庆发行所发行　重庆印制第一厂印刷

开本 787×1092 1/32　印张 7.5　字数 168 千
1987年7月第一版　1988年7月第二版第二次印刷
印数：200,000

ISBN 7-5366-0086-0/G·56

定价：1.45元

前　言

为了帮助具有中等文化水平的青年和广大自学读者更好地掌握中学课程内容并提高他们的文化科学知识水平，我们组织了部分教学经验比较丰富的中学教师和教学研究人员，编写了这套《中学课程课外读物》。它包括语文、数学、外语、政治、历史、地理、物理、化学、生物等学科。

课外读物应该有利于掌握中学课程内容和扩大知识面。编写时我们注意依据教学大纲，体现各学科自身的特点，突出重点，剖析难点，开阔视野，启迪思维，开发智力，培养能力；力求使这套书具有针对性、启发性、实用性，成为广大读者自学中学课程的良师益友，成为家长指导和检查子女学习的助手，并可供教师备课时参考。

数学部分，每讲包括四节：系统与结构、理解与思考、方法与能力、回味与引申。

系统与结构，是出于体现较先进的系统观点，有利于读者从整体上把握知识而设置的。

理解与思考，从强调理解出发着重对基础知识，特别是重难点进行了较详细的讲述。同时，在学习方法方面引导读者重视独立思考。

方法与能力，一方面讲述了各种基本题型及其解题方法，另方面通过综合性较强的例题的剖析，加强了能力的培养。这一部分之后，配备有几组练习题供读者选用。此外，还编拟了一份自测题并附答案，以便自学的读者自我检查。

回味与引申，通过这部分对学有余力的读者，在知识的深度、广度上给以引导，在思想方法上给以指点。

参加本书编写的有：

北京十九中	段发善
北京十一学校	张怡平
北京花园村中学	陶大裕
北京大学附属中学	陈剑刚
北京一二三中	杨弘敏
北京二十中	范登宸
北京八一中学	何振琪
北京四十七中	王健民
北京市海淀区教师进修学校	汪惟葆

由于编者水平有限，书中如有疏漏或不足之处，欢迎读者批评指正。

北京市海淀区教师进修学校

目　录

第一讲　反三角函数和简单三角方程

一　系统与结构

- 反三角函数
  - 概　念
  - 表示法
  - 性　质
- 三角方程：含未知数的三角函数的方程.
  - 最简三角方程求解；已知三角函数值求角；解集合的表示式。
  - 简单三角方程解法

说明：1．本讲的两部分知识既互相独立又互相联系，互相独立表现在有各自的理论体系和内部规律；互相联系表现在反三角函数的值是对应的三角方程的特解，而三角方程的通解则要用含有反三角函数值的式子来表示。

2．反三角函数是反函数概念的继续和发展。映射与逆映射、函数与反函数都包含两个相反的思维过程，学习本讲可进行逆向思维的训练。

3．三角方程是已知三角函数值求角的继续和发展。学习解三角方程要理解反三角函数与三角方程的关系，进一步理解三角函数的周期性，也是运用三角公式进行恒等变形的一次训练。

二　理解与思考

学习本讲难点就在于反三角函数的概念，要在深入理解反三角函数的来源、定义、性质以及它与三角方程的关系上下功夫。

1. 用映射和逆映射的观点来认识三角函数和反三角函数的关系。

在高一代数中用映射、逆映射的观点引入反函数的概念，明确了只有当一个函数是从定义域到值域的一一映射的条件下，它才有反函数，并学会了求反函数的一般方法，接着又学了互为反函数的两个重要函数：指数函数和对数函数。在本讲继续学习反三角函数，将进一步拓广和加深对反函数的认识，它的内容更加丰富多采。下面仅以反正弦函数的引入说明上述观点。

（1） 确定正弦函数的映射不是从定义域到值域的一一映射，每一个确定的角（或每一个确定的实数）都有唯一的正弦值和它对应，比如$\sin 30^\circ=\frac{1}{2}$，但若已知正弦的值求对应的角则有无穷多个，比如$\sin\alpha=\frac{1}{2}$，则$\alpha=k\pi+(-1)^k\frac{\pi}{6}$ $(k\in Z)$，因此，正弦函数是从定义域到值域的映射，但不是一一映射，于是在定义域R上没有反函数。

（2） 要想建立正弦函数的反函数，必须在定义域R上适当选取一个子集，使得正弦函数成为从这个子集到值域的一一映射。通常，这样的子集都按下列要求来选取：

① 在这个子集上，函数是单调的；

② 在这个子集上，函数可取得它能够取得的一切值；

③ 在这个子集上，包括一切锐角。

只要满足了前两条就能达到一一映射的目的，而第三条只是为了研究问题的方便。

函数$y=\sin x$ 的值域是$[-1, 1]$，在它的定义域 R 上取子集$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$，就适合上述三个条件，请看图1—1. 这说明 $y=\sin x$ 是从$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$到$[-1, 1]$上的一一映射，因而在$\left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]$上有反函数。

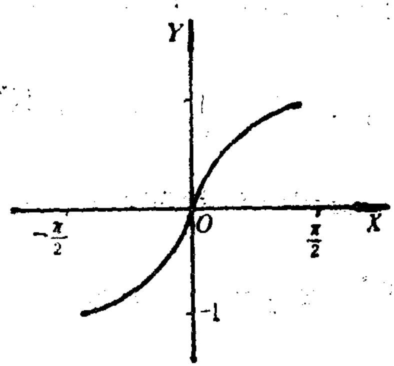

图 1-1

请读者思考：在其它区间上，$y=\sin x$能否有反函数？

（3） 怎么建立反正弦函数呢？对于有反函数且有解析式的某些函数，求反函数的步骤是先由函数解析式$y=f(x)$ 解出 $x=f^{-1}(y)$，这就是逆对应的解析式，其中 y 是原来函数值域中的元素，也就是反函数定义域中的元素，但习惯上总用x 表示定义域中的元素，所以改记为 $y=f^{-1}(x)$，这里，x 的取值范围就是原来函数中 y 的取值范围，即反函数的定义域是原来函数的值域。根据以上的思路，按下页表步骤来建立反正弦函数。

表中的$y=\arcsin x$就是反正弦函数，但还有一个问题需解决：$\arcsin x$与x是什么关系？我们从表中看到：$x=\arcsin y$可看成是从 $y=\sin x$ 中解出x，表示为含 y 的式子 $\arcsin y$，

步骤	对应关系	定义域	值域
一一映射$f(x)$	$x\to y=\sin x$	$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$	$y\in[-1,1]$
逆映射$f^{-1}(y)$	$y\to x=\arcsin y$	$y\in[-1,1]$	$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$
习惯形式$f^{-1}(x)$	$x\to y=\arcsin x$	$x\in[-1,1]$	$y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

当然它应该适合原式 $y=\sin(\arcsin y)$，又由于x的取值范围有限制：$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，所以，$\arcsin y$也有相同的限制：$\arcsin y\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$，当我们按习惯将 $x=\arcsin y$ 写成 $y=\arcsin x$ 后就有 $x=\sin(\arcsin x)$，且 $\arcsin x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$。总结以上，$y=\sin x$，$x\in\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$的反函数是$y=\arcsin x$，$\arcsin x$是$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$上正弦等于$x$的一个角，即 $\sin(\arcsin x)=x$，其中 $x\in[-1, 1]$。同理，可建立起其它各反三角函数，这里不赘述。

将反三角函数的性质列表如下(见下页)。

对于增减性应注意下述题目的解法：

〔例 1〕 已知$\arcsin x>1$，求x的取值范围。

解：因为 $\arcsin x$ 在定义域$[-1, 1]$上是增函数，所以有$\sin 1<x\leqslant 1$。

〔例 2〕 已知：$0<x\leqslant 1$，求证：$\arccos(-x)>\arccos x$。

函　数	定义域	值　域	增减性	奇偶性	重要公式
$y=\arcsin x$	$[-1,\ 1]$	$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$	增	奇	$\sin(\arcsin x)=x$
$y=\arccos x$	$[-1,\ 1]$	$[0,\pi]$	减	非奇非偶	$\cos(\arccos x)=x$
$y=\mathrm{arctg}x$	R	$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$	增	奇	$\mathrm{tg}(\mathrm{arctg}x)=x$
$y=\mathrm{arcctg}x$	R	$(0,\pi)$	减	非奇非偶	$\mathrm{ctg}(\mathrm{arcctg}x)=x$

证明：因为$\arccos x$在$0<x\leqslant 1$上是减函数，故

$\arccos 1\leqslant\arccos x<\arccos 0$，　　即 $0\leqslant\arccos x<\frac{\pi}{2}$，在

$\arccos x<\frac{\pi}{2}$中，两边都乘2，有$2\arccos x<\pi$，于是$\arccos x<\pi-\arccos x$，因为$\arccos(-x)=\pi-\arccos x$，故$\arccos x<\arccos(-x)$，即$\arccos(-x)>\arccos x$。

根据函数图象和它的反函数的图象关于直线$y=x$对称这一原理，便可得到各反三角函数的图象，依次为图1-2到图1-5。

2．充分理解反三角函数间的基本关系

（1）x与$-x$间的反三角函数的关系：

① $\arcsin(-x)=-\arcsin x$，这说明$\arcsin x$是奇函数；

② $\arccos(-x)=\pi-\arccos x$；

③ $\mathrm{arctg}(-x)=-\mathrm{arctg}x$，这说明$\mathrm{arctg}x$是奇函数；

④ $\mathrm{arcctg}(-x)=\pi-\mathrm{arcctg}x$。

（2）同一个自变量的反三角函数的关系：

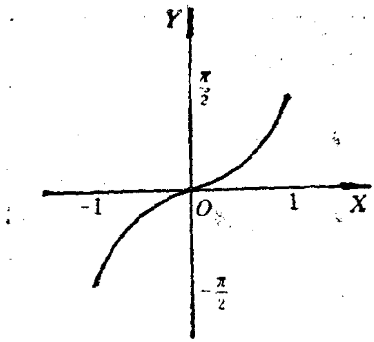

图 1-2

$y=\arcsin x$

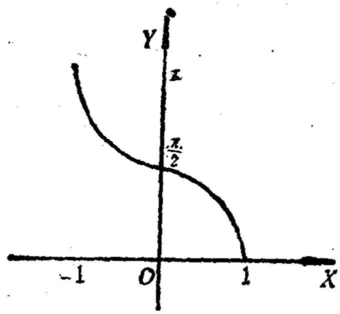

图 1-3

$y=\arccos x$

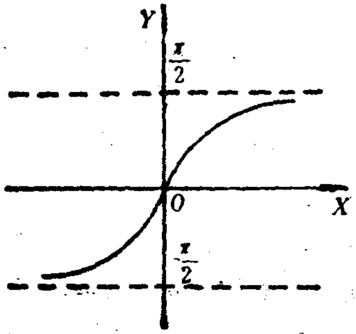

图 1-4

$y=\operatorname{arctg} x$

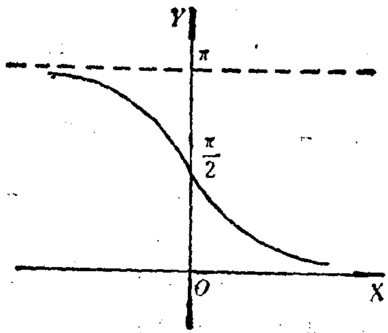

图 1-5

$y=\operatorname{arcctg} x$

① $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$;

② $\operatorname{arctg} x+\operatorname{arcctg} x=\frac{\pi}{2}$.

以上各等式应熟记，并会证明，下面仅以一例说明证题思路，其余请读者自证之.

求证：$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$。

证明：根据诱导公式，得

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right)=\cos(\arccos x)=x.$$

因此，$\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 是正弦等于x的一个角，又因为 $0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，所以 $0\geqslant-\arccos x\geqslant-\pi$，由此可得 $-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}$，这说明$\frac{\pi}{2}-\arccos x$ 是在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$上的正弦等于 x 的一个角，根据反正弦函数的定义，得：$\frac{\pi}{2}-\arccos x=\arcsin x$，即

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

证法二：根据和角公式，有：

$\sin(\arcsin x+\arccos x)=x\cdot x+\sqrt{1-x^2}\cdot\sqrt{1-x^2}=x^2+1-x^2=1$，因此，$\arcsin x+\arccos x$ 是正弦等于 1 的一个角，又因为$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$0\leqslant\arccos x\leqslant\pi$，故：$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x+\arccos x\leqslant\frac{3\pi}{2}$，而在$\left[-\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$上，正弦等于 1 的角只有$\frac{\pi}{2}$，所以 $\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}$.

证法三：根据诱导公式和反三角函数定义有：$\sin\Big(\frac{\pi}{2}$

$-\arccos x\Big)=x$，$\sin(\arcsin x)=x$，这说明$\frac{\pi}{2}-\arccos x$与$\arcsin x$都是正弦等于x的角，又因为，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}-\arccos x\leqslant\frac{\pi}{2}$，$-\frac{\pi}{2}\leqslant\arcsin x\leqslant\frac{\pi}{2}$，而在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上正弦函数是单值的，即正弦等于$x(|x|\leqslant1)$的角只有一个，故$\frac{\pi}{2}-\arccos x=\arcsin x$，即：

$$\arcsin x+\arccos x=\frac{\pi}{2}.$$

3． 在理解反三角函数与最简三角方程的关系的基础上，推导最简三角方程的求解公式。

(1) 反三角函数与三角方程的关系

我们已经知道：当$|a|\leqslant1$时，$\arcsin a$表示在$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$内正弦等于$a$的一个角，即$\sin(\arcsin a)=a$，这就说明$x=\arcsin a$是方程$\sin x=a$的一个解（只是解中的一个，而不是全部）。说得详细一些，当$0\leqslant a\leqslant1$时，方程$\sin x=a$的解是终边落在上半平面或x轴上且正弦等于a的无穷多个角，而$x=\arcsin a$只是$\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$中的一个角；当$-1\leqslant a<0$时，方程$\sin x=a$的解是终边落在下半平面且正弦等于$a$的无穷多个角，而$x=\arcsin a$是其中一个角，这个角在$\left[-\frac{\pi}{2},\ 0\right]$内。

当$|a|\leqslant 1$时，$\arccos a$表示在$[0,\pi]$内余弦等于a的一个角，即$\cos(\arccos a)=a$，这就说明$x=\arccos a$是方程$\cos x=a$的一个解。

当a是任意实数时，$\operatorname{arctg} a$表示在$\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$内正切等于$a$的一个角，即$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a)=a$，这就说明$x=\operatorname{arctg} a$是方程$\operatorname{tg} x=a$的一个解。

当a是任意实数时，$\operatorname{arcctg} a$表示在$(0,\pi)$内余切等于a的一个角，即$\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a)=a$，这就说明$x=\operatorname{arcctg} a$是方程$\operatorname{ctg} x=a$的一个解。

(2) 怎样用含有反三角函数的式子来表示最简三角方程的通解？

利用单位圆中的三角函数线或利用三角函数的图象来帮助我们思考。思路是：先求出特解，然后利用周期性求出通解。我们曾经学过已知三角函数值求角，实际上就是解最简单的三角方程，用的就是这条思路。先复习一个例题：

已知$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$，求$\alpha$。

解：$\because\ \sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}<0$，$\therefore \alpha$是第三、四象限的角。

当α在第四象限时，有一个解是$-\frac{\pi}{4}$，与它终边相同的一切角是$\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$；当$\alpha$在第三象限时，有一个解是$\pi+\frac{\pi}{4}$，与它终边相同的一切角是$\alpha_2=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{4}$，$k\in Z$。

所以，适合$\sin\alpha=-\frac{\sqrt{2}}{2}$的一切角是$\alpha_1=2k\pi-\frac{\pi}{4}$，$\alpha_2=$