双博士系列

2001 考研

考研最后冲刺

命题预测试

（数学三）

编　写　北大·清华·人大考研串讲班联合

总策划　胡东华

科学技术

共12套预测试卷

2001年考研最后冲刺
命题预测试卷

（数学三）

编　写　北大·清华·人大考研串讲班
总策划　胡东华

科学技术文献出版社
Scientific and Technical Documents Publishing House
北　京

出　　版　　者：科学技术文献出版社
图 书 发 行 部：北京市复兴路15号(公主坟)中国科学技术信息研究所
　　　　　　　大楼B段/100038
邮 购 部 电 话：(010)62579473
图书发行部电话：(010)62579473　(010)62624508
门 市 部 电 话：(010)62534447　62543201
图书发行部传真：(010)62579473
E-mail:stdph@istic.ac.cn
策　划　编　辑：胡东华
责　任　编　辑：何　艳
责　任　校　对：何　艳
封　面　设　计：胡东华
发　　行　　者：科学技术文献出版社发行　新华书店总店北京发行所经销
印　　刷　　者：保定市河北小学印刷厂

版　(　印　)　次：2000年8月第1版　2000年8月第1次印刷
开　　　　　　本：787×1092　16开
字　　　　　　数：320千字
印　　　　　　张：100
本　册　定　价：20.00元(全七册合计定价：140元)

数学三

数学三的说明

一、适用的专业

国民经济计划与管理(含经济系统分析)、工业经济、工业企业管理(含企业财务管理)、统计学、数量经济学、技术经济学、运输经济(附邮电经济)、经济地理、信息经济,以及对数学要求较高的人口经济学、保险学专业。

二、考试内容

微 积 分

(一)函数、极限、连续

函数的概念及表示法　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性　反函数、复合函数、隐函数、分段函数　基本初等函数的性质及其图形　初等函数

数列极限与函数极限的定义及其性质　函数的左极限和右极限　无穷小和无穷大的概念及关系　无穷小的基本性质及阶的比较　极限四则运算　极限存在的两个准则(单调有界准则和夹逼准则)　两个重要极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\quad \lim_{x\to 0}(1+\frac{1}{x})^{x}=e$$

函数连续与间断的概念　初等函数的连续性　闭区间上连续函数的性质

(二)一元函数微分学

导数的概念　导数的几何意主和经济意义　函数的可导性与连续性之间的关系　导数的四则运算　基本初等函数的导数　复合函数、反函数和隐函数的导数　高阶导数　微分的概念和运算法则　微分中值定理及其应用　洛必达(L'Hospital)法则　函数单调性　函数的极值　函数图形的凹凸性、拐点、渐近性　函数图形的描绘　函数的最大值与最小值

(三)一元函数积分学

原函数与不定积分的概念　不定积分的基本性质　基本积分公式　不定积分的换元积分法和分部积分法　定积分的概念和基本性质　定积分中值定理　变上限定积分定义

的函数及其导数　牛顿-莱布尼茨(Newton-Leibniz)公式　定积分的换元积分法和分部积分法　广义积分的概念和计算　定积分的应用

(四)多元函数微积分学

多元函数的概念　二元函数的几何意义　二元函数的极限与连续性　有界闭区域上二元连续函数的性质(最大值和最小值定理)　多元函数的偏导数的概念与计算　多元复合函数的求导法与隐函数求导法　二阶偏导数　全微分　多元函数的极值和条件极值、最大值和最小值　二重积分的概念、基本性质和计算　无界区域上简单二重积分的计算

(五)无穷级数

常数项级数的收敛与发散的概念　收敛级数的和的概念　级数的基本性质与收敛的必要条件　几何级数与p级数以及它们的收敛性　正项级数收敛性的判别　任意项级数的绝对收敛与条件收敛　交错级数与莱布尼茨定理　幂级数及其收敛半径　收敛区间(指开区间)和收敛域　幂级数的和函数　幂级数在其收敛区间内的基本性质　简单幂级数的和函数的求法　初等函数的幂级数展开式

(六)常微分方程与差分方程

常微分方程的概念　微分方程的解、通解、初始条件和特解　变量可分离的方程　齐次方程　一阶线性方程　二阶常系数齐次线性方程及简单的非齐次线性方程　差分与差分方程的概念　差分方程的通解与特解　一阶常系数线性差分方程　微分方程与差分方程的简单应用

线性代数

(一)行列式

行列式的概念和基本性质　行列式按行(列)展开定理

(二)矩阵

矩阵的概念　单位矩阵、对角矩阵、数量矩阵、三角矩阵、对称矩阵和反对称矩阵及正交矩阵　矩阵的线性运算　矩阵与矩阵的积　方阵的幂　方阵乘积的行列式　矩阵的转置　逆矩阵的概念和性质　矩阵可逆的充分必要条件　矩阵的伴随矩阵　矩阵的初等变换　初等矩阵　矩阵的秩　矩阵等价　分块矩阵及其运算

(三)向量

向量的概念　向量的线性组合与线性表示　向量组线性相关与线性无关的概念、性质和判别法　向量组的极大线性无关组　等价向量组　向量组的秩　向量组的秩与矩阵的秩之间的关系

(四)线性方程组

线性方程组的解　线性方程组的克莱姆(Cramer)法则　线性方程组有解和无解的判定　齐次线性方程组的基础解系和通解　非齐次线性方程组的解与相应的齐次线性方程组(导出组)的解之间的关系　非齐次线性方程组的通解

(五)矩阵的特征值和特征向量

矩阵的特征值和特征向量的概念、性质　相似矩阵的概念及性质　矩阵可对角化的充分必要条件及相似对角矩阵　实对称矩阵的特征值和特征向量及相似对角矩阵

（六）二次型

二次型及其矩阵表示　合同变换与合同矩阵　二次型的秩　惯性定理　二次型的标准形和规范形　正交变换　用正交变换和配方法化二次型为标准形　二次型及其矩阵的正定性

概率论与数理统计

（一）随机事件和概率

随机事件与样本空间　事件的关系与运算　完全事件组　概率的定义　概率的基本性质　古典型概率　条件概率　概率的加法公式、乘法公式　全概率公式和贝叶斯（Bayes）公式　事件的独立性　独立重复试验

（二）随机变量及其概率分布

随机变量及其概率分布　随机变量的分布函数的概念及其性质　离散型随机变量的概率分布　连续型随机变量的概率密度　常见随机变量的概率分布

（三）二维随机变量及其概率分布

二维随机变量及其联合（概率）分布　二维离散型随机变量的联合概率分布、边缘分布和条件分布　二维连续型随机变量的联合概率密度、边缘密度和条件密度　随机变量的独立性　常见二维随机变量的联合分布　随机变量函数的概率分布　两个随机变量的简单函数的概率分布

（四）随机变量的数字特征

随机变量的数学期望（均值）、方差和标准差及其性质和计算　随机变量函数的数学期望　切比雪夫（Chebyshev）不等式　矩、协方差和相关系数及其性质

（五）大数定律和中心极限定理

切比雪夫（Chebyshev）大数定律　伯努利（Bernoulli）大数定律　辛钦（Khinchine）大数定律　泊松（Poisson）定理　棣莫弗－拉普拉斯（De Moivre－Laplace）定理（二项分布以正态分布为极限分布）　列维－林德伯格（Levy－Lindberg）定理（独立同分布的中心极限定理）

（六）数理统计的基本概念

总体　个体　简单随机样本　统计量　经验分布函数　样本均值、样本方差$\left(S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2\right)$和样本矩　χ^2分布、t分布、F分布的定义及其性质　分位数　正态总体的某些常用抽样分布

（七）参数估计

点估计的概念　估计量与估计值　矩估计法　最大似然估计法　估计量的评选标准　区间估计的概念　单个正态总体均值的区间估计　单个正态总体方差和标准差的区间估计　两个正态总体的均值差和方差比的区间估计

（八）假设检验

显著性检验的基本思想、基本步骤和可能产生的两类错误　单个和两个正态总体的均值和方差的假设检验

三、试卷结构

1.内容比例

(1)微积分　约 50%;

(2)线性代数　约 25%;

(3)概率论与数理统计　约 25%。

2.题型比例

(1)填空题与选择题　约 30%;

(2)解答题(包括证明题)约 70%。

试卷密号：

试卷密号：

此密号考生不得填写

2001年全国硕士研究生入学统一考试试卷

（预测1－12套）

考试科目 数学(三)

题　号	分　数	阅卷人
一		
二		
三		
四		
五		
六		
七		
八		
九		
十		
十一		
十二		
总分		

注意：此半页考生不得填写

准 考 证 编 号＿＿＿＿＿＿＿＿

考 试 科 目＿＿＿＿＿＿＿＿

报考学科、专业＿＿＿＿＿＿＿＿

报考研究方向＿＿＿＿＿＿＿＿

报 考 单 位＿＿＿＿＿＿＿＿

注 意 事 项

1. 以上各项除试卷密号之外必须填写清楚。
2. 答案必须写在试卷上。
3. 字迹要清楚、卷面要整洁。
4. 草稿纸另发，考试结束，统一收回。

数学三预测试卷(No.1)

考生注意:(1) 本试卷共十二个大题,满分 100 分。

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。把答案填在题后横线上)

(1) $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{e^x + e^{2-x}} =$ $\pi/4e$.

(2) 设 $z = \frac{y\ln x}{\sqrt[3]{y}}$,则$\frac{\partial z}{\partial y} =$ $\frac{x\ln x - \ln x}{xy}$;

(3) 若四阶矩阵 A 与 B 相似,矩阵 A 的特征值为$\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}$,则行列式 $|B^{-1} - E| =$ 24.

1 · 2 · 3 · 4

(4) 在 R^3 中给定两个向量组 $\varepsilon_1 = (1,0,-1)^T, \varepsilon_2 = (2,1,1)^T, \varepsilon_3 = (1,1,1)^T$ 与 $\eta_1 = (-1,0,0)^T, \eta_2 = (-3,-1,-2)^T, \eta_3 = (-1,0,-1)^T$。设 $A = (\varepsilon_1\varepsilon_2\varepsilon_3), B = (\eta_1\eta_2\eta_3)$。如果矩阵 $A = BC$,则 $C^{-1} =$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$

(5) 设随机变量 X 在区间$[-1,2]$上服从均匀分布,随机变量 $Y = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$

则方差 $DY =$ $\frac{8}{9}$.

1	0	-1
$\frac{2}{3}$	0	$\frac{1}{3}$

$E(x) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$

$E(X^2) = \frac{3}{3} = 1$

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。每小题的选项中,只有一项符合要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设 $y = f(x)$ 在 x_0 处可微。$f(x)$ 过点$(x_0, f(x_0))$处的切线上的纵坐标与函数相应点处的纵坐标之差必然(A)

(A) 都是比 Δx 的高阶无穷小　　(B) 都是与 Δx 的等价无穷小

(C) 都是与 Δx 的同阶无穷小　　(D) 不能确定

(2) 设 $f(x,y)$ 连续,且 $f(x,y) = xy + \iint\limits_D f(u,v)dudv$,其中 D 是由 $y = 0, y = x^2, x = 1$ 所围区域,则 $f(x,y)$ 等于(C).

(A)xy　　(B)$2xy$　　(C)$xy + \frac{1}{8}$　　(D)$xy + 1$

(3) 设 n 阶方阵A 为实对称矩阵,且 $A^2 = A$,则(C)

(A)A 必是满秩的 ×　　(B)A 的特征值只能是 1 ±1, 0

(C)A 的特征值只能是 0 或 1　　(D)(A),(B),(C) 全都不对

(4) 设随机变量 $X_i \sim \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{bmatrix} (i=1,2)$，且满足 $P\{X_1X_2=0\}=1$，则 $P\{X_1=X_2\}$ 等于（ B ）. A

(A)0 (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{1}{2}$ (D)1

(5) 设 X 为连续型随机变量，则下列结论不成立的是（ C ）

(A) 若 $f(x)$ 为 X 的概率密度，那么任意改变有限个点处 $f(x)$ 的值有限，X 的概率分布不变

(B) X 的概率密度函数不一定是连续函数

(C) 在任一指定实数值 α 处的概率都是零；而对离散型随机变量，在任一指定实数 β 处的概率都不是零

(D) 对任意两实数 $a,b(a<b)$。那么，在区间 (a,b)，$[a,b]$ 或 $(a,b]$ 上的概率值都相等

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

曲线 $y=\frac{1}{\sqrt{x}}$ 的切线与 x 轴和 y 轴围成一个图形，记切点的横坐标为 α，试求切线方程和这个图形的面积。当切点沿曲线趋于无穷远时，该面积的变化趋势如何？

得分	评卷人

四、(本题满分 6 分)

求函数 $u = f(x,y) = x^2 + y^2 - x - y$ 在由 $x = 0, y = 0$ 及 $y + x = 2$ 所围成的平面区域上的最大、最小值。

得分	评卷人

五、(本题满分 6 分)

设生产某种产品必须投入两种要素，x_1 和 x_2 分别为两要素的投入量，Q 为产出量；若生产函数为 $Q = 2x_1^{\alpha}x_2^{\beta}$，其中 α、β 为正常数，且 $\alpha + \beta = 1$，假设两种要素的价格分别为 P_1 和 P_2，试问：当产出量为 12 时，两要素各投入多少可使得投入总费用最小？

得分	评卷人

六、(本题满分 5 分)

设函数 $f(x,y)$ 连续，且满足 $f(x,y) = \sqrt{|x|}\,\mathrm{e}^y - x\cos(xy) + \iint f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 D 是由曲线 $y = |x|$ 及 $y = x^2$ 围成的平面有界区域。求 $f(x,y)$。

得分	评卷人

七、(本题满分 9 分)

设函数 $f(x)$ 连续，且 $\int_0^x tf(2x-t)\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\arctan x^2$. 已知 $f(1)=1$，求 $\int_1^2 f(x)\mathrm{d}x$ 的值。

得分	评卷人

八、(本题满分 8 分)

设三阶实对称矩阵 A 的三个特征值之积为 -1，其中有一个重特征值，而余下的一个特征值 λ_1 与一个重特征值的和为零，对应于 λ_1 的特征向量为 $\alpha_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$，求矩阵 A。

得分	评卷人

九、(本题满分 8 分)

设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=f(1)=0$，$f\left(\frac{1}{2}\right)=1$，试证：

(1) 存在 $\eta \in \left(\frac{1}{2},1\right)$，使 $f(\eta)=\eta$；(2) 对任意实数 λ，必存在 $\xi \in (0,\eta)$，使 $f'(\xi)$

得分	评卷人

十、(本题满分 8 分)

设 A, B 都是 n 阶方阵, 且有自然数 m, 使得 $A^m=0$。如果存在可逆矩阵 C, 同时使得 $C^{-1}AC$ 与 $C^{-1}BC$ 都为下三角阵。证明行列式 $|A+B|=|B|$。

得分	评卷人

十一、(本题满分 9 分)

假设二维随机变量 (X,Y) 在矩形区域 $G=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 2, 0\leqslant y\leqslant 1\}$ 上服从均匀分布, 记 $U=\begin{cases}0 & X\leqslant Y\\ 1, & X>Y\end{cases}$, $V=\begin{cases}0 & X\leqslant 2Y\\ 1 & X>2Y\end{cases}$

(1) 求 U 和 V 的联合分布;

(2) 求 U 和 V 的相关系数 γ.

得分	评卷人

十二、(本题满分 7 分)

某高校新生入学检查身体。设体重服从正态分布。今从中任意取出 25 名新生的体重，算得平均重量为 59 公斤，标准差为 2.3 公斤。在显著性水平 $\alpha = 0.05$ 下

(1) 是否可以认为新生平均体重为 60 公斤?

(2) 若要求体重的标准差不得超过 2 公斤，问新生体重的方差是否显著偏大?

附表一：t 分布表

$P\{t(n) > t_\alpha(n)\} = \alpha$

$t_\alpha(n)$ \ α / n	0.05	0.10
24	2.064	1.711
25	2.060	1.708

附表二：x^2 分布表

$P\{x^2(n) > x_\alpha^2(n)\} = \alpha$

$x_\alpha^2(n)$ \ α / n	0.025	0.05
24	39.364	36.415
25	40.646	37.652

数学三预测试卷(No.2)

考生注意:(1) 本试卷共十二个大题,满分 100 分。

(2) 根据国家标准,试卷中的正切函数、余切函数、反正切函数、反余切函数分别用 $\tan x$, $\cot x$, $\arctan x$ 和 $\operatorname{arccot} x$ 表示。

得分	评卷人

一、填空题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。把答案填在题后横线上)

(1) 曲线 $y = x^2$ 与 $y^2 = x$ 在顶点以外的交点处的夹角为________;

(2) 设 $A = f(xy, \frac{x}{y}) + g(\frac{y}{x})$,其中 f, g 均可微,则 $\frac{\partial z}{\partial x} =$ ________.

(3) 设 A, B 都是 n 阶正交矩阵,且 $|A| = 1$, $|B| = -1$,则行列式 $|A + B| =$ ________;

(4) 设随机变量 X 的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{3} & x \in [0,1] \\ \frac{2}{9} & x \in [3,6] \\ 0 & \text{其他} \end{cases}$$

若 k 使得 $P\{x \geqslant k\} = \frac{2}{3}$,则 k 的取值范围是________.

(5) 在区间 $[a, b]$ 上任取两点 A, B,设 A, B 两点的坐标分别为 x, y,则随机变量 $\varepsilon = |x - y|$ 的概率密度为________。

得分	评卷人

二、选择题(本题共 5 个小题,每小题 3 分,满分 15 分。在每小题的选项中,只有一项符合要求。把所选项前的字母填在题后括号内)

(1) 设对任意 x,总有 $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant g(x)$,且 $\lim\limits_{x \to \infty}[g(x) - \varphi(x)] = 0$,则 $\lim\limits_{x \to \infty} f(x)$ (　　)

(A) 存在且等于零　　(B) 存在但不一定为零

(C) 一定不存在　　(D) 不一定存在

(2) 曲线 $y = x\arctan x + b$,有(　　)条渐近线,其中 b 为给定的实常数。

(A)1;　(B)2;　(C)3;　(D)4。

(3) 设 α_1、α_2、α_3 是四元非齐次线性方程组 $AX = b$ 的三个解向量,且秩$(A) = 3$, $\alpha_1 = (1, 2, 3, 4)^T$, $\alpha_2 + \alpha_3 = (0, 1, 2, 3)^T$, c 表示任意常数,则线性方程组 $AX = b$ 的通解为(　　)

(A) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}$ (B) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}0\\1\\2\\3\end{pmatrix}$ (C) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}2\\3\\4\\5\end{pmatrix}$ (D) $\begin{pmatrix}1\\2\\3\\4\end{pmatrix}+c\begin{pmatrix}3\\4\\5\\6\end{pmatrix}$

(4) 下列命题正确的是(　　)

(A) 正交矩阵的特征值都是实数;　　(B) 正交矩阵的特征值是 ± 1;

(C) 实对称矩阵的特征值可以为 0;　　(D)0 不可能是实对称矩阵的特征值。

(5) 在电炉上安装了 4 个温控器,其显示温度的误差是随机的。在使用过程中,只要有两个温控器显示的温度不低于临界温度 t_0,电炉就断电。以 E 表示事件"电炉断电",而 $T_{(1)} \leqslant T_{(2)} \leqslant T_{(3)} \leqslant T_{(4)}$ 为 4 个温控器显示的按递增顺序排列温度值,则事件 E 等于(　　)

A. $\{T_{(1)} \geqslant t_0\}$　　B. $\{T_{(2)} \geqslant t_0\}$　　C. $\{T_{(3)} \geqslant t_0\}$　　D. $\{T_{(4)} \geqslant T_0\}$

得分	评卷人

三、(本题满分 6 分)

设 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处连续,$f(0)=0$,且 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(2x)-f(x)}{x}=a$,其中 a 为实常数。试讨论 $f(x)$ 在 $x=0$ 处的可微性。为什么?

得分	评卷人

四、(本题共2个小题,每小题5分,满分10分)

(1) 求微分方程 $y'' - 2y' - e^{2x} = 0$ 满足条件 $y(0) = 1, y'(0) = 1$ 的解.

(2) 计算二重积分 $\iint\limits_{D} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}} \mathrm{d}\sigma$,其中 D 是由曲线 $y = -a + \sqrt{a^2 - x^2}$($a > 0$) 和直线 $y = -x$ 围成的区域.

得分	评卷人

五、(本题满分5分)

设某种商品的需求函数为 $Q = Q(P)$,收益函数为 $R = P \cdot Q$,其中 P 为商品的价格,Q 为需求量。$Q(P)$ 是可微的单调减函数。若 $P = P_0$ 时,$Q = a > 0$。如果收益对价格的边际效应为 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}P}\right|_{P=P_0} = b > 0 (b < a)$,且边际收益 $\left.\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}Q}\right|_{Q=a} = c < 0$。求

(1) 当 $P = P_0$ 时,需求对价格的弹性 η;

(2) 当 $P = P_0$ 时,若价格上升1%,总收益是增加还是减少?变化的百分数是多少?

(3) 求 P_0 的值。