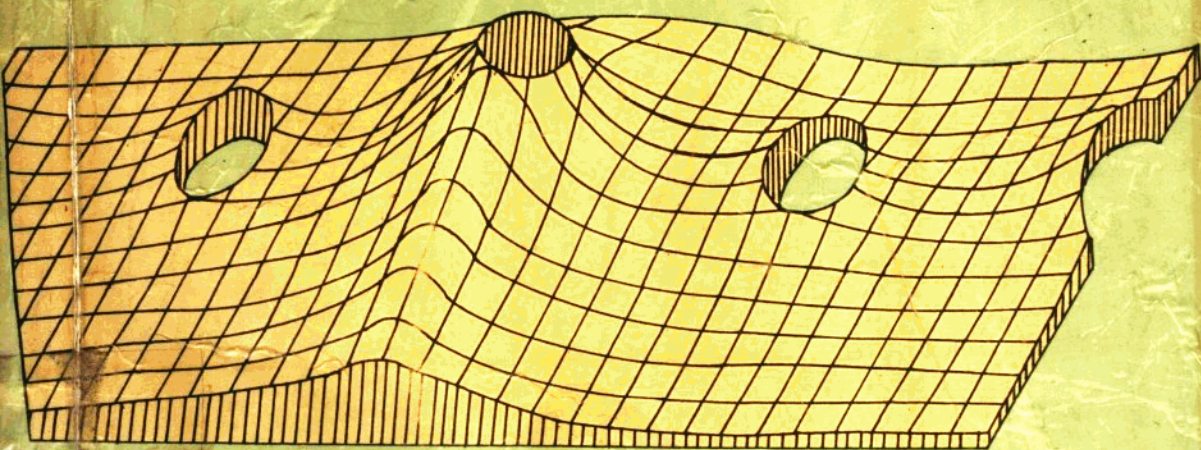


有限元法教程

王守信 主编



哈尔滨工业大学出版社

前 言

经过三十多年的发展,有限元法已成为结构设计和力学分析的最有效方法之一,成为有关工程技术人员和科研人员必须掌握的有力武器。因此,各高等工科院校在本科阶段,就普遍开设了有限元法课程。

为了编写一本适合高等工科院校本科生(或有关专业硕士研究生)需要的有限元法教材,哈尔滨工业大学、清华大学、南昌大学、辽宁大学、东北重型机械学院、洛阳工学院、辽宁工学院、哈尔滨电工学院、齐齐哈尔轻工学院、鞍山钢铁学院等十所院校的有关教师对教材内容、深度和编写指导思想进行了讨论。在吸取多方面宝贵建议的基础上,经过全体编、审人员的辛勤工作,这本《有限元法教程》终于和读者见面了。

就我们的愿望来说,是希望本教程既适合使学生了解、学习和掌握有限元法的基本原理与方法,又为他们进一步深入学习或实际应用及参加科研工作开辟道路;既适合教师的讲授,又便于读者自学。

尽管我们的本意是编写一本受广大教师、学生和工程技术人员欢迎的教材,但由于编者水平所限,加之参编各院校相距较远,不易于充分讨论,因此,本教程中出现疏漏在所难免。恳请各位前辈、老师和读者提出宝贵意见,以便再版时改正。

本教程主编王守信,副主编昂雪野、陈时锦、赵锡钱。参加编写工作的还有张力、周坚、高晶波、由敬舜、卞瑞花、冯西桥、彭天国、赵忠生、王继志、陈立群等同志。其中,洛阳工学院张力编写第一章;东北重型机械学院王守信编写第二、四两章;辽宁工学院周坚和锦州市房屋建筑工程公司高晶波编写第三章;齐齐哈尔轻工学院昂雪野编写第五章和第六章部分内容;哈尔滨工业大学陈时锦编写第六章部分内容及第八章、附录I、本书所附程序;南昌大学赵锡钱编写第七章;南昌大学由敬舜编写附录II;哈尔滨工业大学卞瑞花为附录I提供了算例并参加了程序调试工作。另外,清华大学冯西桥、东北重型机械学院彭天国、刘喜平、辽宁大学赵忠生、哈尔滨电工学院王继志、鞍山钢铁学院陈立群等同志参加了编写大纲的讨论并为本书提供资料或提出了建议。全书由王守信统稿。

在本教程的酝酿、编写和出版过程中,得到哈尔滨建筑大学王光远院士、南昌大学扶名福教授、洛阳工学院尹昌言教授、北京航空航天大学诸德超教授、北京理工大学姚德源和甘舜仙教授、内蒙古民族师范学院杨德全教授、中国矿业大学黄平副教授、哈尔滨工程大学季振林博士的关怀、指导和支持,哈尔滨工业大学王新荣教授仔细地审阅了书稿并提出不少改进意见,在此一并表示衷心地感谢。

编 者

1994年4月

目 录

第一章 杆、梁类结构的有限元分析	(1)
1-1 有限元法概述	(1)
1-2 杆单元的刚度矩阵	(5)
1-3 结点平衡方程与整体刚度矩阵	(9)
1-4 支承条件的引入	(12)
1-5 平面梁单元的刚度矩阵	(14)
1-6 非结点荷载的移置	(18)
1-7 用刚度集成法建立整体刚度矩阵	(21)
1-8 空间梁单元的刚度矩阵	(24)
习题	(30)
第二章 弹性力学平面问题	(33)
2-1 连续介质的离散化	(33)
2-2 单元分析的步骤	(34)
2-3 由结点位移求单元内任一点的位移——位移模式与形状函数	(36)
2-4 由结点位移求应变、应力和结点力——单元刚度矩阵	(39)
2-5 荷载向结点的移置	(42)
2-6 整体分析的步骤	(44)
2-7 整体刚度矩阵的形成	(45)
2-8 支承条件的引入	(47)
2-9 整体刚度矩阵的特点	(49)
2-10 有限元位移法解答的收敛性	(53)
2-11 高次三角形单元	(54)
2-12 计算结果的整理	(58)
习题	(59)
第三章 轴对称问题	(62)
3-1 基本概念	(62)
3-2 轴对称荷载情况的基本公式	(63)
3-3 非轴对称荷载的处理	(72)
习题	(78)
第四章 等参数单元分析	(79)
4-1 等参数单元的概念	(79)
4-2 平面等参数单元	(81)

4-3	六面体等参数单元.....	(88)
4-4	单元刚度矩阵的计算.....	(93)
4-5	荷载移置.....	(97)
4-6	单元形态对计算结果的影响.....	(98)
	习题.....	(99)
第五章	板壳结构分析.....	(101)
5-1	薄板弯曲问题的基本公式.....	(101)
5-2	矩形板单元的刚度矩阵.....	(107)
5-3	三角形板单元的刚度矩阵.....	(113)
5-4	板单元和梁单元的组合格问题.....	(120)
5-5	用薄板单元计算薄壳问题.....	(123)
5-6	算例.....	(129)
	习题.....	(132)
第六章	结构动力学问题.....	(135)
6-1	运动方程.....	(135)
6-2	质量矩阵.....	(137)
6-3	阻尼矩阵.....	(143)
6-4	结构自振频率及振型.....	(143)
6-5	大型广义特征值问题的求解方法.....	(151)
6-6	振动系统动力响应计算.....	(163)
第七章	非线性有限元概论.....	(169)
7-1	非线性问题及其有限元法.....	(169)
7-2	非线性有限元方程的求解.....	(172)
7-3	材料非线性问题.....	(178)
7-4	几何非线性问题.....	(188)
第八章	有限元法的前后处理.....	(196)
8-1	结构几何模型表示方法.....	(196)
8-2	有限元网格自动生成.....	(197)
8-3	边界条件处理.....	(204)
8-4	单元结点优序编码.....	(206)
8-5	有限元法的前置处理.....	(208)
附录I	有限元程序设计及算例.....	(210)
I-1	引言.....	(210)
I-2	有限元程序设计方法.....	(210)
I-3	有限元分析程序SSDAP及算例.....	(215)
附录II	国内、外有限元程序包简介.....	(219)
参考文献		(220)

第一章 杆、梁类结构的有限元分析

1-1 有限元法概述

电子计算机的出现和发展,在力学学科领域引起了变革。以有限元法为代表,包括有限差分法、边界元法、加权残数法等一系列离散化数值方法,有的刚刚崛起,有的则是古老的方法获得了新的活力,近几十年来得到蓬勃发展。其发展趋势,迄今未衰落,其使用范围,日益扩大。现在,逐渐形成了一个与固体力学、流体力学和一般力学并列的新学科——计算力学,或称为力学问题的计算机方法。

就有限元法来说,三十多年来,它的应用范围已从杆、梁类结构扩展到弹性力学平面问题、空间问题、板壳问题;由静力平衡问题扩展到动力问题、波动问题和稳定问题。分析的对象从弹性材料扩展到粘弹性、塑性、粘塑性及复合材料等;从固体力学扩展到流体力学、传热学及连续介质力学各领域。在工程实践中的作用从分析与校核扩展到优化设计并和计算机辅助设计、计算机辅助生产等技术相结合。本书附录I介绍的有限元程序包就从一个侧面反映了有限元法在国内、外的发展。可以预计,随着电子计算机技术的发展,有限元法作为一种有着坚实理论基础和广泛应用领域的数值分析方法,必将在国民经济建设和科学技术发展中发挥更大的作用,其自身亦将得到进一步的发展和完善。

推导有限元公式系统的方法有三种,即直接法、变分法和加权残数法。虽然变分法(把有限元法归结为求泛函的极值问题)和加权残数法使有限元法建立在更加坚实的数学基础上,并扩大了其应用范围,但为了易于理解,本书采用直接法推导公式。

从选择未知量的角度来看,有限元法可分为三类,即位移法、力法及混合法。本书采用应用范围最广的位移法,即取结点位移作为基本未知量。

有限元法(特别是有限元位移法)是在杆、梁类结构(以下简称杆系结构)分析的矩阵位移法基础上发展起来的。矩阵位移法的基本思路是:先把要分析的刚架拆成一个个杆件,逐个进行单独分析,然后再把这些杆件综合成整个刚架。在化整为零又积零为整的过程中把复杂刚架的计算问题转化为简单杆件的分析与综合问题。有限元法的基本思路也是如此。但有限元法的应用范围远远超过了原先的矩阵位移法。其中最大的飞跃是把对杆系结构分析的矩阵位移法推广应用于连续介质。对于杆系结构来说,它的每一个元件——杆、梁、柱等的力学性质可以由材料力学或弹性力学方法完全确定。这样的系统通常称之为“离散系统”。在用矩阵位移法分析这类系统时,结构的每一个元件自然地成为计算分析的小单位,也就是有限元法所称的“单元”。而连续介质系统则不同,它不存在这样的自然单元,必须人为地把原来的连续介质划分为有限个小块,这些

小块之间仅在有限个结点上连接，并以这些小块作为计算的单元。这个过程称为“连续介质的离散化”。对于“离散化”了的连续介质系统，我们可以采用和分析杆系结构同样的方法进行矩阵分析。从这个意义上说，杆系结构分析的矩阵位移法也可以包括在有限元法中。而且，杆系结构的矩阵分析具有物理意义清晰、形象直观的特点，用它来引入有限元法的概念，便于读者学习，从而为进一步研究连续介质的有限元法打下基础。

下面通过一个简单的例子来说明有限元法的基本解题思路。

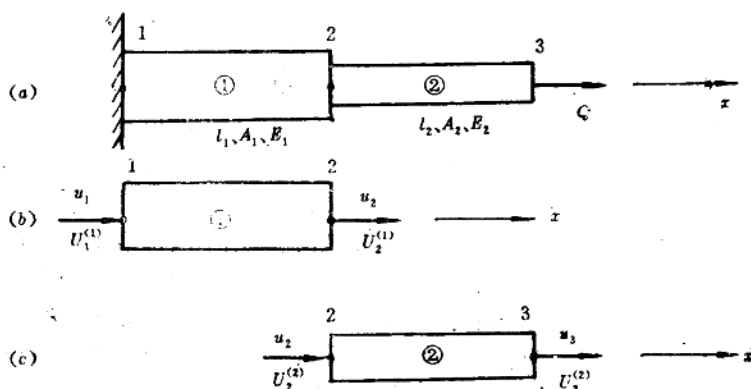


图 1-1

图 1-1 (a) 给出一根变截面受拉杆，其左端固定，右端受集中荷载 Q 。两段的长度、截面积和弹性模量分别为 l_1, A_1, E_1 和 l_2, A_2, E_2 。现在用有限元法分析这根变截面杆在荷载 Q 作用下的变形及应力情况。

沿杆轴线取坐标轴 x 。这里，自然地吧两段分别取为单元①和②，并把单元界面的中心点取为结点，编码如图所示。结点的位移称为结点位移，结点作用给单元的力称为结点力。

首先分析单元①，它的结点位移是 u_1, u_2 ，相应的结点力为 U_1, U_2 。见图 1-1 (b)。

这段杆的受力情况可分解为两种状态。

状态一：结点 2 固定。即 $u_1 = u_1, u_2 = 0$ 。单元内应力为

$$\sigma = E\epsilon = -\frac{E_1}{l_1} u_1$$

单元左端结点力为

$$U_1' = -A_1\sigma = \frac{A_1 E_1}{l_1} u_1$$

在材料力学中，拉应力为正，压应力为负。而在有限元法中，以沿 x 轴正方向的结点力为正，所以上式中加一负号。

由杆单元的静力平衡条件, 可得

$$U_2' = -U_1' = -\frac{A_1 E_1}{l_1} u_1$$

状态二: 结点 1 固定。即 $u_1 = 0$, $u_2 = u_2$ 。得单元两端结点力分别为

$$U_1'' = -A_1 \sigma = -\frac{A_1 E_1}{l_1} u_2$$

$$U_2'' = -U_1'' = \frac{A_1 E_1}{l_1} u_2$$

把以上两种状态的结果迭加起来, 得到结点 1、2 的结点力为

$$U_1^{(1)} = U_1' + U_1'' = -\frac{A_1 E_1}{l_1} u_1 - \frac{A_1 E_1}{l_1} u_2$$

$$U_2^{(1)} = U_2' + U_2'' = -\frac{A_1 E_1}{l_1} u_1 + \frac{A_1 E_1}{l_1} u_2$$

式中结点力的上角标 (1) 表示单元①。把上两式写成矩阵形式, 即

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{l_1} & -\frac{A_1 E_1}{l_1} \\ -\frac{A_1 E_1}{l_1} & \frac{A_1 E_1}{l_1} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [k]^{(1)} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1-1)$$

其中

$$[k]^{(1)} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{l_1} & -\frac{A_1 E_1}{l_1} \\ -\frac{A_1 E_1}{l_1} & \frac{A_1 E_1}{l_1} \end{bmatrix} \quad (1-2)$$

称为单元①的刚度矩阵。显然, 它是单元结点位移与结点力之间的转换矩阵。
式 (1-1) 可以写成

$$\begin{Bmatrix} U_1^{(1)} \\ U_2^{(1)} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{11}^{(1)} & k_{12}^{(1)} \\ k_{21}^{(1)} & k_{22}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1-3)$$

矩阵中的元素 $k_{11}^{(1)}$ 、 $k_{12}^{(1)}$ 等称为单元的刚度系数。它的物理意义是结点单位位移所引起的结点力。例如, $k_{12}^{(1)}$ 表示结点 2 发生单位位移, 而其它结点位移为零时, 在结点 1

处引起的结点力。

单元①的轴力可写成

$$N^{(1)} = U_2^{(1)} = \frac{A_1 E_1}{l_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} = [S] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{Bmatrix} \quad (1-4)$$

式中

$$[S] = \frac{A_1 E_1}{l_1} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (1-5)$$

称为应力矩阵。在杆系结构中，通常以轴力作为广义应力。

按对单元①同样的方法，对单元②可得到

$$\begin{Bmatrix} U_2^{(2)} \\ U_3^{(2)} \end{Bmatrix} = [k]^{(2)} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1-6)$$

式中

$$[k]^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{A_2 E_2}{l_2} & -\frac{A_2 E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2 E_2}{l_2} & \frac{A_2 E_2}{l_2} \end{bmatrix}$$

是单元②的刚度矩阵。

现在综合考虑各结点的平衡关系，以便求出结点位移。

在结点 1：

$$U_1^{(1)} = \frac{A_1 E_1}{l_1} u_1 - \frac{A_1 E_1}{l_1} u_2 = R_1$$

式中 R_1 为左端支反力。

在结点 2：

$$U_2^{(1)} + U_2^{(2)} = -\frac{A_1 E_1}{l_1} u_1 + \left(-\frac{A_1 E_1}{l_1} + \frac{A_2 E_2}{l_2} \right) u_2 - \frac{A_2 E_2}{l_2} u_3 = 0$$

在结点 3：

$$U_3^{(2)} = -\frac{A_2 E_2}{l_2} u_2 + \frac{A_2 E_2}{l_2} u_3 = Q$$

写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} R_1 \\ 0 \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{A_1 E_1}{l_1} & -\frac{A_1 E_1}{l_1} & 0 \\ -\frac{A_1 E_1}{l_1} & \left(-\frac{A_1 E_1}{l_1} + \frac{A_2 E_2}{l_2} \right) & -\frac{A_2 E_2}{l_2} \\ 0 & -\frac{A_2 E_2}{l_2} & \frac{A_2 E_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = [K] \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1-7)$$

式中 $[K]$ 称为整体刚度矩阵。由式 (1-2) 以及 (1-6)、(1-7) 看到, 单元刚度矩阵及结构整体刚度矩阵都是对称矩阵。这不是偶然的, 而是因满足功的互等定理的必然结果。

单元刚度矩阵 $[k]^{(e)}$ 和整体刚度矩阵 $[K]$ 的另一特点是它们的奇异性, 即它们的行列式等于零:

$$| [k]^{(e)} | = 0 \quad | [K] | = 0$$

这个性质可以从式 (1-2)、(1-6) 和 (1-7) 中单元①、②的刚度矩阵和结构整体刚度矩阵表达式直接得到验证。

这个特性的物理意义是, 无论单元①、②还是由它们组成的结构整体, 两端都没有支承, 因此除了杆件本身的变形外, 还可以产生任意的刚体位移。

在图 1-1 (a) 的实际结构中, 结构的左端 (即结点 1 处) 是固定的, 因此有 $u_1 = 0$ 。在式 (1-7) 中, 把条件 $u_1 = 0$ 代入, 就只须求解下列二阶方程组了:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ Q \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{A_1 E_1}{l_1} + \frac{A_2 E_2}{l_2} \right) & -\frac{A_2 E_2}{l_2} \\ -\frac{A_2 E_2}{l_2} & \frac{A_2 E_2}{l_2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} \quad (1-8)$$

这实际上已经引入了支承条件 $u_1 = 0$ 。关于引入支承条件的一般方法, 本章后面以及第二章还将进一步讨论。解方程组 (1-8), 即可求出结点位移 u_2 、 u_3 。连同已知的 $u_1 = 0$, 代回式 (1-4) 即可求出单元①的轴力, 同样可求出单元②的轴力。

由上面的简例可以看到, 用有限元法分析杆系结构的主要步骤是:

1. 划分单元, 对单元及结点进行编号 (从广义上说, 对于杆系结构, 这一步也可统称为“离散化”)。
2. 建立单元平衡方程 (1-1) 及 (1-6), 主要是逐个计算单元刚度矩阵 $[k]^{(1)}$ 、 $[k]^{(2)}$ 。
3. 建立结构整体平衡方程 (1-7), 主要是求出结构整体刚度矩阵 $[K]$ 。
4. 引入支承条件。
5. 求解线性代数方程组 (1-8), 得到各结点位移。
6. 由结点位移求各单元的轴力 (广义应力)。

本章将重点讨论几种常用杆、梁类单元刚度矩阵的计算方法, 同时介绍建立结构整体刚度矩阵的原理和方法, 引入支承条件的原理、方法以及非结点荷载的处理方法。关于线性代数方程组的求解方法, 请读者参阅有关文献, 这里不予详细讨论。

1-2 杆单元的刚度矩阵

上一节已经给出了杆轴线与坐标轴 x 重合情况下杆单元的刚度矩阵。如果把式 (1-3) 写成一般形式, 可写为

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)} \{\delta\}^{(e)} \quad (1-9)$$

其中

$$[k]^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

为单元 e 的单元刚度矩阵。

$$\{F\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} U_i \\ U_j \end{Bmatrix} \quad \{\delta\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} \quad (1-11)$$

分别为结点力矢量和结点位移矢量。

但是在实际结构中，杆的轴线不可能总是与坐标轴 x 重合。本节将介绍当杆单元的轴线与坐标轴 x 成某一夹角 φ 时建立其单元刚度矩阵的方法。为此，我们先把式(1-9)中的二阶单元刚度矩阵扩充为包含 y 方向结点位移和结点力的四阶矩阵，再经过坐标变换，得到倾斜杆单元的刚度矩阵。

1. 局部坐标系中杆单元的刚度矩阵

建立局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ ，使坐标轴 $\bar{x}$ 与杆单元 ij 的轴线重合，坐标轴 $\bar{y}$ 与杆垂直，如图1-2所示。局部坐标系中单元结点位移矢量为

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{u}_i & \bar{v}_i & \bar{u}_j & \bar{v}_j \end{Bmatrix}^T$$

相应的单元结点力矢量为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = \begin{Bmatrix} \bar{U}_i & \bar{V}_i & \bar{U}_j & \bar{V}_j \end{Bmatrix}^T$$

如果不考虑 $\bar{y}$ 方向，由于杆的轴线与坐标轴 $\bar{x}$ 重合，现在可以建立与式(1-9)完全相同的单元平衡方程

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{U}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & -\frac{AE}{l} \\ -\frac{AE}{l} & \frac{AE}{l} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{u}_j \end{Bmatrix}$$

引入 $\bar{y}$ 方向的结点位移 $\bar{v}_i$ 、 $\bar{v}_j$ 和结点力 $\bar{V}_i$ 、 $\bar{V}_j$ ，我们可以把上式扩展为四阶形式：

$$\begin{Bmatrix} \bar{U}_i \\ \bar{V}_i \\ \bar{U}_j \\ \bar{V}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{l} & 0 & \frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} \quad (1-12a)$$

或简记为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [\bar{k}]^{(e)} \{\bar{\delta}\}^{(e)} \quad (1-12b)$$

其中

$$[\bar{k}]^{(e)} = \begin{bmatrix} \frac{AE}{l} & 0 & -\frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{AE}{l} & 0 & \frac{AE}{l} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1-13)$$

即为局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ 中的杆单元刚度矩阵。由于小变形条件下可以忽略与杆轴线垂直方向结点位移对杆内力的影响，在单元刚度矩阵的相应位置添上了零元素。

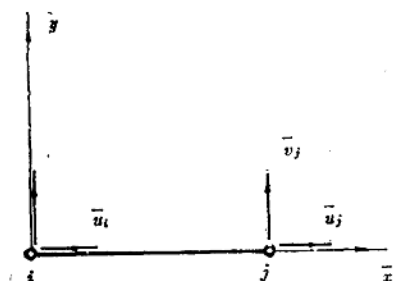


图 1-2

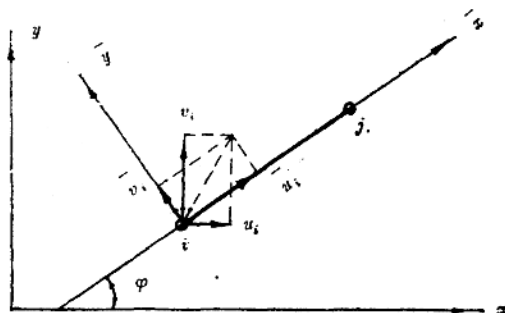


图 1-3

2. 坐标变换

设杆单元 ij 的轴线（即局部坐标系的 $\bar{x}$ 轴）与整体坐标系的坐标轴 x 夹角为 φ ，如图 1-3 所示，则单元在整体坐标系 xy 中的结点位移矢量和结点力矢量分别为

$$\left. \begin{aligned} \{\delta\}^{(e)} &= [u_i \quad v_i \quad u_j \quad v_j]^T \\ \{F\}^{(e)} &= [U_i \quad V_i \quad U_j \quad V_j]^T \end{aligned} \right\} \quad (1-14)$$

由图容易看到结点 i 处整体坐标系中的位移分量 u_i 、 v_i 与局部坐标系中的位移分量 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{v}_i$ 之间的关系为

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_i &= u_i \cos \varphi + v_i \sin \varphi \\ \bar{v}_i &= -u_i \sin \varphi + v_i \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

同理，结点 j 处可得关系式

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_j &= u_j \cos \varphi + v_j \sin \varphi \\ \bar{v}_j &= -u_j \sin \varphi + v_j \cos \varphi \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

把式 (a) 与 (b) 合并, 写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \bar{u}_i \\ \bar{v}_i \\ \bar{u}_j \\ \bar{v}_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \quad (1-15a)$$

或简写成

$$\{\bar{\delta}\}^{(e)} = [T] \{\delta\}^{(e)} \quad (1-15b)$$

式中矩阵 $[T]$ 称为坐标变换矩阵

$$[T] = \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (1-16)$$

同样, 两坐标系中单元结点力的变换为

$$\{\bar{F}\}^{(e)} = [T] \{F\}^{(e)} \quad (1-17)$$

由式 (1-16) 不难看出

$$[T][T]^T = [T]^T[T] = [I]$$

即变换矩阵 $[T]$ 是正交矩阵, 它具有下面特性

$$[T]^{-1} = [T]^T \quad (1-18)$$

3. 整体坐标系中倾斜杆单元的刚度矩阵

在局部坐标系 $\bar{x}\bar{y}$ 中, 杆单元 ij 的结点位移和结点力关系式已由式 (1-12) 给出。

把式 (1-15) 和 (1-17) 代入式 (1-12) 并利用式 (1-18), 得到

$$\{F\}^{(e)} = [T]^T [\bar{k}]^{(e)} [T] \{\delta\}^{(e)}$$

或

$$\{F\}^{(e)} = [k]^{(e)} \{\delta\}^{(e)} \quad (1-19)$$

式中

$$[k]^{(e)} = [T]^T [\bar{k}]^{(e)} [T] \quad (1-20)$$

即为整体坐标系中倾斜杆单元的刚度矩阵。把式 (1-13) 和 (1-16) 代入上式, 可得杆轴线与坐标轴倾角为 φ 的杆单元在整体坐标系中的刚度矩阵 (1)

$$[k]^{(e)} = \frac{AE}{l} \begin{bmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & -\alpha^2 & -\alpha\beta \\ \alpha\beta & \beta^2 & -\alpha\beta & -\beta^2 \\ -\alpha^2 & -\alpha\beta & \alpha^2 & \alpha\beta \\ -\alpha\beta & -\beta^2 & \alpha\beta & \beta^2 \end{bmatrix} \quad (1-21)$$

式中

$$\alpha = \cos\varphi \quad \beta = \sin\varphi$$

4. 倾斜杆单元轴力的计算

参考式 (1-4), 可把杆单元的轴力 N 用局部坐标下的结点位移 $\bar{u}_i$ 、 $\bar{u}_j$ 表示为

$$N = -\frac{AE}{l}\bar{u}_i + \frac{AE}{l}\bar{u}_j$$

把式 (a) 代入, 则有

$$\begin{aligned} N &= -\frac{AE}{l}(\alpha u_i + \beta v_i) + \frac{AE}{l}(\alpha u_j + \beta v_j) \\ &= \frac{AE}{l}[\alpha(-u_i + u_j) + \beta(-v_i + v_j)] \\ &= \frac{AE}{l}[-\alpha \quad -\beta \quad \alpha \quad \beta] \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{Bmatrix} = [S] \{\delta\}^{(e)} \quad (1-22) \end{aligned}$$

其中

$$[S] = \frac{AE}{l}[-\alpha \quad -\beta \quad \alpha \quad \beta] \quad (1-23)$$

即为与 x 轴倾角为 φ 的杆单元的应力矩阵。 (2)

1-3 结点平衡方程与整体刚度矩阵

式 (1-19) 给出了结构中任一单元 e 的平衡关系。本节要讨论的是结构的整体平衡关系, 从而建立结构整体刚度矩阵。为此, 我们从桁架中取出一个结点 i 来。汇交于结点 i 的共有 $\textcircled{a}$ 、 $\textcircled{b}$ 、 $\textcircled{c}$ 、 $\textcircled{d}$ 四个杆单元。在结点 i 处作用有水平荷载 X_i 和垂直荷载 Y_i , 如图 1-4 所示。

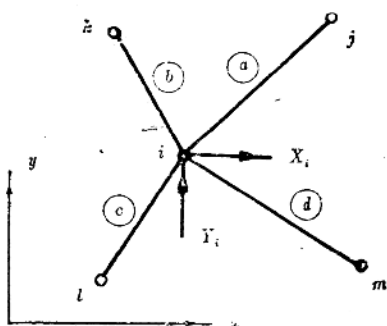


图 1-4

前面曾经说过, 结点力是结点作用给单元的力。现在以结点为研究对象, 则结点力是指单元作用给结点的力。它们是成对出现的、大小相等、方向相反的力。以杆①为例, 结点作用给单元的结点力为 $[U_i^{(a)} \quad V_i^{(a)}]^T$, 而单元作用给结点 i 的结点力是 $[-U_i^{(a)} \quad -V_i^{(a)}]^T$ 。

现在把结构从结点 i 处拆开, 得到五个分离体, 即①、②、③、④四个单元和一个结点 i 。图 1-5 (a) 示出了结点 i 作用给四个杆元的结点力, 而图 1-5 (b) 示出了四个杆元作用给结点 i 的结点力, 另外还有荷载 X_i 、 Y_i 。

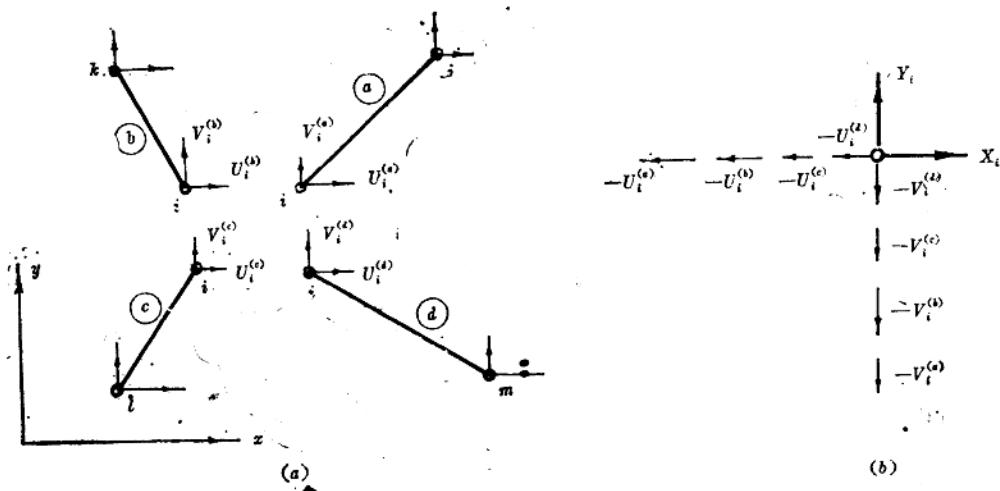


图 1-5

由结点 i 在水平和垂直方向的平衡条件, 可得

$$X_i - U_i^{(a)} - U_i^{(b)} - U_i^{(c)} - U_i^{(d)} = 0$$

$$Y_i - V_i^{(a)} - V_i^{(b)} - V_i^{(c)} - V_i^{(d)} = 0$$

或

$$\left. \begin{aligned} U_i^{(a)} + U_i^{(b)} + U_i^{(c)} + U_i^{(d)} &= X_i \\ V_i^{(a)} + V_i^{(b)} + V_i^{(c)} + V_i^{(d)} &= Y_i \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

单元平衡关系式 (1-19) 可写成分块形式

$$\begin{Bmatrix} F_i \\ F_j \end{Bmatrix}^{(e)} = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^{(e)} \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}^{(e)} \quad (b)$$

于是, 杆元② (ij) 作用于结点i的结点力为

$$\{F_i\}^{(a)} = \begin{Bmatrix} U_i^{(a)} \\ V_i^{(a)} \end{Bmatrix} = [k_{ii}]^{(a)} \{\delta_i\} + [k_{ij}]^{(a)} \{\delta_j\} \quad (c)$$

同理, 对杆元③、④、⑤有

$$\{F_i\}^{(b)} = \begin{Bmatrix} U_i^{(b)} \\ V_i^{(b)} \end{Bmatrix} = [k_{ii}]^{(b)} \{\delta_i\} + [k_{ik}]^{(b)} \{\delta_k\} \quad (d)$$

$$\{F_i\}^{(c)} = \begin{Bmatrix} U_i^{(c)} \\ V_i^{(c)} \end{Bmatrix} = [k_{ii}]^{(c)} \{\delta_i\} + [k_{il}]^{(c)} \{\delta_l\} \quad (e)$$

$$\{F_i\}^{(d)} = \begin{Bmatrix} U_i^{(d)} \\ V_i^{(d)} \end{Bmatrix} = [k_{ii}]^{(d)} \{\delta_i\} + [k_{im}]^{(d)} \{\delta_m\} \quad (f)$$

在 (c) ~ (f) 四式中, 结点位移 $\{\delta_i\}$ 、 $\{\delta_j\}$ 等既是单元量, 又是整体量, 因此可把上角标 (e) 去掉。

把结点i处的荷载记为

$$\{P_i\} = \begin{Bmatrix} X_i \\ Y_i \end{Bmatrix} \quad (g)$$

将式 (c) ~ (g) 代入式 (a), 得到结点i的平衡方程为

$$([k_{ii}]^{(a)} + [k_{ii}]^{(b)} + [k_{ii}]^{(c)} + [k_{ii}]^{(d)}) \{\delta_i\} + [k_{ij}]^{(a)} \{\delta_j\} + [k_{ik}]^{(b)} \{\delta_k\} + [k_{il}]^{(c)} \{\delta_l\} + [k_{im}]^{(d)} \{\delta_m\} = \{P_i\}$$

或缩写成

$$(\sum [k_{ii}]) \{\delta_i\} + \sum ([k_{ij}] \{\delta_j\}) = \{P_i\} \quad (h)$$

式中 $\sum$ 表示对环绕结点i的单元求和。显然, 与结点i无关的单元不进入上述求和式中。对于每个结点都得到一对如式 (h) 的平衡方程。若整个结构共有N个结点, 则得到 2N 个平衡方程, 它们构成 2N 阶线性方程组

$$[K] \{\delta\} = \{P\} \quad (1-24)$$

式(1-24)即为结构的结点平衡方程组。其中

$$\{\delta\} = [\delta_1 \ \delta_2 \ \dots \ \delta_N]^T$$

是由全部结点位移组成的列阵；

$$\{P\} = [P_1 \ P_2 \ \dots \ P_N]^T$$

是由全部结点荷载组成的列阵。矩阵 $[K]$ 称为结构的整体刚度矩阵，由式(h)，其元素可计算如下：

$$K_{rs} = \sum_i k_{ijs} \quad (1-25)$$

式中 $\sum$ 表示对汇交于结点 i 的各单元求和。脚标 rs 表示 K_{rs} 位于整体刚度矩阵 $[K]$ 中第 r 行第 s 列，而脚标 ij 表示 k_{ijs} 位于单元刚度矩阵中第 i 行第 j 列。根据整体结构的结点编码及自由度顺序不准确定 rs 和 ij 。

结构整体刚度系数 K_{rs} 的物理意义是：结构的第 s 个自由度发生单位位移，其它自由度没有位移，这时在第 r 个自由度引起的力。

1-4 支承条件的引入

在上一节，通过对结构中结点的受力情况进行分析，并根据结点的平衡条件，我们得到了结构的整体平衡方程组(1-24)

$$[K] \{\delta\} = \{P\}$$

事实上，在本章第一节分析变截面杆简例时得到的式(1-7)就是这样的线性方程组。方程组中待求的未知量是结构的全部结点位移。但是在求解之前还必须引入支承条件。

为了说明引入支承条件的必要性，我们还是以图1-1的变截面杆为例。当把单元①和单元②组合形成结构整体平衡方程(1-7)时，单元①左端的固定支承已由支反力 R_1 代替。现在的结构及受力情况如图1-6所示。

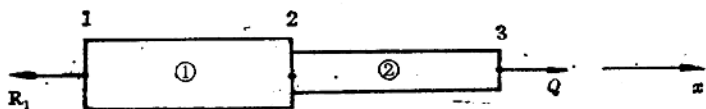


图1-6

由图1-6看到，这里的变截面杆结构是悬空结构。如果给定了荷载 Q ，结构的结点位移不能唯一地确定。因为结构除了本身的变形外，还可以产生任意的刚体位移。这一部分刚体位移分量根据给定的荷载显然无法唯一确定。另外，也可以从数学上说明这个问题。在方程组(1-24)中，为了解出结点位移 $\{\delta\}$ ，必须对整体刚度矩阵求逆。但是，在引入支承条件之前，整体刚度矩阵 $[K]$ 是个奇异矩阵，无法进行求逆矩阵的运算。所以，在求解方程组(1-24)之前，引入适当的支承条件是必要的。

下面介绍引入两类常见支承条件的具体做法。

1. 刚性支承

在图 1-1 (a) 的结构中, 杆的左端被固定, 即结点位移 $u_1 = 0$ 。这样的支承形式称为刚性支承。为了在程序计算中实现这类支承条件, 可以采用两种不同的方法, 但这两种方法得到的计算结果是相同的。

(1) 划行划列法

把方程组 (1-7) 写成下面形式

$$\begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (a)$$

若把 $u_1 = 0$ 代入, 则得下面三个方程

$$\left. \begin{aligned} K_{12}u_2 + K_{13}u_3 &= R_1 \\ K_{22}u_2 + K_{23}u_3 &= 0 \\ K_{32}u_2 + K_{33}u_3 &= Q \end{aligned} \right\} \quad (b)$$

在有限元位移法中, 基本未知量是结点位移, 一般不要求出未知的支反力。因此, 只需求解式 (b) 的后两个方程, 即可得到全部未知的结点位移了。于是, 引入支承条件 $u_1 = 0$ 以后, 方程组 (a) 成为

$$\begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (c)$$

比较方程组 (a) 和 (c), 可以看到, 只要把结构整体平衡方程 (a) 中与 u_1 有关的行和列划掉, 就引入了支承条件 $u_1 = 0$ 。这种方法的优点是可以使线性方程组阶数降低。

(2) 充零取 1 法

如果希望修改后的整体刚度矩阵 $[K]$ 仍保留原来的阶数和排列顺序, 可以采用充零取 1 法。我们仍在方程组 (a) 中引入支承条件 $u_1 = 0$ 。把与 u_1 有关的第一行及刚度矩阵 $[K]$ 的第一列除对角元 K_{11} 改为 1 外, 其余元素 (包括右端荷载项 R_1) 全部改为零, 于是式 (a) 成为

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & K_{22} & K_{23} \\ 0 & K_{32} & K_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ Q \end{bmatrix} \quad (d)$$

式中第一个方程清楚地给出 $u_1 = 0$ 。

2. 已知位移条件

如果图 1-1 (a) 左端不是固定, 而是给定了位移为 b , 即 $u_1 = b$, 这类支承形式