

**GONGCHENGSHUXUE
TIJIECIDIAN**

黄璞生 等编

工程数学 题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

工程数学题解词典

问题与解答

主 编	黄璞生	李柏玲	张 琪	张国华	徐裕生
副主编	赵生久	高世好	郭存娣	高军安	王瑞林
编 者	孙俊萍	顾宝珊	王 晖	李建林	屈晓刚
	刘长安	陈东立	霍爱莲	柴伟文	赵美霞
	王雪琴	权大学			

陕西科学技术出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

工程数学题解词典/黄璞生等主编. —西安:陕西科学技术出版社, 2001. 11

ISBN 7-5369-2983-8

I. 工... II. 黄... III. 工程数学—解题
IV. TB11-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2001) 第 079856 号

出 版 者 陕西科学技术出版社

西安北大街 131 号 邮编 710003

电话 (029) 7211894 传真 (029) 7218236

<http://www.snstp.com>

发 行 者 陕西科学技术出版社

电话 (029) 7212206 7260001

印 刷 西安市永惠彩色印刷厂

规 格 880mm×1230mm 32 开本

印 张 35 印张

字 数 1634 千字

版 次 2002 年 5 月第 1 版

2002 年 5 月第 1 次印刷

定 价 65.00 元

(如有印装质量问题, 请与承印厂联系调换)

前 言

随着我国教育事业的不断发展以及科学技术的不断进步,各类高等院校中的数学课程受到越来越多的人们的重视。广大数学教师以及数学爱好者热切希望能有一本以题解为中心,比较全面、系统、实用的工具书。《高等数学题解词典》自1993年问世以来,受到广泛的欢迎,同时,希望对高等学校中其他数学课程也能有类似的工具书。应此要求,我们根据多年教学工作的实践经验,参考国内外各种文献资料,在总结我国近年来教学实践的基础上,广泛吸收各方面的精华,编写了这本既适合我国高校教学特点,又体现当代科学发展的特点,查阅方便的《工程数学题解词典》。参加编写工作的都是各高校长期在教学第一线的,有几十年教龄和丰富教学经验的教授、副教授和讲师。

本词典是以题解为中心的大型工具书,包括了工程数学的主要内容:线性代数、概率论与数理统计、复变函数、积分变换、矢量分析与场论、计算方法、数理方程、变分法,全书分八章,共计2000余题。供各类大专院校的数学教师在教学和进修时使用,也可供硕士研究生入学考试系统复习及广大数学爱好者、大专院校的学生参考。

编写过程中,我们注意到以下几点:

1. 重视与教材的密切配合,各章都给出了内容提要,所选题目中既有复习、巩固教材中基本内容的题目,又有综合性较高,技巧性较强的题目,以便于提高读者的知识水平和解题能力。

2. 重视提高解题的分析能力,由于数学本身的特点以及参阅本书的读者一般都具有一定的水平,所以,对大部分题目不专门进行分析解说,只给出了简捷的数学运算,仅在适当的地方作出说明,这样不仅能使读者得到简明而准确的解答,而且也利于培养读者自己分析问题和解决问题的能力。

3. 本词典中的题目是从国内外各种教材、习题集,数学竞赛题及考研题及部分重点高校的考试题中收集整理编写的,还有在多年教学过程中自己编写的部分题目,这些题目全面概括了工程数学中各门课程的全部内容,考虑到本书的特点及篇幅,所收题目没有面面俱到,而侧重于各部分的重点及难点。

4. 对所选题目认真归类,以典型带一般,题目编排分类清楚、条理分明,各类题目选好典型,使读者能举一反三,触类旁通。

5. 对有些有多种解法的题目,我们列出了几种较好的解答,并给予简评。供读者进行比较,提高读者的解题技巧。

本词典的编写工作始筹于 1993 年,历时数年,广泛征集广大教师的意见,几易其稿,希望本词典能反映出我国数学工作者 50 年来在高校数学教学方面的成就,这是我们编者们的共同心愿。

本书在编写过程中承蒙许多数学界的老前辈和同行们的鼓励、支持和帮助,特别是西安建筑科技大学潘鼎坤教授、长安大学蒋传章教授,在书稿的编写过程中提出许多有益的建议,积极鼓励和支持我们的工作,谨此一并致谢。本书插图由赵生久绘制。

由于我们水平有限,选材可能有疏漏和不当之处,望读者批评指出。

编 者

2001 年 12 月

目 录

第 1 章 线性代数

§ 1 n 阶行列式	【1】
内容提要	
问题与解答(1.1.1—1.1.128)	【3】
1. 基本概念(1.1.1—1.1.12)	【3】
2. 基本性质(1.1.13—1.1.26)	【7】
3. 行列式的计算方法(1.1.27—1.1.122)	【12】
(1) 降阶法(1.1.27—1.1.37)	【16】
(2) 目标行列式法(1.1.38—1.1.67)	【16】
(3) 升阶法(1.1.68—1.1.71)	【29】
(4) 递推法(1.1.72—1.1.88)	【32】
(5) 归纳法(1.1.89—1.1.92)	【41】
(6) 多项式法(1.1.93—1.1.99)	【43】
(7) 分解法(1.1.100—1.1.110)	【47】
(8) 换元法(1.1.111—1.1.117)	【53】
4. 行列式的求导(1.1.118—1.1.122)	【56】
5. 克莱姆(Cramer)法则的应用(1.1.123—1.1.128)	【59】
§ 2 矩阵及其运算	【62】
内容提要	
问题与解答(1.2.1—1.2.149)	【66】
1. 矩阵的线性运算及乘法(方)运算(1.2.1—1.2.59)	【66】
2. 逆矩阵及其求法(1.2.60—1.2.100)	【88】
3. 矩阵方程的求解(1.2.101—1.2.117)	【102】
4. 分块矩阵及其运算(1.2.118—1.2.149)	【109】
§ 3 向量组的线性相关性与矩阵的秩	【128】
内容提要	
问题与解答(1.3.1—1.3.103)	【130】
1. 向量的线性运算(1.3.1—1.3.3)	【130】
2. 讨论线性相(无)关性及线性表示(1.3.4—1.3.23)	【130】
3. 判定、证明线性相(无)关性(1.3.24—1.3.52)	【139】
4. 向量组间的线性表示、等价、极大无关组及秩(1.3.53—1.3.82)	【150】

5. 矩阵的秩(1.3.83—1.3.103)	【160】
§ 4 线性方程组	【166】
内容提要	
问题与解答(1.4.1—1.4.103)	【168】
1. 讨论解的存在性、解存在的条件(1.4.1—1.4.22)	【168】
2. 基础解系(1.4.23—1.4.39)	【178】
3. 解的结构(1.4.40—1.4.48)	【184】
4. 讨论同解性及同解的条件(1.4.49—1.4.56)	【187】
5. 求方程组的解(1.4.57—1.4.58)	【191】
6. 含参变量线性方程组的讨论与求解(1.4.59—69)	【195】
7. 综合题(1.4.70—1.4.83)	【203】
8. 方程组理论的应用(1.4.84—1.4.103)	【211】
§ 5 相似矩阵与二次型	【220】
内容提要	
问题与解答(1.5.1—1.5.220)	【223】
1. 求方阵的特征值、特征向量及特征多项式(1.5.1—1.5.63)	【223】
2. 矩阵的相似及对角化(1.5.64—1.5.101)	【243】
3. 正交阵与实对称阵的对角化(1.5.102—121)	【261】
4. 二次型的标准化,规范化及其秩、正、负惯性指数的确定(1.5.122—1.5.164)	【273】
5. 正是二次型、正定阵的判定及应用(1.5.165—1.5.220)	【295】
§ 6 线性空间与线性变换	【317】
内容提要	
问题与解答(1.6.1—1.6.128)	【320】
1. 线性空间、线性相关性的判定(1.6.1—1.6.16)	【320】
2. 基和维数(1.6.17—1.6.25)	【326】
3. 子空间(1.6.26—1.6.52)	【329】
4. 坐标及坐标变换(1.6.53—1.6.66)	【340】
5. 线性空间的同构(1.6.67—1.6.71)	【347】
6. 线性变换(1.6.72—1.6.104)	【348】
7. 线性变换的矩阵(1.6.105—1.6.128)	【358】
第 2 章 概率论与数理统计	
§ 1 随机事件及其概率	【371】
内容提要	
问题与解答(2.1.1—2.1.151)	【375】
1. 事件的关系及运算(2.1.1—2.1.8)	【375】
2. 概率的古典定义,几何定义及基本性质(2.1.9—2.1.53)	【377】
3. 条件概率 乘法公式(2.1.54—2.1.67)	【392】
4. 全概公式与逆概(贝叶斯)公式(2.1.68—2.1.81)	【396】

5. n 重贝努里试验, 二项概率公式(2. 1. 82—2. 1. 94)	【401】
6. 综合题(2. 1. 95—2. 1. 151)	【404】
§ 2 随机变量及其分布	【418】
内容提要	
问题与解答(2. 2. 1—2. 2. 94)	【421】
1. 离散型随机变量的分布(2. 2. 1—2. 2. 20)	【421】
2. 连续型随机变量的分布(2. 2. 21—2. 2. 55)	【427】
3. 一维随机变量函数的分布(2. 2. 56—2. 2. 69)	【438】
4. 综合问题(2. 2. 70—2. 2. 94)	【444】
§ 3 多维随机变量及其分布	【453】
内容提要	
问题与解答(2. 3. 1—2. 3. 107)	【458】
1. 二维离散型随机变量及其概率分布(2. 3. 1—2. 3. 6)	【458】
2. 二维连续型随机变量及其概率分布(2. 3. 7—2. 3. 19)	【461】
3. 边缘分布(2. 3. 20—2. 3. 33)	【467】
4. 条件分布及随机变量的相互独立性(2. 3. 34—2. 3. 59)	【474】
5. 随机变量的函数的分布(2. 3. 60—2. 3. 79)	【486】
6. 综合题(2. 3. 80—2. 3. 107)	【495】
§ 4 随机变量的数字特征	【508】
内容提要	
问题与解答(2. 4. 1—2. 4. 103)	【511】
1. 一维随机变量的数字特征(2. 4. 1—2. 4. 36)	【511】
2. 一维随机变量函数的数字特征(2. 4. 37—2. 4. 55)	【524】
3. 二维随机变最的数字特征(2. 4. 56—2. 4. 82)	【531】
4. 综合题(2. 4. 83—2. 4. 103)	【541】
§ 5 大数定理与中心极限定理	【551】
内容提要	
问题与解答(2. 5. 1—2. 5. 25)	【551】
§ 6 数理统计的基本概念	【563】
内容提要	
问题与解答(2. 6. 1—2. 6. 28)	【565】
§ 7 参数估计	【575】
内容提要	
问题与解答(2. 7. 1—2. 7. 52)	【580】
§ 8 假设检验	【599】
内容提要	
问题与解答(2. 8. 1—2. 8. 28)	【602】
§ 9 方差分析	【615】
内容提要	

问题与解答(2.9.1—2.9.10)	【618】
§ 10 回归分析	【630】
内容提要	
问题与解答(2.10.1—2.10.7)	【633】
第3章 复变函数	
§ 1 复数与复变函数	【659】
内容提要	
问题与解答(3.1.1—3.1.41)	【660】
§ 2 解析函数	【680】
内容提要	
问题与解答(3.2.1—3.2.50)	【681】
§ 3 复变函数的积分	【710】
内容提要	
问题与解答(3.3.1—3.3.57)	【712】
§ 4 级数	【742】
内容提要	
问题与解答(3.4.1—3.4.40)	【743】
§ 5 留数理论及其应用	【767】
内容提要	
问题与解答(3.5.1—3.5.36)	【769】
§ 6 共形映射	【788】
内容提要	
问题与解答(3.6.1—3.6.17)	
第4章 积分变换	
§ 1 Fourier 变换	【801】
内容提要	
问题与解答(4.1.1—4.1.43)	【805】
§ 2 Laplace 变换	【824】
内容提要	
问题与解答(4.2.1—4.2.110)	【828】
1. 常见的几个基本函数的拉氏变换(4.2.1—4.2.9)	【828】
2. 证明有关定理和性质(4.2.10—4.2.18)	【833】
3. 利用拉氏变换性质,求函数的拉氏变换(4.2.19—4.2.55)	【835】
4. 求数的拉氏逆变换(4.2.56—4.2.80)	【846】
5. 拉氏变换的应用(4.2.81—4.2.110)	【855】
附录 1 Fourier 变换简表	【872】
附录 2 Laplace 变换简表	【875】

第5章 矢量分析与场论

- §1 矢量分析 【881】
 内容提要
 问题与解答(5.1.1—5.1.25) 【882】
- §2 场论 【889】
 内容提要
 问题与解答(5.2.1—5.2.69) 【891】

第6章 计算方法

- §1 误差与算法 【915】
 内容提要
 问题与解答(6.1.1—6.1.10) 【916】
- §2 方程求根 【920】
 内容提要
 问题与解答(6.2.1—6.2.14) 【922】
- §3 插值法 【929】
 内容提要
 问题与解答(6.3.1—6.3.17) 【932】
- §4 数值积分 【944】
 内容提要
 问题与解答(6.4.1—6.4.12) 【946】
- §5 常微分方程的数值解法 【955】
 内容提要
 问题与解答(6.5.1—6.5.10) 【958】
- §6 线性方程组的直接解法 【966】
 内容提要
 问题与解答(6.6.1—6.6.14) 【969】
- §7 范数和超定方程组的最小二乘解 【977】
 内容提要
 问题与解答(6.7.1—6.7.16) 【979】
- §8 求解线性方程组的迭代解法 【987】
 内容提要
 问题与解答(6.8.1—6.8.18) 【988】

第7章 数学物理方程

- §1 基本概念 分类与化简 【997】
 内容提要
 问题与解答(7.1.1—7.1.8) 【999】

1. 方程与定解条件推导(7.1.1—7.1.5)	【999】
2. 分类与化简(7.1.6—7.1.8)	【1002】
§ 2 行波法与积分变换法	【1004】
内容提要	
问题与解答(7.2.1—7.2.30)	【1005】
1. 行波法(7.2.1—7.2.5)	【1005】
2. 积分变换法(7.2.6—7.2.30)	【1011】
§ 3 分离变量法	【1033】
内容提要	
问题与解答(7.3.1—7.3.47)	【1033】
第 8 章 变分法	
§ 1 泛函和泛函的极值	【1075】
内容提要	
问题与解答(8.1.1—8.1.2)	【1076】
§ 2 固定边界的变分问题	【1078】
内容提要	
问题与解答(8.2.1—8.2.14)	【1081】
§ 3 变动边界的变分问题	【1089】
内容提要	
问题与解答(8.3.1—8.3.8)	【1089】
§ 4 重积分的变分问题	【1094】
内容提要	
问题与解答(8.4.1—8.4.3)	【1094】
§ 5 泛函的条件极值问题	【1096】
内容提要	
问题与解答(8.5.1—8.5.8)	【1097】
§ 6 泛函极值的充分条件	【1101】
内容提要	
问题与解答(8.6.1—8.6.7)	【1102】

第 1 章

线性代数

§ 1 n 阶行列式

内容提要

1. 排列与逆序

定义 1 由 $1, 2, \dots, n$ 组成的一个有序数组, 称为一个 n 级排列.

定义 2 在一个 n 级排列 $p_1 p_2 \dots p_n$ 中, 若有较大的数 p_i 排在较小的数 p_j 前面, 则称 p_i 与 p_j 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数, 称为它的逆序数, 记作 $N(p_1 p_2 \dots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列, 逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中, 将任意两个元素对调, 其余元素不动, 这种作出新排列的过程叫对换.

定理 1 一个排列中的任意两个元素对换, 排列改变奇偶性.

定理 2 n 级排列共有 $n!$ 个 ($n > 1$), 其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3 设有 n^2 个数, 排成 n 行 n 列的表, 则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式, 其中横排称为行, 纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和, 各项的符号是: 当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后, 若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号, 是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式 (亦简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^t a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n},$$

其中 $t = N(p_1 p_2 \dots p_n)$, 数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1 行列式与它的转置行列式相等 (行列式 D 的转置行列式记作 D').

性质 2 交换行列式的两行 (列), 行列式变号.

推论 若行列式中有两行 (列) 完全相同, 则此行列式为零.

性质 3 用数 k 乘行列式的一行 (列), 等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的前面.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质 4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两个数之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i} + b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i} + b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni} + b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质 5 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开定理

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij} ;记 $A_{ij} = (-1)^{i+j}M_{ij}$, A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in} \quad (i = 1, 2, \cdots, n),$$

或

$$D = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj} \quad (j = 1, 2, \cdots, n).$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1} + a_{i2}A_{j2} + \cdots + a_{in}A_{jn} = 0 \quad (i \neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j} + a_{2i}A_{2j} + \cdots + a_{ni}A_{nj} = 0 \quad (i \neq j).$$

5. 拉普拉斯展开定理

定理 4 设在 n 阶行列式 D 中,取定某 k 行(列) ($1 \leq k \leq n-1$),则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D .

6. 范德蒙行列式

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leq j < i \leq n} (x_i - x_j).$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

解 对任意二不同数字 $i, j (\leq n)$, 由于它们要么构成 $i_1 i_2 \cdots i_n$ 的一个逆序, 要么构成 $i_n i_{n-1} \cdots i_1$ 的一个逆序, 且不同时构成这两个排列的逆序, 故 $N(i_n i_{n-1} \cdots i_1) = C_n^2 - I$.

1.1.2 选取 i 和 k 的值, 使得乘积 $a_{62} a_{i5} a_{33} a_{k4} a_{46} a_{21}$ 含于某 6 阶行列式且带有负号.

解 由题设知 $i, k = 1$ 或 5 , 且 $i \neq k$. 当 $i = 1, k = 5$ 时, 重排乘积, 使各因子的行标成自然顺序:

$$a_{15} a_{21} a_{33} a_{46} a_{54} a_{62},$$

由 $N(513642) = 1 + 4 + 1 + 2 = 8$ 知, 原乘积在 6 阶行列式中带正号, 不合题意, 应舍去, 故 $i = 5, k = 1$ 即为所求.

1.1.3 选取 i 和 k 的值, 使乘积 $a_{47} a_{63} a_{11} a_{55} a_{7k} a_{24} a_{31}$ 含于某 7 阶行列式且带有正号.

解 依题设知 $i, k = 2$ 或 6 , 且 $i \neq k$. 重排乘积, 使各因子的行标成自然顺序:

$$a_{11} a_{24} a_{31} a_{47} a_{55} a_{63} a_{7k},$$

若 $i = 6, k = 2$, 则由 $N(6417532) = 14$ 知, 原乘积在 7 阶行列式中带正号 ($i = 2, k = 6$ 时对应的乘积必取负号), 故 $i = 6, k = 2$ 即为所求.

1.1.4 写出 5 阶行列式 $D_5 = \Delta(a_{ij})$ 中包含 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项.

解 D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的一般项为 $(-1)^{N(35klm)} a_{13} a_{25} a_{3k} a_{4l} a_{5m}$. 就 k, l, m 的所有可能取值, 列表讨论如下:

(k, l, m)	(1, 2, 4)	(1, 4, 2)	(2, 1, 4)	(2, 4, 1)	(4, 1, 2)	(4, 2, 1)
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知, D_5 中包含元素 a_{13}, a_{25} 的所有带正号的项为:

$$a_{13} a_{25} a_{31} a_{44} a_{52}, \quad a_{13} a_{25} a_{32} a_{41} a_{54}, \quad a_{13} a_{25} a_{34} a_{42} a_{51}.$$

1.1.5 利用行列式定义计算行列式

$$D_5 = \begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第 2, 3 行及第 2, 3 列上的元素都不等于零.

解 D_5 的一般项为

$$(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5}.$$

由于 p_1, p_4, p_5 只能在 1, 2, 3, 4, 5 中取不同的值, 故 p_1, p_4, p_5 中至少有一个要取 1, 4, 5 中之一数, 相应地 $a_{ip_i} = 0$, 从而 $(-1)^{N(p_1 p_2 p_3 p_4 p_5)} a_{1p_1} a_{2p_2} a_{3p_3} a_{4p_4} a_{5p_5} = 0$, 于是 $D_5 = 0$.

1.1.6 若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 $n^2 - n$, 问此行列式的值等于多少? 为什么?

解 此行列式的值等于零. 事实上, 设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$, 则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n}.$$

由于 $\Delta(a_{ij})$ 中零元素个数多于 $n^2 - n$ 个, 所以其中非零元素个数少于 $n^2 - (n^2 - n) = n$ 个, 从而 $a_{1p_1}, a_{2p_2}, \cdots, a_{np_n}$ 中至少有一个为零, 于是 $(-1)^{N(p_1 p_2 \cdots p_n)} a_{1p_1} a_{2p_2} \cdots a_{np_n} = 0$, 故 $\Delta(a_{ij}) = 0$.

1.1.7 试证:如果在 n 阶行列式 D 中,处于某 k 行和某 l 列交叉处的各元素均等于零,且 $k+l>n$,则 $D=0$.

证 设 $D=\Delta(a_{ij})$,则 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

因 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 中位于题设 k 行的元素有 k 个,而这 k 个元素中不在题设 l 列的元素至多有 $(n-l)$ 个,因此,其中至少有 $k-(n-l)=k+l-n \geq 1$ 个元素在题设 l 列之一列,即 $a_{1j_1}, a_{2j_2}, \cdots, a_{nj_n}$ 中至少有一个元素位于题设 k 行及 l 列的某交叉处,于是 $(-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} = 0$,故 $D=0$.

1.1.8 利用行列式定义计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1 \\ a & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix}.$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D &= (-1)^{N(1423)} 1 \times (-1) \times 1 \times 1 + (-1)^{N(3124)} a \times 2 \times 1 \times 2 \\ &= (-1)^2(-1) + (-1)^2 4a = 4a - 1. \end{aligned}$$

1.1.9 利用行列式定义计算行列式

$$D_{2n} = \begin{vmatrix} & & & & & \lambda_1 \\ & & & & & \lambda_2 \\ & & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n & \\ \lambda_{n+1} & & & & & \\ & \lambda_{n+2} & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \lambda_{2n} & & \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{解 } D_{2n} &= (-1)^{N[2n(2n-1)\cdots(n+1)12\cdots n]} \lambda_1 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \\ &= (-1)^{[(2n-1)+(2n-2)+\cdots+n]} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n} \\ &= (-1)^{\frac{3n^2-n}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n \lambda_{n+1} \cdots \lambda_{2n}. \end{aligned}$$

1.1.10 已知4阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中,元素 $a_{12}, a_{23}, a_{24}, a_{33}, a_{41}, a_{44}$ 为负数,而其它元素为正数,求 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正项的个数?

解 将行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正的元素换为1,负的元素换为-1,即得行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix},$$

容易求得 $D = -8$. 因为行列式 D 共有 $4! = 24$ 项, 且每项均为 1 或 -1 , 该行列式的值等于其正项个数与负项个数之差, 所以 D 中正项个数, 即 $\Delta(a_{ij})$ 中正项的个数为 8.

1.1.11 已知

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解法 1 $f(x)$ 中因子含 x 的元素有 $a_{11}, a_{21}, a_{23}, a_{32}, a_{35}, a_{44}, a_{52}$, 因此, 含有因子 x 的元素 a_{ip_i} 的列标只能取 $p_1 = 1, p_2 = 1, 3; p_3 = 2, 5; p_4 = 4; p_5 = 2$, 于是, 含 x^4 的项中元素 a_{ip_i} 的列标只能取

$$p_1 = 1, p_2 = 3, p_3 = 2, p_4 = 4 \text{ 与 } p_2 = 1, p_3 = 5, p_4 = 4, p_5 = 2,$$

相应的 5 级排列只有 1 3 2 4 5, 3 1 5 4 2, 故含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(13245)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44} a_{55} = 4x^4,$$

$$(-1)^{N(31542)} a_{13} a_{21} a_{35} a_{44} a_{52} = 21x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 2 将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式, 为此将 $a_{21} = x$ 及 $a_{32} = x$ 变成零元素, 得到

$$f(x) = \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7} \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

x^4 的系数是下列两项系数的和:

$$(-1)^{N(13542)} (-x)(1)(3x)(x)(-7x) = 21x^4,$$

$$(-1)^{N(13542)} (-x)(2x)(\frac{2}{7})(x)(-7x) = 4x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 3 将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式. 为此将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行, 第 3 行的 7 倍加到第 5 行, 再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍, 最后将新行列式的第 2, 3 行对调, 得

$$f(x) = - \begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix},$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x) \cdot x \cdot 2x \cdot x \cdot 2 = 4x^4$, $(-1)(-x) \cdot x \cdot 1 \cdot x \cdot 21x = 21x^4$, 所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.