GONGCHENGSHUXUE
TIJIECIDIAN

黄璞生 等编

工程数学题解词典

问题与解答

陕西科学技术出版社

工程数学题解词典

问题与解答

主　编	黄璞生	李柏玲	张　琪	张国华	徐裕生
副主编	赵生久	高世好	郭存娣	高军安	王瑞林
编　者	孙俊萍	顾宝珊	王　晖	李建林	屈晓刚
	刘长安	陈东立	霍爱莲	柴伟文	赵美霞
	王雪琴	权大学			

陕西科学技术出版社

图书在版编目(CIP)数据

工程数学题解词典/黄璞生等主编.—西安:陕西科学技术出版社,2001.11

ISBN 7-5369-2983-8

Ⅰ.工... Ⅱ.黄... Ⅲ.工程数学—解题 Ⅳ.TB11-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第079856号

出 版 者	陕西科学技术出版社 西安北大街131号 邮编710003 电话(029)7211894 传真(029)7218236 http://www.snstp.com
发 行 者	陕西科学技术出版社 电话(029)7212206 7260001
印 刷	西安市永惠彩色印刷厂
规 格	880mm×1230mm 32开本
印 张	35印张
字 数	1634千字
版 次	2002年5月第1版 2002年5月第1次印刷
定 价	65.00元

前　言

随着我国教育事业的不断发展以及科学技术的不断进步，各类高等院校中的数学课程受到越来越多的人们的重视。广大数学教师以及数学爱好者热切希望能有一本以题解为中心，比较全面、系统、实用的工具书。《高等数学题解词典》自 1993 年问世一来，受到广泛的欢迎，同时，希望对高等学校中其他数学课程也能有类似的工具书。应此要求，我们根据多年教学工作的实践经验，参考国内外各种文献资料，在总结我国近年来教学实践的基础上，广泛吸收各方面的精华，编写了这本既适合我国高校教学特点，又体现当代科学发展的特点，查阅方便的《工程数学题解词典》。参加编写工作的都是各高校长期在教学第一线的，有几十年教龄和丰富教学经验的教授、副教授和讲师。

本词典是以题解为中心的大型工具书，包括了工程数学的主要内容：线性代数、概率论与数理统计、复变函数、积分变换、矢量分析与场论、计算方法、数理方程、变分法，全书分八章，共计 2000 余题。供各类大专院校的数学教师在教学和进修时使用，也可供硕士研究生入学考试系统复习及广大数学爱好者、大专院校的学生参考。

编写过程中，我们注意到以下几点：

1. 重视与教材的密切配合，各章都给出了内容提要，所选题目中既有复习、巩固教材中基本内容的题目，又有综合性较高，技巧性较强的题目，以便于提高读者的知识水平和解题能力。

2. 重视提高解题的分析能力，由于数学本身的特点以及参阅本书的读者一般都具有一定的水平，所以，对大部分题目不专门进行分析解说，只给出了简捷的数学运算，仅在适当的地方作出说明，这样不仅能使读者得到简明而准确的解答，而且也利于培养读者自己分析问题和解决问题的能力。

3. 本词典中的题目是从国内外各种教材、习题集，数学竞赛题及考研题及部分重点高校的考试题中收集整理编写的，还有在多年教学过程中自己编写的部分题目，这些题目全面概括了工程数学中各门课程的全部内容，考虑到本书的特点及篇幅，所收题目没有面面俱到，而侧重于各部分的重点及难点。

4. 对所选题目认真归类，以典型带一般，题目编排分类清楚、条理分明，各类题目选好典型，使读者能举一反三，触类旁通。

5. 对有些有多种解法的题目,我们列出了几种较好的解答,并给予简评。供读者进行比较,提高读者的解题技巧。

本词典的编写工作始筹于1993年,历时数年,广泛征集广大教师的意见,几易其稿,希望本词典能反映出我国数学工作者50年来在高校数学教学方面的成就,这是我们编者们的共同心愿。

本书在编写过程中承蒙许多数学界的老前辈和同行们的鼓励、支持和帮助,特别是西安建筑科技大学潘鼎坤教授、长安大学蒋传章教授,在书稿的编写过程中提出许多有益的建议,积极鼓励和支持我们的工作,谨此一并致谢。本书插图由赵生久绘制。

由于我们水平有限,选材可能有疏漏和不当之处,望读者批评指出。

编　者

2001年12月

目　　录

第1章　线性代数

第 1 章

线性代数

§1　n 阶行列式

内容提要

1. 排列与逆序

定义 1　由 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组,称为一个 n 级排列.

定义 2　在一个 n 级排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中,若有较大的数 p_i 排在较小的的数 p_j 前面,则称 p_i 与 p_j 构成一个逆序. 一个 n 级排列中逆序的总数,称为它的逆序数,记作 $N(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为奇排列,逆序数为偶数的排列称为偶排列.

在一个排列中,将任意两个元素对调,其余元素不动,这种作出新排列的过程叫对换.

定理 1　一个排列中的任意两个元素对换,排列改变奇偶性.

定理 2　n 级排列共有 $n!$ 个$(n>1)$,其中奇偶排列各占一半.

2. n 阶行列式的定义

定义 3　设有 n^2 个数,排成 n 行 n 列的表,则记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

称为 n 阶行列式,其中横排称为行,纵排称为列. 它表示所有可能取自不同行不同列的 n 个数乘积的代数和,各项的符号是:当这一项中元素的行标按自然数顺序排列后,若对应的列标构成的排列是偶排列则取正号,是奇排列则取负号. 即 n 阶行列式(亦简记为 D 或 $\Delta(a_{ij})$)

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=\sum(-1)^t a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中 $t=N(p_1p_2\cdots p_n)$,数 a_{ij} 称为行列式 $\Delta(a_{ij})$ 的元素.

3. 行列式的性质

性质 1　行列式与它的转置行列式相等(行列式 D 的转置行列式记作 D').

性质 2　交换行列式的两行(列),行列式变号.

推论　若行列式中有两行(列)完全相同,则此行列式为零.

性质 3　用数 k 乘行列式的一行(列),等于用数 k 乘此行列式.

推论 1 行列式中某一行(列)的所有元素的公因子可以提到行列式符号的前面.

推论 2 若行列式有两行(列)的对应元素成比例,则行列式为零.

性质4 若行列式的某一行(列)的元素都是两数之和,例如第 i 列的元素都是两个数之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & (a_{1i}+b'_{1i}) & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & (a_{2i}+b'_{2i}) & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & (a_{ni}+b'_{ni}) & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

则行列式 D 等于下面两个行列式之和:

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & b'_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & b'_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & b'_{ni} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

性质5 将行列式的某一行(列)的各元素乘以同一数后加到另一行(列)的对应元素上去,行列式不变.

4. 行列式按行(列)展开定理

在 n 阶行列式中,把元素 a_{ij} 所在的第 i 行和第 j 列划去后,余下的 $n-1$ 阶行列式叫做元素 a_{ij} 的余子式,记作 M_{ij};记 $A_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij}$,A_{ij} 叫做元素 a_{ij} 的代数余子式.

定理 3 行列式等于它的任一行(列)的各元素与其对应的代数余子式乘积之和,即

$$D=a_{i1}A_{i1}+a_{i2}A_{i2}+\cdots+a_{in}A_{in}\quad(i=1,2,\cdots,n),$$

或

$$D=a_{1j}A_{1j}+a_{2j}A_{2j}+\cdots+a_{nj}A_{nj}\quad(j=1,2,\cdots,n).$$

推论 行列式任一行(列)的元素与另一行(列)的对应元素的代数余子式乘积之和等于零,即

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0\qquad(i\neq j),$$

或

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0\qquad(i\neq j).$$

5. 拉普拉斯展开定理

定理 4 设在 n 阶行列式 D 中,取定某 k 行(列)$(1\leqslant k\leqslant n-1)$,则在这 k 行(列)中所有 k 阶子式与它们对应的代数余子式的乘积之和等于行列式 D.

6. 范德蒙行列式

$$D_n=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}=\prod_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j).$$

7. 克莱姆法则

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的线性方程组的一般形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n.
\end{cases}
\tag{1}
$$

定理 5　(克莱姆法则) 如果线性方程组(1) 的系数行列式不等于零,即

$$
D = \begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix} \neq 0,
$$

那末,方程组(1) 有唯一解

$$
x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D},\ \cdots,\ x_n = \frac{D_n}{D}. \tag{2}
$$

其中 $D_j(j = 1,2,\cdots,n)$ 是把系数行列式 D 中第 j 列的元素用方程组(1) 右端的常数项代替后所得到的 n 阶行列式,即

$$
D_j = \begin{vmatrix}
a_{11} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}.
$$

含有 n 个未知数 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的 n 个方程的齐次线性方程组的一般形式为

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = 0.
\end{cases}
\tag{3}
$$

定理 6　若齐次线性方程组(3) 的系数行列式 $D \neq 0$,则齐次线性方程组(3) 只有零解.

定理 7　若齐次线性方程组(3) 有非零解,则它的系数行列式 $D = 0$.

[附] **行列式乘法规则**:

$$
\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\
a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
\cdot
\begin{vmatrix}
b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\
b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn}
\end{vmatrix}
=
\begin{vmatrix}
c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\
c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
c_{n1} & c_{n2} & \cdots & c_{nn}
\end{vmatrix}
$$

其中 c_{ij} 是 $\Delta(a_{ij})$ 的第 i 行与 $\Delta(b_{ij})$ 的第 j 列对应元素乘积之和,即

$$
c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + b_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{in}b_{nj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}.
$$

由于行列式是个数,也可分别算出行列式 $\Delta(a_{ij})$、$\Delta(b_{ij})$ 的值,然后再相乘.

问题与解答

1. 基本概念

1.1.1　设 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数为 I,问排列 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的逆序数为多少?

解　对任意二不同数字 $i,j(\leqslant n)$，由于它们要么构成 $i_1i_2\cdots i_n$ 的一个逆序，要么构成 $i_ni_{n-1}\cdots i_1$ 的一个逆序，且不同时构成这两个排列的逆序，故 $N(i_ni_{n-1}\cdots i_1)=C_n^2-I$.

1.1.2　选取 i 和 k 的值，使得乘积 $a_{62}a_{i5}a_{33}a_{k4}a_{46}a_{21}$ 含于某 6 阶行列式且带有负号.

解　由题设知 i、$k=1$ 或 5，且 $i\neq k$. 当 $i=1,k=5$ 时，重排乘积，使各因子的行标成自然顺序：

$$a_{15}a_{21}a_{33}a_{46}a_{54}a_{62},$$

由 $N(513642)=1+4+1+2=8$ 知，原乘积在 6 阶行列式中带正号，不合题意，应舍去，故 $i=5,k=1$ 即为所求.

1.1.3　选取 i 和 k 的值，使乘积 $a_{47}a_{63}a_{1i}a_{55}a_{7k}a_{24}a_{31}$ 含于某 7 阶行列式且带有正号.

解　依题设知 i、$k=2$ 或 6，且 $i\neq k$. 重排乘积，使各因子的行标成自然顺序：

$$a_{1i}a_{24}a_{31}a_{47}a_{55}a_{63}a_{7k},$$

若 $i=6,k=2$，则由 $N(6417532)=14$ 知，原乘积在 7 阶行列式中带正号($i=2,k=6$ 时对应的乘积必取负号)，故 $i=6$，$k=2$ 即为所求.

1.1.4　写出 5 阶行列式 $D_5=\Delta(a_{ij})$ 中包含 a_{13},a_{25} 的所有带正号的项.

解　D_5 中包含元素 a_{13},a_{25} 的一般项为 $(-1)^{N(35klm)}a_{13}a_{25}a_{3k}a_{4l}a_{5m}$. 就 k,l,m 的所有可能取值，列表讨论如下：

(k,l,m)	(1,2,4)	(1,4,2)	(2,1,4)	(2,4,1)	(4,1,2)	(4,2,1)
$N(35klm)$	5	6	6	7	7	8

由上表可知，D_5 中包含元素 a_{13},a_{25} 的所有带正号的项为：

$$a_{13}a_{25}a_{31}a_{44}a_{52},\quad a_{13}a_{25}a_{32}a_{41}a_{54},\quad a_{13}a_{25}a_{34}a_{42}a_{51}.$$

1.1.5　利用行列式定义计算行列式

$$D_5=\begin{vmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & a_{35} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 & 0 \\ 0 & a_{52} & a_{53} & 0 & 0 \end{vmatrix},$$

其中第 2,3 行及第 2,3 列上的元素都不等于零.

解　D_5 的一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}.$$

由于 p_1,p_4,p_5 只能在 1,2,3,4,5 中取不同的值，故 p_1,p_4,p_5 中至少有一个要取 1,4,5 中之一数，相应地 $a_{ip_i}=0$，从而 $(-1)^{N(p_1p_2p_3p_4p_5)}a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}a_{5p_5}=0$，于是 $D_5=0$.

1.1.6　若一个 n 阶行列式中等于零的元素的个数多于 n^2-n，问此行列式的值等于多少？为什么？

解　此行列式的值等于零. 事实上，设此行列式为 $\Delta(a_{ij})$，则其一般项为

$$(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}.$$

由于 $\Delta(a_{ij})$ 中零元素个数多于 n^2-n 个，所以其中非零元素个数少于 $n^2-(n^2-n)=n$ 个，从而 $a_{1p_1},a_{2p_2},\cdots,a_{np_n}$ 中至少有一个为零，于是 $(-1)^{N(p_1p_2\cdots p_n)}a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$，故 $\Delta(a_{ij})=0$.

1.1.7　试证：如果在 n 阶行列式 D 中，处于某 k 行和某 l 列交叉处的各元素均等于零，且 $k+l>n$，则 $D=0$.

证　设 $D=\Delta(a_{ij})$，则 D 的一般项为

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

因 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 中位于题设 k 行的元素有 k 个，而这 k 个元素中不在题设 l 列的元素至多有 $(n-l)$ 个，因此，其中至少有 $k-(n-l)=k+l-n\geqslant 1$ 个元素在题设 l 列之一列，即 $a_{1j_1},a_{2j_2},\cdots,a_{nj_n}$ 中至少有一个元素位于题设 k 行及 l 列的某交叉处，于是 $(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0$，故 $D=0$.

1.1.8　利用行列式定义计算行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & 0 & a & 0\\ 2 & 0 & 0 & -1\\ a & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 2\end{vmatrix}.$$

解　$D=(-1)^{N(1423)}1\times(-1)\times 1\times 1+(-1)^{N(3124)}a\times 2\times 1\times 2$

$=(-1)^2(-1)+(-1)^2 4a=4a-1.$

1.1.9　利用行列式定义计算行列式

$$D_{2n}=\left|\begin{array}{cccc:cccc} & & & & & & & \lambda_1\\ & & & & & & \lambda_2 & \\ & & & & & \iddots & & \\ & & & & \lambda_n & & & \\ \hdashline \lambda_{n+1} & & & & & & & \\ & \lambda_{n+2} & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_{2n} & & & & \end{array}\right|$$

解　$D_{2n}=(-1)^{N[2n\,(2n-1)\cdots(n+1)\,1\,2\cdots n]}\lambda_1\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{[(2n-1)+(2n-2)+\cdots+n]}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}$

$=(-1)^{\frac{3n^2-n}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n\lambda_{n+1}\cdots\lambda_{2n}.$

1.1.10　已知 4 阶行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中，元素 $a_{12},a_{23},a_{24},a_{33},a_{41},a_{44}$ 为负数，而其它元素为正数，求 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正项的个数？

解　将行列式 $\Delta(a_{ij})$ 中所有正的元素换为 1，负的元素换为 -1，即得行列式

$$D=\begin{vmatrix}1 & -1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 1 & 1 & -1\end{vmatrix},$$

容易求得 $D=-8$. 因为行列式 D 共有 $4!=24$ 项,且每项均为 1 或 -1,该行列式的值等于其正项个数与负项个数之差,所以 D 中正项个数,即 $\Delta(a_{ij})$ 中正项的个数为 8.

1.1.11　已知

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ x & 3 & 2x & 11 & 4 \\ -1 & x & 0 & 4 & 3x \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

求 $f(x)$ 中 x^4 的系数.

解法 1　$f(x)$ 中因子含 x 的元素有 $a_{11},a_{21},a_{23},a_{32},a_{35},a_{44},a_{52}$,因此,含有因子 x 的元素 a_{ip_i} 的列标只能取 $p_1=1,p_2=1,3;p_3=2,5;p_4=4;p_5=2$,于是,含 x^4 的项中元素 a_{ip_i} 的列标只能取

$$p_1=1,p_2=3,p_3=2,p_4=4 \text{ 与 } p_2=1,p_3=5,p_4=4,p_5=2,$$

相应的 5 级排列只有 1 3 2 4 5, 3 1 5 4 2,故含 x^4 的项为

$$(-1)^{N(1\,3\,2\,4\,5)}a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}a_{55}=4x^4,$$

$$(-1)^{N(3\,1\,5\,4\,2)}a_{13}a_{21}a_{35}a_{44}a_{52}=21x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 2　将 $f(x)$ 化成含 x 的元素位于不同行、不同列的行列式,为此将 $a_{21}=x$ 及 $a_{32}=x$ 变成零元素,得到

$$f(x)=\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & 4 \\ -\frac{6}{7} & 0 & \frac{3}{7} & \frac{27}{7} & 3x+\frac{2}{7} \\ 2 & 21 & 4 & x & 5 \\ 1 & -7x & 3 & -1 & 2 \end{vmatrix},$$

x^4 的系数是下列两项系数的和:

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(1)(3x)(x)(-7x)=21x^4,$$

$$(-1)^{N(1\,3\,5\,4\,2)}(-x)(2x)\left(\frac{2}{7}\right)(x)(-7x)=4x^4,$$

所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.

解法 3　将 $f(x)$ 化成 x 只位于主对角线上的行列式. 为此将 $f(x)$ 的第 1 行加到第 2 行,第 3 行的 7 倍加到第 5 行,再将所得行列式的第 5 列减去第 2 列的 3 倍,最后将新行列式的第 2,3 行对调,得

$$f(x)=-\begin{vmatrix} -x & 3 & 1 & 3 & -9 \\ -1 & x & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 6 & 2x+1 & 14 & -14 \\ 2 & 21 & 4 & x & -58 \\ -6 & 0 & 3 & 27 & 21x+2 \end{vmatrix},$$

含 x^4 的项为 $(-1)(-x)\cdot x\cdot 2x\cdot x\cdot 2=4x^4$,　$(-1)(-x)\cdot x\cdot 1\cdot x\cdot 21x=21x^4$,所以 $f(x)$ 中 x^4 的系数为 25.